

Phys 3079.14.5

56

Harvard University



LIBRARY OF THE
SCHOOL OF ENGINEERING

NOV 15

~~WITHDRAWN FROM
CABOT LIBRARY~~

HARVARD COLLEGE



SCIENCE CENTER
LIBRARY



COURS DE MAGNÉTISME ET D'ÉLECTRICITÉ

DEUXIÈME ÉDITION

COMPLÈTEMENT TRANSFORMÉE ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE

PREMIÈRE PARTIE ÉTUDE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Ce volume contient le minimum des connaissances exigibles d'un ingénieur
ou d'un professeur de physique.

Ce minimum est du reste suffisant pour toutes les applications.

TOME TROISIÈME
DU
COURS DE PHYSIQUE
PAR
H. BOUASSE

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

COURS
DE
PHYSIQUE

U

COURS DE MAGNÉTISME ET D'ÉLECTRICITÉ

DEUXIÈME ÉDITION

COMPLÈTEMENT TRANSFORMÉE ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE

PREMIÈRE PARTIE
ETUDE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Ce volume contient le minimum des connaissances exigibles d'un ingénieur
ou d'un professeur de physique.

Ce minimum est du reste suffisant pour toutes les applications.

TOME TROISIÈME
DU
COURS DE PHYSIQUE

PAR

H. BOUASSE

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT

Pl. 3077.14.5

June 3, 1917
HARVARD UNIVERSITY
SCHOOL OF ENGINEERING
(I)

JUN 20 1917
TRANSFERRED TO
HARVARD COLLEGE LIBRARY

209
56

Tous droits de reproduction, de traduction, d'adaptation et d'exécution
réservés pour tous pays.

Copyright by Ch. Delagrave, 1914

INTRODUCTION

SUR QUELQUES ERREURS A EVITER DANS LA RÉDACTION D'UN COURS DE PHYSIQUE

C'est une observation vulgaire, qu'on est presque toujours intéressé par le récit de soi-même. Sans nous lasser, nous lisons les mémoires, non pas seulement de César et de Napoléon, mais du bourgeois et du grenadier. Il suffit qu'un homme dise ce qu'il a vu, pour qu'on lui passe les incorrections du style et les défauts du plan. Je réclame la même indulgence. Voici treize ans bientôt que je travaille à doter les étudiants français d'un traité de physique qui joigne un peu de science et de conscience à beaucoup de bon sens (étant la chose du monde la mieux partagée, je ne suis pas orgueilleux de m'en prévaloir). Il est naturel que je dise les réflexions qui m'ont occupé au cours de ce long voyage où, pour me soutenir, je n'ai pas eu l'espoir des récompenses et des honneurs, pas même des éloges.

On ne reste pas si longtemps en route sans méditer sur le choix de l'itinéraire, sans comparer sa méthode à la méthode d'autrui, sans chercher les raisons de la croire meilleure; en un mot, sans construire un système de ce qui est d'abord le résultat d'un instinct. On ne travaille pas une si longue fraction de la vie d'un homme sans se demander si vraiment le jeu paye la chandelle, s'il ne vaudrait pas mieux contempler la fuite des nuages et lire son journal, occupations actuellement plus avantageuses au fonctionnaire que de se casser la tête sur des grimoires.

Au surplus, on m'a fait des critiques qui me semblent si parfaitement saugrenues et que l'on croyait si parfaitement justifiées, que je trouve utile d'explicitement mon opinion... avec cette franchise qui me classe dans l'espèce si rare des paysans du Danube.

*
* *

Il est de bon ton de mépriser le professeur, d'abaisser celui qui écrit un cours devant celui qui fabrique un mémoire. Depuis dix ans,

que de fois n'ai-je pas entendu la phrase : « Alors, vous ne faites plus rien ? » prononcée par des gens qui savaient pertinemment que je travaille du matin au soir !

Si vous croyez difficile d'effectuer tant bien que mal des expériences, de publier des nombres qui rarement signifient quelque chose, de recommencer sur le corps M ce qui est connu des corps A, B, C, bref d'imiter la masse des physiciens modernes dans leurs illustres travaux ;... si vous trouvez commode de bâtir un ouvrage qui ait le sens commun, expliquez donc, sans martyriser notre amour-propre national, que nous passions notre temps à traduire les livres étrangers, nous honorant d'y joindre une préface et du remplissage ! Expliquez donc que, depuis Verdet, l'École normale, *dont c'est la fonction*, n'ait pas écrit dix lignes pour l'enseignement de la Physique !

Vous trouvez naturel qu'un homme s'illustre à composer une histoire de France. Pour ne citer que ceux qui possèdent boulevard dans la capitale, que seraient Henri Martin et Michelet sans leurs histoires générales ? Mais vous n'admettez pas qu'on ait quelque mérite à embrasser la masse d'une science aussi complexe que la Physique ! En vérité, négligeant comme la plupart des physiciens français tout ce qui n'est pas votre petit casier, c'est à croire que vous mettez dans votre jugement une pointe de jalousie.

En France, depuis trente ans, nous manquons de professeurs, d'hommes capables d'exposer aux étudiants les résultats de la science. Tous ceux qui ont publié des cours, ont lamentablement copié Verdet, directement ou par intermédiaire : leurs ouvrages ont un air de famille révélateur. Ces messieurs n'ont jamais pris la peine de repenser la science telle qu'elle se présentait au moment qu'ils écrivaient : ils ont simplement allongé Verdet. A aucun instant ils ne se sont avisés de ceci, qu'il fallait élargir les bases, modifier les méthodes d'exposition. Verdet a fait son temps : il professait il y a soixante ans ; nos élèves ont d'autres besoins que les siens. Nous devons mettre à leur portée des questions qui, *pour connues que la plupart fussent du temps de Verdet*, ne semblaient pas alors matière à enseignement. Bref, ces messieurs ont oublié le rôle fondamental du professeur, qui est de transporter la science hors des laboratoires, dans les salles de cours.

Des encyclopédies qui se croient scientifiques, nous accablent de « mises au point ». Le pauvre diable qui lirait successivement ces « mises au point » deviendrait inmanquablement fou. Au lieu d'un édifice, on construit une collection de baraques. De plan d'ensemble, n'en cherchez pas. La mise au point, qui est précisément le rôle d'un professeur, est impossible dans des fragments sans lien.

METTRE UNE QUESTION AU POINT, C'EST NON PAS EN COMPOSER UNE MONOGRAPHIE, MAIS LA SITUER DANS UN ENSEMBLE.

*
* *

Une des raisons du dédain qu'on affiche pour le professeur, est l'idée qu'un cours est une œuvre éphémère que cinq ans démodent. A la vérité, quand un livre est décrépit dès avant sa naissance, seules l'actualité, la pénurie, la flatterie, lui insufflent une vie factice ; mais un livre honnête survit à presque tous les mémoires contemporains. Qui s'occupe aujourd'hui de ces tombereaux d'opuscules auxquels la découverte de Hertz prêta quelques mois d'existence ? Qui s'occupe des mémoires écrits vers 1850, une douzaine exceptés ? Pourtant les œuvres de Verdet, de Billet, la Physique de Daguin sont encore amusantes et instructives, ... sans parler des Cours plus anciens de Biot et de Pouillet.

Il est faux que, précisément à notre époque, les cours perdent vite leur intérêt. Qu'apprenons-nous donc à nos élèves qui ne soit pas connu depuis cinquante ans ? En vérité, les traités qui disparaissent comme les feuilles, sont tous copiés les uns sur les autres. Un professeur autographie le cours dont il est chargé dans un institut. Prenant à droite et à gauche, il agglomère un ensemble ni bon ni mauvais, mais qu'il devrait avoir la pudeur de tenir à l'ombre. Il ne résiste pas au plaisir de faire gémir les presses. Quoi d'étonnant quand une œuvre bâtie dans ces conditions ne résiste pas à quelques semestres ? Qu'en conclure pour des ouvrages de longue haleine, consciencieusement médités et qui sont l'expression d'une philosophie ?

La science se transforme, disent les ignorants. Plus exactement, la science grandit en surface ; elle est même actuellement assez étendue pour que nous ne puissions guère enseigner que les phénomènes fondamentaux qui sont sûrs, qui ne bougeront plus, qui représentent un gain définitif, sur lesquels la mode n'a plus de prise. Les méthodes d'exposition des questions isolées sont quasi fixées ; pour composer une œuvre originale, une vue originale de l'ensemble est nécessaire.

*
* *

Pour qu'un traité de Physique soit sûr de vivre, que faut-il donc ? Oh ! peu de choses et beaucoup. Que l'auteur ait une doctrine, une philosophie de la science, une philosophie de l'éducation scientifique.

J'ai l'ambition de donner à mon lecteur autre chose que des « renseignements ». Certes, je n'invente pas la science que j'enseigne ; mais il est impossible que je n'en modifie pas l'aspect par ma façon de l'enseigner. Qu'il le veuille ou non, j'impose partiellement au lecteur ma tournure d'esprit et mes convictions. Un livre de science n'est viable, indépendamment de la compétence de son auteur, que s'il se place d'un point de vue pas trop banal. Il est alors sûr de conserver pour clientèle tous ceux à qui plaît ce point de vue. Il

acquiert une existence individuelle du fait seul qu'il obéit à une doctrine.

Avoir une doctrine n'est pas si fréquent : combien de gens font des livres comme ils tourneraient des pieds de chaise !

J'attribue la plus grande part du succès de ma Physique à ce que le lecteur sait exactement ce qu'il trouvera chez moi : *tous les paragraphes sont signés*. Je sais ce que je veux, je dis où je vais. Il n'y a pas d'imprévu ; c'est un parti pris que je permets de trouver abominable. Mais, dès qu'on en a goûté, on peut réclamer le parti pris opposé : je doute qu'on s'accommode d'ouvrages invertébrés et de positions vagues ; je doute qu'on supporte des livres uniquement écrits pour satisfaire un programme officiel.

J'ai longuement exposé mes partis pris vis-à-vis des principes et des expériences dans les préfaces de mon cours de Thermodynamique. Éluçidons quelques autres points.

*
* *

La pseudo-histoire de la science est une plaie de l'enseignement.

Pour constituer de soi-disant « lectures scientifiques », on débute par un portrait, on continue pieusement par une biographie, avec consultation de médecins déterminant si le génie du pontife provient d'une bosse ou d'un creux ; on termine par des extraits prouvant quelquefois ce qu'on ne cherchait pas établir : que le *de cujus* est un pauvre écrivain et un médiocre savant. Quand la méthode s'applique aux contemporains, elle provoque la nausée.

Certes, l'histoire de la Physique est profondément instructive ; mais son intérêt est d'un autre ordre. Soutenir qu'une notion nette des lois fondamentales implique la connaissance des tâtonnements, piétinements, retours en arrière, bonds en avant, écarts de la pensée humaine pendant deux siècles, prouve une parfaite ignorance.

Pour mieux traiter la question de l'histoire dans sa généralité, déblayons-en le petit côté : la bibliographie, c'est-à-dire, pour nous savants, l'histoire quasiment contemporaine.

Avant la Guerre, on croyait d'une exécration pédagogie le cortège des notes, références, citations, dans un livre destiné aux étudiants.

A la fin de ses ouvrages, Verdet rassemble des renseignements limités et bien choisis ; mais, ayant pleinement conscience du rôle d'un professeur, Verdet s'efforce de mettre en ordre les résultats acquis, de disposer harmonieusement les pierres de l'édifice. Le maître maçon ne s'enquiert pas des ouvriers qui ont taillé ces pierres : il essaye de réaliser le plan des architectes.

On oppose à cette méthode deux objections.

La première n'est guère reluisante.

« Ne citant personne, comment ferez-vous dans ce bas monde ce chemin symbolique qui de roc en roc, à la sueur du front, monte jusqu'à la gloire officielle... et viagère? Quelle occasion trouverez-vous de lancer les profitables éloges, au mépris de la justice et de l'histoire, le plus souvent? Vous avez entre les mains une puissance énorme : vous pouvez reculer pour les médiocres savants l'heure de l'oubli. Dans votre sottise, vous n'en profitez pas ; vous laissez à d'autres les bénéfices de procédés qu'on approuverait dans l'ignorance de l'histoire. Que vous sert de rétablir en passant qu'une notion est vieille d'un demi-siècle, quand vous pourriez aisément lui attribuer pour père un savant contemporain? Mais vous poussez l'aberration jusqu'à citer quand vous trouvez un travail mauvais! Certes, vous arguez que la notoriété de l'auteur peut induire l'étudiant dans une erreur préjudiciable : ce sont là des arguments d'honnête homme, mais de sot. »

Mentor, vous avez raison! Excusez-moi de tenir à ma propre estime plus qu'à des distinctions et honneurs qui amusent un béjaune, mais qui devraient toujours avoir perdu leur prix à mon âge.

La seconde objection est dessus de pendule et sentimentale à souhait. On pleure sur la malheureuse destinée du savant dont rien ne subsiste, pas même le nom, dont le travail se fond dans un ensemble anonyme, qui disparaît comme individu, après qu'il a consciencieusement bêché son petit carré bien propre,... tandis que Mac-Adam, Riflard, Gibus et *tutti quanti* sont célèbres à tout jamais.

Ne vous frappez pas : de cette gloire ils ne profitent guère. Au reste, sont peu dignes d'intérêt ceux qui ne trouvent pas dans le travail la récompense du travail même,... exception faite pour les salaires, car il faut vivre.

*
* *

La méthode des citations présente d'insurmontables difficultés.

Si, vulgaire compilateur, vous êtes incapable de repenser les questions que vous exposez, pêchez à la ligne ; à moins que, professeur dans une école à forte clientèle, vous n'ayez le moyen d'imposer la vente de vos œuvres : il ne s'agit plus que de commerce.

Si vous êtes capable de repenser les questions, vous ne pouvez pas ne pas les transformer. Alors les citations vous jugulent.

Citer un homme, c'est en quelque sorte s'engager à reproduire ses idées : c'est un boulet qu'on traîne. Que vous importe d'où sort un ensemble de résultats, pourvu qu'il se tienne! Posons que rien ne m'appartient dans mes livres, sinon l'arrangement (j'imagine que personne ne m'accusera de plagiat), et qu'on me tienne quitte de mettre de l'érudition à bon compte au bas des pages.

Mes pages ne sont pas remplies à coups de ciseaux.

Mais l'honnêteté? Vous devez à X, Y, Z,... et vous ne le dites pas!

Il y a beau temps, mon cher monsieur, que dans un débat, mettons douloureux pour vous plaire (si les Comptes Rendus ne renfermaient pas ces pages intéressantes, on aurait tort d'en continuer la publication), Pouillet a formulé contre Péclet le droit en ces matières. Les faits appartiennent à tous, la manière de les exposer appartient à qui la découvre. Soyez sûr, mon cher monsieur, que si j'emprunte une forme de raisonnement personnelle et non tombée dans le domaine public, j'ai le soin de citer. Mais prenez garde que je vous montre dans un mémoire vieux d'un demi-siècle, signé d'un inconnu, ce que vous croyez l'œuvre d'un chamarré contemporain.

Au surplus, voici le texte de Pouillet : « Son erreur (celle de Péclet) résulte d'une étrange confusion : il confond les mémoires imprimés dans les collections académiques et les traités spéciaux. Il paraît n'avoir pas senti qu'un traité spécial n'est pas, à l'égard du droit de l'auteur, comme un travail imprimé dans nos mémoires ou dans les *Savants étrangers*. C'est pour cela qu'il puise avec la même liberté dans les uns et dans les autres. »

Que le lecteur ne s'y trompe pas : je cite Pouillet pour montrer à quel point un savant, qui n'était pas méprisable, tenait à honneur d'avoir composé de belles leçons et ne souffrait pas qu'on les transcrivît. Péclet avait raison de dire que les faits de la science appartiennent à tout le monde ; il avait tort de croire que la manière de les ordonner soit tellement indifférente, qu'on puisse transporter dans un ouvrage signé de soi le fruit des méditations d'un autre.

Ce sont là questions pleines d'intérêt auxquelles on peut consacrer sans inconvénient quelques secondes d'attention.

*
* *

La méthode des citations présente l'inconvénient capital de donner au texte dix fois la longueur raisonnable.

Aujourd'hui la moindre idée est exploitée ; le nombre des mémoires grossit démesurément ; vous pouvez écrire un livre énorme rien qu'en mettant bout à bout les brevets sur la question la plus spéciale.

Vous astreignant à citer, vous répétez vingt fois la même chose.

Qu'il s'agisse de technique, qu'il s'agisse de science pure, on répète par ignorance, on répète pour réfuter, on répète pour louer : le nombre des idées originales se réduit à peu de chose.

Le professeur a justement pour fonction de recueillir pieusement ce résidu d'idées dans le fatras des mémoires.

On ne saurait croire combien de théories, de dispositifs donnés comme modernes se retrouvent dans les vieux livres. De tout ce qu'on publie, le déchet est effrayant.

*
* *

Autre rengaine : je n'aide pas les « chercheurs ».

Interrogeons la statistique. Parmi nos milliers d'étudiants, combien deviendront des savants de laboratoire ? Parmi ces « savants », combien comptez-vous de « chercheurs » ?

Enfin, croyez-vous que, pour ces « chercheurs » eux-mêmes, il soit inutile de « savoir la Physique », de connaître la suite des raisonnements et d'avoir une vue d'ensemble des résultats acquis ? La faiblesse actuelle des professeurs tient à ce qu'on fabrique des « chercheurs » avant d'obtenir de « bons élèves ». Ils ne sont pas plutôt bacheliers, qu'on les déguise en Newtons au petit pied et en Fresnels au rabais ; heureusement les braves garçons ne soupçonnent pas leur ridicule. Encore sont-ils nés coiffés quand on ne les camoufle pas en « philosophes scientifiques », quand ils ne pérorent pas sur la philosophie des sciences avant d'énoncer correctement la loi de Mariotte !

J'aide plus efficacement les « chercheurs » en leur fournissant un plan général, qu'en leur vendant un catalogue : tant de mes confrères s'occupent à cela, que je n'éprouve pas le besoin de faire la queue.

Du reste, pourquoi la Société de Physique ne nous fournit-elle pas une bonne bibliographie en un volume ? Il n'est pas nécessaire d'y mettre quelque critique ; on peut se contenter de copier les titres des mémoires. Ce labeur facile évitera les redites et enlèvera toute excuse aux futurs rédacteurs de traités classiques.

*
* *

On imprime actuellement la traduction d'un traité de Physique signé d'un professeur russe, Chwolson. Ce traité prend exactement le contrepied de tout ce que je crois bien. Pour une raison que j'ignore (le poids du papier qui est à peu près le même ?), on associe souvent nos deux ouvrages : *les grands traités de MM. Bouasse et Chwolson*... Si l'on croit me faire plaisir, on se trompe. Je n'empêche personne de trouver l'ouvrage russe admirable, à la condition expresse que simultanément on trouve exécration celui que j'écris. Je n'admets pas qu'on loue simultanément et qu'on associe deux œuvres aussi radicalement contradictoires : il faut que les physiciens prennent position dans le débat pédagogique actuel.

En particulier, Chwolson cite des noms et des mémoires, en veux-tu en voilà. Je vais montrer par un exemple ce que vaut cette érudition en apparence extraordinaire.

J'ouvre *au hasard* : je prétends, en effet, trouver dans cet ouvrage cinq cents exemples aussi nets.

Page 559 du tome IV, il est parlé des anneaux de Nobili. Ce sont des colorations obtenues sur une plaque de métal servant de fond

horizontal à une auge électrolytique. On trouvera la description et la théorie du phénomène au § 123 de ce présent volume. Je cite :

« La production des anneaux de *Nobili* ou des figures de *Guébbard* s'explique complètement par la théorie de la propagation du courant dans une plaque.

« L'épaisseur de la couche déposée dans l'électrolyse est en un point proportionnelle à la densité du courant en ce point, et la couleur dépend de cette épaisseur. Les figures obtenues correspondent donc aux courbes d'intersection de la surface de la plaque avec les surfaces d'égale densité du courant. L'équation de ces dernières est évidemment $\partial V : \partial N = 0$. [N est la normale à la surface $V = \text{Constante}$; voir page 557].

« *Voigt, Weber, Heine, Ditscheiner, Riemann* et d'autres encore ont donné une théorie complète de la production des anneaux de *Nobili* et des figures de *Guébbard*. *Delvalez* en a fait de nouveau l'étude. »

Voilà donc huit noms cités. Quelle merveilleuse érudition !

Mais regardons les choses de plus près. Outre que ce résumé de théorie est parfaitement incompréhensible, le lecteur ne peut soupçonner après sa lecture que deux théories contradictoires sont en présence. De sorte que, s'il ouvre le mémoire de *Guébbard*, il ne trouvera pas le moindre rapport entre les idées théoriques de cet auteur et le résumé de *Chwolson*. Il est vrai que, s'il ouvre le mémoire de *Voigt*, il se convaincra bientôt que *Chwolson* a passé l'essentiel sous silence ; la proposition finale : « L'équation de ces... » est grossièrement erronée.

Dans ces conditions, à quoi bon citer huit noms et donner à croire qu'on a lu huit mémoires au moins ? Quelle singulière pédagogie ! quelle étrange érudition !

*
* *

En définitive, un traité de Physique doit être l'élaboration suivant un plan personnel des résultats acquis. Les matériaux sont fournis par les mémoires ; il s'agit d'en tirer le petit nombre d'idées qui gisent sous un fatras devenu sans intérêt, et de les mettre en bon ordre.

Ne voyez pas dans cette phrase le dédain du travail minutieux ; je constate simplement que des expériences utiles au début sont rendues inutiles par leur valeur même. Que m'importent les expériences de *Pouillet* aujourd'hui, puisque personne ne doute de la loi d'*Ohm* ! Au surplus, je puis contrôler les conséquences lointaines de cette loi avec une précision que *Pouillet* ne soupçonnait pas.

Nous voici ramenés au rôle pédagogique général de l'histoire des sciences, dont nous venons d'étudier l'aspect contemporain.

Ce qu'on a dit de sottises là-dessus est prodigieux ; leur réfutation tient en quelques lignes.

D'abord il n'est possible de comprendre l'histoire de la science qu'à la lumière des connaissances actuelles ; commencez donc par les acquérir. Ensuite l'histoire de la science n'est intéressante que développée ; elle tient beaucoup plus de place que l'exposé de la science actuelle ; conséquemment, ne me demandez pas d'en faire ni l'introduction ni l'appendice d'un traité classique.

Tout ce que j'ajouterais à ces deux propositions ne pourrait que les affaiblir. Je conseille gentiment ceux qui professent les doctrines contraires, de se procurer les quatre volumes *in-folio* de Montucla qui sont là sur ma table : c'est une œuvre justement célèbre. Parions que, n'y comprenant rien, dès la moitié du premier volume, ils se déclareront de mon avis.

Je leur confie volontiers que, jeune professeur au lycée d'Agen, j'ai consacré une année entière à l'étude de la science du *xvii^e* et du *xviii^e* siècles. Je n'y avais aucun mérite : la bibliothèque de la ville ne contenait pas de livre scientifique postérieur à 1800, les œuvres de Cauchy exceptées. Je faisais contre fortune bon cœur ; j'y gagne de parler de l'histoire de la Physique en connaissance de cause. Toutefois, qu'ils considèrent que j'étais agrégé de physique et avais passé trois ans au Collège de France comme préparateur. Je ne leur demande que cet apprentissage, pas davantage.

*
* *

Les faits me sont connus. Après de longues années d'étude, l'envie me prend d'écrire, par exemple, un traité de Magnétisme et d'Électricité. Pour les raisons susdites, je ne m'embarrasserai ni de bibliographie, ni d'histoire proprement dite. Le lecteur ne me demande qu'une chose : lui apprendre le Magnétisme et l'Électricité avec la moindre fatigue.

Le problème fondamental se pose à moi : comment distribuer les matériaux ?

La réponse est simple : EN SÉRIES.

Mais quelles sont les meilleures séries ?

Il y a d'abord les séries ordinairement admises ; il y a le contre-pied de ces séries. Je ne dois me déterminer ni par routine ni par désir de me singulariser ; si je suis original, c'est malgré moi.

Je tâcherai donc de me décider par de bonnes raisons.

Le choix des séries est subordonné à la condition de n'introduire les idées que (le plus possible) les unes après les autres, au fur et à mesure des besoins, de manière que le lecteur se familiarise successivement avec elles sans risquer de les confondre. Il est encore subordonné à la facilité plus ou moins grande de se représenter matériellement les théories et de les illustrer par des expériences.

Qu'il s'agisse d'Électricité statique ou de Magnétisme, on rencontre

exactement les mêmes équations ; les forces sont en raison inverse du carré des distances ; la théorie des diélectriques est identique à celle des corps aimantés. Il semble donc absolument équivalent de commencer par l'Électricité statique ou par le Magnétisme.

C'est une erreur absolue.

En effet, dans aucune application, vous entendez bien, aucune, n'intervient le champ électrique.

Pourquoi donc en parler d'abord ?

Afin d'éviter toute contestation à ce sujet, le second volume de ce *Cours de Magnétisme et d'Électricité* est consacré aux applications, le troisième au champ électrique. Le lecteur vérifiera que l'expression *champ électrique* n'est pas imprimée une seule fois dans le millier de pages que renferment les deux premiers volumes.

Logiquement parlant, le problème est donc résolu. Il l'est dans le même sens quand nous comparons le nombre et la facilité des expériences d'Électricité statique et de Magnétisme. Ai-je besoin d'insister sur les avantages pédagogiques qu'offrent les spectres magnétiques pour concrétiser les lignes de force, illustrer les raisonnements ?

Quant à l'argument que, les électricités étant séparables, les hypothèses sont plus exactement satisfaites en Électricité statique qu'en Magnétisme, souffrez que je le trouve insoutenable. Si vous ne partagez pas mon opinion, quelques séances de méditation sur le rôle des principes et la nature des théories vous sont encore nécessaires.

Vous savez qu'on a maintenu la peau de chat en tête des programmes secondaires ; sans grande conviction, il est vrai, puisqu'une note permet aux professeurs de changer l'ordre officiel.

*
* *

Le lecteur s'étonne peut-être que j'attache tant d'importance à l'ordre des questions. J'ai de bonnes raisons.

Le professeur qui prépare sa leçon s'inquiète, en général, fort peu de la suite du cours. J'ose même dire que nos professeurs établissent ordinairement leur plan au jour le jour, *sans se préoccuper de la suite* : la suite vient comme elle peut ; le cerveau de l'élève se déforme comme il veut.

Or la science n'a d'intérêt que par son bloc. Nos explications étant purement verbales (en ce sens que nous sommes capables seulement d'énoncer, sous le nom de principes, une proposition qui contient un grand nombre de faits), la science du particulier devient une pure définition de mot. On ne peut concevoir le rôle de l'explication physique que sur des ensembles.

Suivant que vous commencez l'exposition par tel ou tel bout, le système des explications se transforme complètement. Ce qui était *fait d'expérience* devient *définition de mot* ; inversement, ce qui était

incontestable comme *définition de mot* devient à démontrer comme *fait d'expérience*. Nos philosophes sont peu familiers avec ces notions, pour nous élémentaires; elles ne sont ni dans Aristote ni dans Lachelier. Qu'ils apprennent que, suivant les cas, les mêmes propositions intervertissent leurs ordres de préséance; par suite, que leur certitude (apparente) change de nature. Ils voudront bien se rappeler que l'explication en physique est la comparaison des faits avec les échelons d'un sorite développé d'une manière indépendante.

Je commence l'Électricité par la peau de chat. La quantité d'électricité est alors définie par les attractions et les répulsions. Il faut que je démontre que l'électricité se conserve. Les unités imposées sont *électrostatiques*. L'énergie électrique se présente comme potentielle. Plus tard, pour faire le pont, il faudra que je prouve que le courant transporte de l'électricité et proportionnellement à son intensité. Bref, tout un monument logique est implicitement construit du fait que j'inscris en tête *Électricité statique*.

Je commence par le Magnétisme et les effets magnétiques du courant. Le monument logique est retourné de fond en comble : les unités imposées sont *électromagnétiques*; le courant est rattaché aux attractions et répulsions par les condensateurs, etc.

En somme, autorisant les professeurs à commencer leur cours comme ils le veulent, on leur permet d'enseigner deux sciences quasi différentes.

Mais la liberté?

Mes collègues des lycées sont dévoués, consciencieux; ils ont toutes les vertus. Mais il résulte des rapports officiels que l'agrégation de physique est descendue très bas. Ne les contraignez donc pas à l'effort considérable de mener à bien, grâce à leurs propres moyens, la construction d'un édifice logique aussi complexe.

D'autre part, vous oubliez les élèves. Or les élèves se soucient de votre peau de chat comme de leur première culotte. S'ils sont intelligents, ils n'avalent pas qu'il soit indispensable de frotter de la résine pour savoir comment fonctionne un télégraphe; ils ne comprendront pas pourquoi, les unités de vos programmes étant électromagnétiques, vous commencez par user implicitement d'unités électrostatiques. S'ils sont intelligents, ils perdront toute confiance, ... et ce sera justice.

La liberté des commissions et des professeurs s'arrête devant l'intérêt de l'élève. Un enseignement public, centralisé comme celui de la France, ne vaut que par ses traditions. De temps en temps il faut avoir le courage de les reviser et, quand besoin est, d'imposer un nouvel ordre meilleur, plus conforme aux nécessités actuelles. Une nouvelle tradition se crée rapidement; elle sert de béquilles à ceux de nos professeurs qui en ont besoin : ils sont nombreux, s'il faut en juger par les copies du bachot.

Dans l'espèce, le seul argument que les professeurs secondaires opposent à l'ordre rationnel, est l'exemple de l'enseignement supérieur qui commence d'habitude par l'Électricité statique. Je leur enlève ce bel argument. Je suis curieux de savoir quel ouvrage ils m'opposeront, plus clair, plus naturel, allant plus loin dans les applications (voir le second volume). Pourtant je ne parle pas d'Électricité statique ; j'emploie la bonne méthode : pour démontrer le mouvement possible, je marche.

*
* *

La nécessité d'un ordre rigoureux ne s'impose pas au professeur *qui parle* ; elle devient évidente pour celui *qui écrit*. Le lecteur a sous les yeux le commencement et la fin, il suit le raisonnement ; pas moyen de tricher. Vous pouvez enseigner un cours écrit ; quand vous le rédigez, un cours oral ne tient généralement plus debout.

Souvent un étudiant me demande pourquoi je ne traite pas telle question de telle manière qui lui paraît plus simple : Je le prie de regarder cent pages plus loin : pour avoir en cet endroit une base suffisamment large, il faut abandonner en cet autre un système d'exposition plus rapide.

Là-dessus je pousse le scrupule très loin. Le laisser aller intellectuel m'irrite à un degré que je ne saurais dire. Au fond des méthodes « concrètes » que certains vantent, gît une admirable ignorance. Ou la science est une collection de faits sans liens, comme la cuisine ; alors ne lui prêtez pas de valeur éducative. Ou la science est une école de raisonnement et de jugement ; alors vous n'échappez pas à mon désir de bonne tenue logique.

*
* *

Notre choix de « séries » est fait. Sous quelle forme présenter l'explication des phénomènes ?

Deux méthodes s'offrent à nous : les théories abstraites, les modèles mécaniques.

En principe, je suis pour les théories abstraites, n'ayant guère rencontré parmi les Français prônant les modèles mécaniques que des esprits faux. Je veux bien avoir eu de la malchance ; j'admets que d'autres peuples, dont le cerveau est autrement constitué, en tirent de grands avantages ; mais je défie bien qu'on me cite un Français qui soit redevable aux modèles mécaniques d'une découverte de quelque importance. Du reste, la question est traitée avec le développement nécessaire dans l'admirable *Théorie physique* de M. Duhem, dont je conseille la méditation à messieurs les philosophes ; les arguments pour et contre sont tous discutés, ce qui me permet d'être bref.

A la vérité, je ne suis pas exclusif. Si par hasard on est mieux compris à l'aide d'un modèle mécanique, je serais désolé de le déconseiller. Pas plus, du reste, que M. Duhem, je ne suis le sectaire d'une méthode; mais, comme M. Duhem, je déteste le bafouillage. Et l'expérience montre que rien n'est aussi près du bafouillage que l'emploi des modèles mécaniques.

En somme, le modèle mécanique est un cas particulier de l'analogie, qui est une méthode d'enseignement dangereuse, conduisant ordinairement aux idées les plus fausses.

Certes, les mêmes équations générales avec la même indétermination mécanique se retrouvant dans la conductibilité électrique, la conductibilité calorifique, la diffusion, etc., il est légitime, il est nécessaire de rapprocher ces théories, qui, en définitive, n'en font qu'une. Certes, on ne recommencera pas à démontrer, pour l'Électricité statique, les théorèmes du Magnétisme. Certes, les diélectriques et les corps aimantés sont à placer dans le même paquet. Il s'agit, dans ces exemples, non d'analogies, mais de représentations abstraites identiques.

Au contraire, je trouve stupide de fourrer en vrac, *sous prétexte d'énergie rayonnante*, la lumière et le son. Je trouve inepte de rapprocher les tuyaux et les cordes vibrantes, bien que les équations indéfinies de propagation soient les mêmes. On habitue l'étudiant à tout mêler; il finit par se plaire dans le gâchis grandiloquent, dans le galimatias oratoire, d'autant plus funestes qu'ils se décorent d'un aspect de généralisation hardie. J'appelle ça « les grrrandes idées », et je les trouve souverainement grotesques. C'est le triomphe de la science pour littérateurs; c'est aussi le triomphe des jeunes filles qui encombre nos Facultés de leur caquetage de perruches; c'est le développement obligé pour articles pseudo-scientifiques dans les revues jaunes, saumon, orange... La *Revue des Deux-Mondes* nous apprenait récemment que Carnot a découvert l'entropie : après cela, je ne vois nul inconvénient à confondre la lumière et le son.

*
* *

Il y a vingt ans, on remplissait les livres d'enseignement de tableaux de nombres. On poussait le scrupule jusqu'à donner côte à côte les résultats les plus discordants. Pour montrer une facile érudition, on se privait du souci de toute critique. Effaré, l'étudiant oscillait entre une admiration béate pour tant de décimales et l'étonnement que les sept ou huit dernières ne concordassent pas. Irrespectueux, il amenait la concordance en les supprimant : excellente méthode pour fixer l'approximation des résultats, ... à la condition de ne pas affirmer l'exactitude de ce qui reste!

Pourtant, s'il a faim de constantes, l'étudiant, pour trente sous,

en trouve à satiété dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes, qu'il est fort inutile de réimprimer dans les Cours de Physique, et qu'on s'occupe de débarrasser des invraisemblables renseignements qu'il contenait jusqu'aujourd'hui. A l'usage des physiciens, on pourrait en donner une édition dépouillée de sa partie astronomique et rendue meilleur marché.

Les constantes qu'il faut maintenir dans un cours sont celles qui *fixent les idées*, expression magnifique que, directeur d'un séminaire scientifique, j'imposerais à méditer trois matins par semaine.

Mais les « chercheurs » ?

Souffrez que je ne m'occupe pas des « chercheurs », puisque la collaboration d'une centaine des plus authentiques vient d'aboutir à l'extraordinaire compilation qu'a récemment publiée la Société de Physique.

Il fallait un monument de l'état d'âme de la science française en 1913; nous l'avons : c'est à pleurer !

Je fixe un point de doctrine par un exemple.

Il s'agit de la gamme. Le savart est la limite de ce qu'un musicien peut reconnaître : il vaut un cinquantième de ton, un cinquantième de comma. Les gras ophicléides ou les pianistes chevelus qui vous disent le contraire, n'ont aucune idée de ce qu'est un savart. Pour des raisons de construction évidentes, les instruments, *quels qu'ils soient*, sont faux à plus d'un savart près, à toute température sauf une, pour vous faire plaisir.

Il est donc parfaitement absurde de traîner les fractions de savart qui n'interviennent jamais que sur le papier.

Consultez maintenant le tableau n° 164 de l'œuvre de la Société de Physique. Vous y lisez que le ton majeur $9 : 8$ vaut (ni plus ni moins) 51,1525224 savarts. Ainsi le dix millionième de savart est conservé. On nous apprend que le rapport $75 : 64$ vaut 68,881 savarts ! Sachez que c'est un ré dièze ! Mais l'écart de l'ut au mi bémol, QUE TOUS LES INSTRUMENTS CONFONDENT AVEC LE RÉ DIÈZE, vaut 79,181 savarts (suivant la règle d'Aristoxène, ne l'oubliez pas). Ainsi l'auteur est incapable du raisonnement suivant : *si deux notes TOUJOURS CONFONDUES peuvent théoriquement différer de 10,300 savarts, il est pratiquement inutile de conserver dans la théorie des gammes les fractions de savarts.*

La plupart des tableaux du volume publié à grand orchestre par la Société de Physique sont de cette force, œuvres de bons élèves consciencieux, heureux de montrer qu'ils connaissent à fond leur petit casier, mais fort éloignés de tout ce qui ressemble à une compréhension intelligente de la Physique.

Évidemment l'auteur du tableau n° 164 sera fort surpris que je n'approuve pas son travail, qui du reste n'aurait aucune importance s'il ne risquait de créer des imitateurs.

Comment veut-on que le professeur de collège conserve des idées saines, quand il voit des méthodes aussi baroques quasi recommandées par la Société de Physique? Comment la Société de Physique peut-elle s'associer à de pareilles méthodes?

A ceux qui trouvent que je ne suis guère aimable, je réponds qu'il serait bien inconséquent de ma part d'user ma vie à soutenir le bon sens, si j'approuvais que l'Institut donnât l'exemple contraire. De quel poids seraient mes conseils, si je m'inclinais béatement devant ses arrêts? De quel droit exiger de moi une renonciation qui impliquerait le désaveu de l'ensemble de mes efforts?

Je ne demande cependant pas à la Société de Physique de corriger ses tableaux. D'abord ce serait le volume à réimprimer, ensuite j'ai besoin d'exemples de ce qu'il faut éviter.

Jusque dans le détail, la Société de Physique est d'un avis contraire au mien. Le rédacteur du tableau n° 164 écrit à une ligne : 305,859375; à la ligne suivante 313,2. Il ignore probablement que le nombre des chiffres écrits indique l'approximation sur laquelle on compte. J'aurais écrit 305,8 et 313,2, ou encore 305,859375 et 313,200000. Mais je ne suis qu'un petit professeur de Faculté de province : il faut que je sois intelligent, si je ne veux pas qu'on m'attrape.

*
* *

Voilà quelques-unes des questions qu'il me paraissait bon d'éluider.

On me traite d'intolérant parce qu'appliquant une méthode, je déclare mauvaises les méthodes contradictoires. Ces reproches me viennent de gens qui ont la prétention de diriger le mouvement de réforme pédagogique actuel; ils sont furieux que je ne me place pas sous leurs ordres. Je ne vois vraiment pas quel besoin j'ai d'un chef de file, étant encore *officiellement* seul de mon avis.

Parmi mes aînés, seul M. Duhem a pris la défense de mes livres, par deux fois, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*. Du coup l'on a jugé prudent de se taire, et les attaques que l'on me promettait se sont reconnues impuissantes devant une pareille autorité.

Quelques précisions sont ici nécessaires.

Sait-on que les premières tentatives de réforme de l'enseignement de l'École Polytechnique datent de 1840 et sont dues à Poncelet? Qu'on lise son très curieux rapport avant de se targuer d'articles de revues où l'on soutenait la nécessité d'Enseignement mathématique utilitaire ou de Mécanique expérimentale, *alors que simultanément on publiait des ouvrages dans un esprit diamétralement opposé!*

Je suis le premier en France qui ait tâché d'appuyer ses théories

pédagogiques par des livres d'enseignement supérieur, qui ne se soit pas contenté de donner le précepte, qui ait jugé de son devoir d'y joindre l'exemple.

Que, mes livres parus, ces mêmes pontifes, oubliant leurs propres écrits, affectent de découvrir chez d'autres, venus après moi, des tendances utilitaires ou expérimentales et les en louent pompeusement, c'est pouffant et ne trompe personne.

Tout en appliquant des doctrines opposées, ils comprennent si bien que j'ai pour moi les étudiants et l'avenir, qu'ils cherchent un mouvement tournant pour me couper la route.

Ils sont à ma remorque; mais ils n'attendent que l'instant favorable pour déclarer qu'ils me servent de guide et que je ne suis qu'un ingrat.

Ils commencent par vous traquer; mais, si vous réussissez, ils vous ont toujours devancé, conseillé, soutenu : ils ont tout fait... Le plus curieux est qu'ils finissent par se le persuader : ils sont étonnés que je ne les trouve pas magnifiques.

Je hais ces bons apôtres qui commencent par vous tirer dans les jambes et, dès que le succès s'affirme éclatant, s'amènent pour tirer la couverture.

*
* *

Je remercie M. l'abbé Carrière, professeur à l'Institut catholique de Toulouse, qui a bien voulu relire les épreuves de ce volume.

Le lecteur trouvera la table analytique des matières à la fin de la seconde partie qui forme avec la première un ensemble complet.

H. BOUASSE.

MAGNÉTISME ET ÉLECTRICITÉ

ÉTUDE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

CHAPITRE I

DES VECTEURS ET DE LEURS FLUX

Définitions vectorielles.

1. Opérations fondamentales sur les vecteurs.

En Physique, on rencontre principalement deux espèces de quantités : les *quantités scalaires*, définies par un nombre et généralement susceptibles de signe; les *quantités vectorielles ou dirigées*, représentées par un vecteur, c'est-à-dire par une droite donnée en grandeur et direction.

Les vecteurs sont de deux sortes :

les vecteurs *polaires*, dont le type est un déplacement, une vitesse, une force,... et dont la symétrie est celle du tronc du cône circulaire;

les vecteurs *axiaux*, dont le type est une rotation, une vitesse angulaire, un couple,... et dont la symétrie est celle du cylindre circulaire tournant uniformément autour de son axe.

Nous verrons que la force *électrique* est un vecteur *polaire*, que la force *magnétique* est un vecteur *axial*.

Nous ne reviendrons que très rapidement sur la composition et les propriétés fondamentales des vecteurs. La question est traitée avec le développement nécessaire dans le chapitre II de notre *Mécanique rationnelle et expérimentale* (Géométrie des vecteurs) et dans le chapitre XXII de notre *Cours de mathématiques générales*. Nous voulons seulement rappeler ici les propositions les plus usuelles, en nous plaçant au point de vue du *Calcul vectoriel*, dont on trouvera les éléments au chapitre XXIV de nos *Exercices et compléments de Mathématiques générales*.

Deux opérations fondamentales sont effectuées avec un vecteur défini en tout point d'une portion d'un espace, c'est-à-dire *dans un champ* :

1°. — *son intégration le long d'une courbe tracée dans le champ*, ce que nous appellerons son *travail* ou sa *circulation*;

2°. — *l'intégration de son flux à travers une surface tracée dans le champ*, ou plus simplement son *flux*.

Mais ces opérations rentrent dans des opérations plus simples auxquelles il est nécessaire de s'habituer. Dans ce qui suit, nous emploierons souvent comme équivalents les mots *vecteur* et *force*. Il est entendu que tout ce que nous dirons de la force s'applique à un vecteur quelconque; mais le lecteur suivra mieux les raisonnements sur le vecteur *force*, auquel il est particulièrement accoutumé.

2. Règle du bonhomme d'Ampère; règle du tire-bouchon.

Posons d'abord quelques conventions essentielles.

1°. — Il est souvent nécessaire de relier un sens de translation et un sens de rotation; on y parvient commodément à l'aide d'un tire-bouchon.

Tenons une bouteille verticalement, le goulot vers le haut.

Pour enfoncer le tire-bouchon dans le bouchon, nous devons tourner le manche dans le sens des aiguilles d'une montre qui serait posée sur le bouchon, les aiguilles en haut.

Évidemment, cette relation d'un déplacement *vers la pointe du tire-bouchon le long de celui-ci*, et d'une rotation dite *à droite*, tient à la construction *conventionnelle* du tire-bouchon *qui est une vis à droite* (de même que toutes les vis à bois utilisées en Europe et en Amérique).

Mais précisément parce que tous les tire-bouchons sont construits de même, cette convention est sans ambiguïté.

En définitive, *la translation suivant un axe et la rotation autour de cet axe sont conventionnellement de même signe, lorsque leurs directions correspondent aux mouvements de translation et de rotation d'une vis ordinaire*.

On dit que le *système est à droite*.

2°. — Il résulte de cette convention une disposition déterminée des axes formant le trièdre trirectangle de référence.

Nous considérons comme positives les translations suivant les x , les y , les z *croissants*.

D'autre part, nous considérons comme positive une rotation autour de Ox qui amène Oy sur Oz , une rotation autour de Oy qui amène Oz sur Ox , une rotation autour de Oz qui amène Ox sur Oy ; Ox , Oy , Oz , désignent les moitiés positives des axes de référence.

Nous sommes donc conduits à disposer les axes comme l'indique la figure 1.

Pour reconnaître les faces d'une surface, nous les affectons des signes $+$ et $-$. La direction positive sur la normale à la surface traverse censément la surface de la face $-$ à la face $+$.

Choisissons un sens de circulation sur le contour de la surface : les conventions suivantes, équivalentes, nous apprennent à relier ce sens aux signes des faces.

Un tire-bouchon qui pénètre dans la surface par la face négative, qui, par conséquent, avance dans le sens positif sur la normale, tourne dans le sens de circulation.

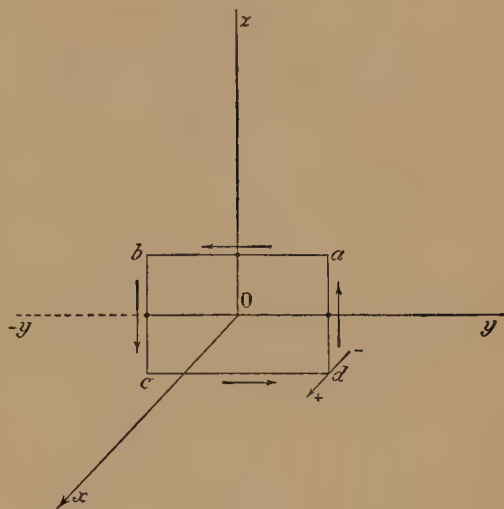


Fig. 1.

Le *bonhomme d'Ampère*, placé de manière qu'un mobile allant dans le sens de circulation entre par les pieds et sorte par la tête, et tenant entre ses mains la surface, a la face positive à sa gauche (fig. 2).

Il revient au même de dire que le bonhomme posé sur la face positive (face de sortie du tire-bouchon), voit le sens de circulation aller devant lui de sa droite à sa gauche (en sens inverse des aiguilles d'une montre qui repose sur la surface et dont la face est tournée vers lui). Le tire-bouchon lui entre par les pieds et lui sort par la tête.

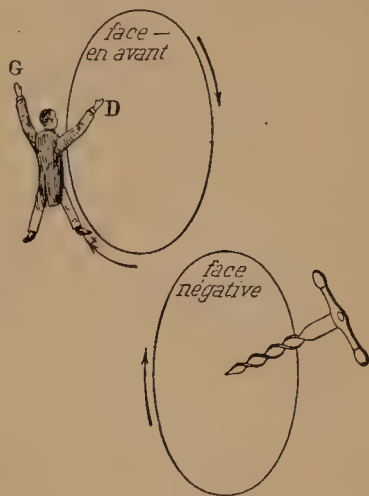


Fig. 2.

Ce ne sont là que des règles conventionnelles qui n'ont ni caractère de nécessité, ni bien entendu aucun rapport avec une loi physique. J'insiste malgré l'évidence, parce que nos braves bacheliers s'imaginent qu'*Ampère a découvert la loi du bonhomme*; elle n'est qu'une manière entre beaucoup d'autres d'exprimer le sens des phénomènes.

3. Produit vectoriel de deux vecteurs.

1°. — On donne deux vecteurs F_1 , F_2 . On appelle *produit vectoriel* de ces vecteurs, un vecteur F_3 normal à leur plan et dont le

module est égal au produit de leurs modules par le sinus de l'angle qu'ils font :

$$\text{mod. } F_3 = \text{mod. } F_1 \cdot \text{mod. } F_2 \cdot \sin (F_1, F_2).$$

Le module du vecteur F_3 est exprimé par le même nombre que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs F_1 et F_2 .

Le sens de F_3 est encore indéterminé. Nous le choisissons tel que la translation suivant F_3 corresponde à une rotation à *droite* autour de F_3 amenant F_1 sur F_2 ; l'angle de rotation doit être inférieur à π .

On désigne l'opération précédente par le symbole :

$$F_3 = F_1 \wedge F_2.$$

Il résulte des conventions qu'on a :

$$F_1 \wedge F_2 = -F_2 \wedge F_1.$$

L'opération n'est pas *commutative*; en *intervertissant les facteurs*, on change le signe du résultat (sens du vecteur F_3).

2°. — On trouve aisément (M. G., § 325) pour les composantes du vecteur F_3 :

$$\begin{aligned} X_3 &= Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \\ Y_3 &= Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \\ Z_3 &= X_1 Y_2 - Y_1 X_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Pour que le sens du vecteur F_3 soit convenable, il faut que les axes soient à *droite*, ainsi qu'il est expliqué au paragraphe précédent.

Si, par exemple, le vecteur F_1 est dirigé suivant Ox , si le vecteur F_2 est dans le plan xOy et fait un angle aigu avec le côté positif de l'axe des y , le vecteur F_3 est dirigé suivant Oz . On a, effet :

$$Y_1 = Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0; \quad Z_3 = X_1 Y_2.$$

Il est facile de retenir les formules (1) en remarquant que la permutation est circulaire tant pour les indices que pour les lettres $X, Y, Z, 3, 1, 2$. Dès que les deux premiers termes sont écrits, les autres s'en suivent sans ambiguïté.

3°. — Les formules (1) sont celles mêmes qui donnent le moment d'une force par rapport aux axes de coordonnées.

Soit $M(x, y, z)$ le point d'application; considérons le segment \overline{OM} comme un vecteur allant de l'origine O des coordonnées au point M . Soit F la force. On a :

$$\text{Moment} = \text{Vecteur } \overline{OM} \wedge \text{vecteur } F.$$

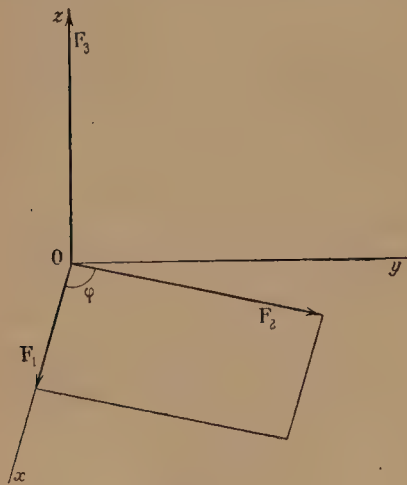


Fig. 3.

Les composantes du moment sont :

$$yZ - zY, \quad zX - xZ, \quad xY - yX.$$

4. Produit scalaire de deux vecteurs. Travail ou circulation d'un vecteur.

1°. — On donne deux vecteurs F_1, F_2 , de même origine.

On appelle *produit scalaire* le produit des modules par les cosinus de l'angle qu'ils font :

$$\mathfrak{C} = \text{mod } F_1 \cdot \text{mod } F_2 \cdot \cos(F_1, F_2).$$

Le résultat est un nombre, une quantité scalaire.

En notations vectorielles, l'opération est exprimée par le symbole :

$$\mathfrak{C} = F_1 \times F_2.$$

Elle est commutative; on a :

$$F_1 \times F_2 = F_2 \times F_1.$$

Quand l'un des vecteurs représente un déplacement, l'autre une force, le produit scalaire mesure le travail de la force pour le déplacement.

Soit un vecteur F appliqué au point M qui se déplace sur la courbe AB dans le sens AB . *Par définition*, le travail accompli par ce vecteur pour le déplacement MM' est en grandeur et en signe :

$$\overline{MM'} \cdot F \cdot \cos \alpha.$$

C'est l'élément de l'intégrale du vecteur le long de la courbe.

Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, le vecteur aide le déplacement : le travail est positif.

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, le vecteur gêne le déplacement : le travail est négatif.

Fixons la position du point M par sa distance s au point origine A , distance mesurée le long de la courbe AB . L'élément de travail est $F \cos \alpha \cdot ds$. Quand le point M se déplace de $B(s=s_0)$ en $D(s=s_1)$, le travail total accompli est :

$$\mathfrak{C} = \int_{s_0}^{s_1} F \cdot \cos \alpha \cdot ds.$$

C'est l'intégrale du vecteur le long de la courbe BD .

Nous pouvons aussi définir le vecteur par ses composantes, X, Y, Z , parallèlement à trois axes rectangulaires. Soient alors x, y, z , les coordonnées des points de la courbe; on peut écrire :

$$\mathfrak{C} = \int_A^B (X dx + Y dy + Z dz).$$

Pour que l'intégration soit possible, il faut généralement connaître

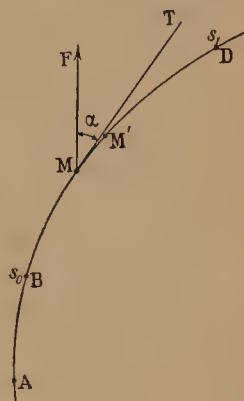


Fig. 4.

le vecteur en grandeur et direction, en chaque point de la courbe, par conséquent pour chaque valeur de s ; c'est dire qu'il faut connaître F et $\cos \alpha$, ou encore X, Y, Z , en fonction de s .

5. Potentiel.

La force admet un potentiel, si le travail accompli par elle, quand le point d'application M passe d'un point A de son champ à un point B , est indépendant de la trajectoire parcourue.

Désignons par \mathcal{E}_{AB} le travail accompli par la force, quand on passe de A à B . Par hypothèse, il ne dépend que de la position des points A et B . On a de plus par définition :

$$\mathcal{E}_{AB} = -\mathcal{E}_{BA}.$$

\mathcal{E}_{AB} doit s'exprimer à l'aide des coordonnées $x, y, z; x', y', z'$, des points A et B ; d'où :

$$\mathcal{E}_{AB} = \varphi(x, y, z; x', y', z') = \varphi(A, B).$$

Par une courbe quelconque, allons d'abord de A à B ; puis par deux autres courbes quelconques, allons de A à D , puis de D à B . Dans ces trois opérations les travaux sont $\mathcal{E}_{AB}, \mathcal{E}_{AD}, \mathcal{E}_{DB}$. Par hypothèse nous avons *identiquement* :

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E}_{AD} + \mathcal{E}_{DB}, \quad \varphi(A, B) = \varphi(A, D) + \varphi(D, B).$$

Cette relation étant satisfaite, quel que soit le point D , les coordonnées de ce point doivent disparaître; ce qui exige qu'on ait :

$$\varphi(A, B) = \varphi(A) - \varphi(B) = \varphi(x, y, z) - \varphi(x', y', z').$$

Cette fonction des coordonnées s'appelle *potentiel* et se désigne par la lettre V :

$$\mathcal{E}_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B) = V_A - V_B.$$

En définitive, *une force admet un potentiel si le travail effectué par elle, quand on passe d'un point A de son champ à un autre point B , s'exprime par la différence des valeurs que prend, en ces deux points, une certaine fonction des coordonnées qui est le potentiel* :

$$\mathcal{E}_{AB} = V_A - V_B.$$

On a bien : $\mathcal{E}_{AB} = -\mathcal{E}_{BA}$, puisque : $\mathcal{E}_{BA} = V_B - V_A$.

De même :

$$\mathcal{E}_{AD} = V_A - V_D = \mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BD} = (V_A - V_B) + (V_B - V_D).$$

Si la trajectoire est fermée, si l'on part d'un point A pour y revenir, le travail est nul :

$$\mathcal{E}_{AA} = V_A - V_A = 0.$$

Cette conclusion est cependant trop particulière, comme nous le verrons plus loin (§ 11).

Le potentiel n'est pas une quantité dirigée : en chaque point du champ, sa mesure est exprimée par un nombre : *c'est une quantité scalaire*, un *scalar*, comme disent les Anglais.

De la nature d'un travail, le potentiel s'exprime généralement en kilogrammètres ou en ergs, suivant le système d'unités choisi.

Nous poserons toujours le potentiel nul à très grande distance du point où nous sommes. Le potentiel mesure donc le travail qu'il faut dépenser pour amener le système sur lequel s'exercent les forces considérées, de l'infini à sa position actuelle ; ou encore le travail que les forces agissant sur le système sont capables de produire quand il va de sa position actuelle à l'infini :

$$\mathcal{C}_{A\infty} = V_A - V_\infty = V_A.$$

6. Gradient d'une quantité scalaire définie dans un espace.

1°. — Donnons le potentiel en tous points d'un espace, d'un *champ de force*. Nous définissons ainsi *un nombre fonction du point considéré*. Puisque à l'aide du potentiel nous pouvons calculer le travail pour tous les déplacements possibles, il est clair que nous pouvons déterminer la force en tous les points du champ. Nous sommes donc ramenés au problème fondamental : *déduire un vecteur de la connaissance d'une quantité scalaire donnée en tous les points d'un champ*. Le vecteur ainsi défini est (au sens près) *le gradient de la quantité scalaire* ; il est désigné par le symbole : $\pm \text{grad. } V$.

Nous pourrions raisonner *in abstracto* ; pour être plus clair, nous utilisons les mots *force* et *travail*.

2°. — SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES, GÉNÉRALEMENT SURFACES ÉQUINOMBRES.

Le potentiel (fonction du point considéré) variant d'une manière continue, relions par une surface les points où sa valeur est la même : nous définissons ainsi des surfaces *équipotentiell*es (généralement *surfaces équinomb*res). Deux surfaces de potentiels différents ne pouvant avoir des points communs, on peut donc considérer comme parallèles des surfaces équipotentielles voisines, c'est-à-dire correspondant à des cotes peu différentes.

Nous nous proposons de définir la force en tous les points du champ.

Elle est normale à la surface équipotentielle qui passe par son point d'application. Soient, en effet, deux points voisins A et B d'une surface équipotentielle ; on a :

$$\mathcal{C}_{AB} = V_A - V_B = 0.$$

Le travail étant nul, la force est normale à l'élément de trajectoire \overline{AB} .

Quand on décrit une courbe quelconque sans quitter une surface équipotentielle, le travail est *identiquement nul*.

Quand on passe d'un point quelconque A d'une surface équipotentielle à un autre point quelconque B de cette même surface, quelle que soit la trajectoire, le travail est nul; cela veut dire, non pas que tout le long de la trajectoire le travail est nul, mais que la somme des travaux positifs est égale à la somme des travaux négatifs.

3°. — GRADIENT.

Par un point A de la surface équipotentielle V, menons la normale. Soit Δn l'élément de normale compris entre les surfaces de potentiels V et $V + \Delta V$. La normale coupe la seconde surface en un point B. Soit F la grandeur de la force.

Nous avons par définition :

$$\mathcal{E}_{AB} = V_A - V_B = -\Delta V = F \cdot \Delta n; \quad F = -\frac{\Delta V}{\Delta n} = -\text{grad. } V.$$

Cette formule définit *conventionnellement* le vecteur *gradient* d'après la connaissance du potentiel en tous les points du champ. Comme conséquence de la convention que le travail est positif quand le potentiel décroît, *la force définie par le potentiel V est égale au gradient de ce potentiel changé de signe*. Le module du gradient est donc le taux de variation du potentiel, dans la direction où cette variation est maxima, c'est-à-dire normalement à la surface équipotentielle.

La direction du gradient est la normale à la surface équipotentielle qui passe par son point d'application.

Le sens du gradient est la direction des potentiels croissants.

La force est donc le vecteur dont le module est égal au gradient; elle est de même direction, mais de sens contraire.

7. Expression d'une composante de la force au moyen du potentiel.

Reprenons la même question en d'autres termes.

1°. — Soit S_1 et S_2 deux surfaces équipotentielles voisines dont les potentiels sont V et $V + \Delta V$. Considérons une trajectoire quelconque OAB; soit F' la composante de la force au point A suivant la direction AB. Soit enfin s et $s + \Delta s$ les distances (comptées sur OAB) des points A et B à une origine quelconque O.

On a par définition :

$$\mathcal{E}_{AB} = V_A - V_B = F' \cdot \Delta s = V - (V + \Delta V) = -\Delta V;$$

d'où :

$$F' = -\frac{\Delta V}{\Delta s}.$$

Voici l'interprétation de cette formule.

Allant du point A au point B, on constate une variation ΔV de

potentiel; si $\Delta V > 0$, la composante cherchée est dirigée suivant BA; si $\Delta V < 0$, elle est dirigée suivant AB.

Sa valeur absolue est donnée par le quotient $\Delta V : \Delta s$.

La force est par convention dirigée vers les potentiels décroissants.

Cette conclusion résulte d'une convention (§ 5); si, au lieu de poser :

$$\mathcal{C}_{AB} = V_A - V_B,$$

on avait posé :

$$\mathcal{C}_{AB} = V_B - V_A,$$

ce qui était aussi légitime, la conclusion serait inverse.

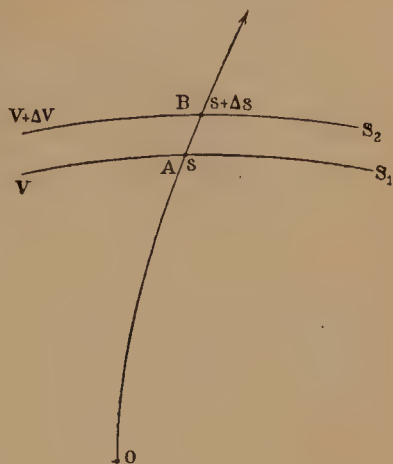


Fig. 5.

Quand on passe du point A de la surface S_1 à un point B variable de la surface S_2 , Δs est minimum si la trajectoire AB est normale aux surfaces; donc F' est maximum. Nous retombons sur le théorème précédemment démontré : la force au point A est normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point. Soit Δn la distance des deux surfaces au voisinage du point A : $-\frac{\Delta V}{\Delta n}$ est en grandeur et en signe l'expression de la force en ce point.

2°. — Traçons trois axes rectangulaires; il résulte immédiatement de la proposition générale, qu'en un point quelconque du champ de force, les composantes de la force parallèlement aux trois axes sont :

$$-\frac{\Delta V}{\Delta x}, \quad -\frac{\Delta V}{\Delta y}, \quad -\frac{\Delta V}{\Delta z}.$$

Dans ce qui précède, les déplacements sont petits, mais finis; nous calculons donc les composantes moyennes. Si V est donné analytiquement en fonction de x, y, z , l'expression générale de la composante vraie en un point A, suivant une trajectoire OAB, est :

$$-\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Les composantes parallèlement aux axes de coordonnées sont :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Jusqu'à présent les axes pourraient ne pas être rectangulaires. Introduisons cette hypothèse : la force F a pour expression :

$$F = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

Inversement, introduire une force admettant un potentiel, c'est donner les composantes X, Y, Z , de cette force comme les dérivées partielles par rapport à trois axes rectangulaires d'une fonction $V(x, y, z)$ des coordonnées.

3°. — CONDITIONS D'ÉQUILIBRE.

Par le point A de l'espace menons une courbe OAB quelconque. L'équilibre au point A , pour les déplacements suivant AB , exige

$$\text{qu'on ait : } F = - \frac{\partial V}{\partial s} = 0.$$

Autrement dit, la fonction V est, au point A , maxima ou minima par rapport aux variations suivant la courbe OAB .

Il résulte de nos conventions que l'équilibre est stable si V est minimum; l'équilibre est instable si V est maximum.

En effet, si V est minimum, le potentiel croît quand on va de A à B , ou quand on se déplace en sens contraire; dans les deux hypothèses, la force est opposée au déplacement. Inversement, la force aide dans les deux cas quand V est maximum.

L'équilibre peut exister au point A sur une courbe OAB sans exister sur d'autres courbes; il suffit pour cela que la courbe OAB soit tangente en A à une surface équipotentielle.

Si la force s'annule en A , l'équilibre existe pour toutes les courbes qui passent en ce point; mais il peut être stable pour une courbe, instable pour une autre.

Enfin, si V possède au point A un maximum (ou un minimum) *absolus*, l'équilibre est instable (ou stable) pour tous les déplacements à partir du point A .

De nombreux exemples illustreront ces propositions générales.

8. Lignes, surfaces et tubes de force. Champ uniforme.

1°. — LIGNES DE FORCE.

On appelle *ligne de force* une ligne toujours normale aux surfaces équipotentielles qu'elle traverse. *La force lui est tangente en chacun de ses points.* La ligne de force est donc la trajectoire d'un point assujetti à suivre constamment la direction de la force, par exemple d'un point qui, se mouvant dans un milieu visqueux, possède toujours une vitesse très petite.

Quand les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles, les faisceaux des trajectoires orthogonales (*lignes de force*) sont des droites parallèles : on dit que *le champ est uniforme*.

2°. — Une remarque est ici nécessaire.

Soit $V = \phi(z)$ le potentiel; la force est donc :

$$F = - \frac{d\phi}{dz},$$

elle est constante pour tous les points d'une surface équipotentielle, *variable d'une surface à une autre*. L'idée de champ uniforme n'implique donc généralement pas la constance *absolue* de la force.

Mais dans les cas que nous aurons à envisager, l'équation du faisceau des surfaces équipotentielles parallèles réalisables est ramenable à la forme :

$$\varphi = a + bz;$$

d'où : $F = -b,$

la force est de direction invariable et de grandeur constante.

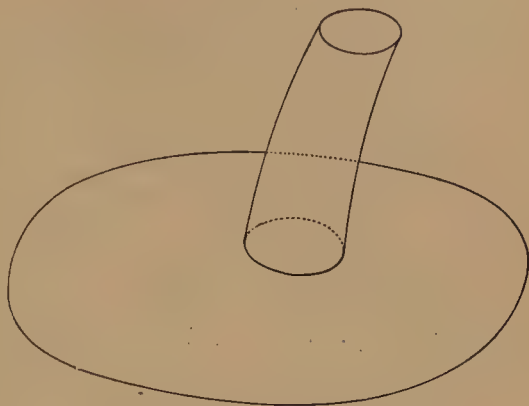


Fig. 6.

3°. — Si, en tous les points du champ, la force a une direction bien définie, les lignes de force ne peuvent pas se couper. Dans un petit espace au voisinage d'un point, elles forment donc à la limite un faisceau de droites parallèles; les surfaces équipotentielles peuvent être remplacées par un faisceau de plans parallèles.

Pratiquement, tout champ peut être considéré comme uniforme dans un espace assez petit.

Si les lignes de force se coupent (en dehors des masses agissantes), il faut que la force s'annule au point d'intersection : sa direction devient alors indéterminée.

4°. — SURFACES ET TUBES DE FORCE.

Par tous les points d'une courbe quelconque, menons les lignes de force. Nous obtenons une espèce de cylindre dont les génératrices courbes sont les lignes de force : on l'appelle *surface de force*. Si la courbe est fermée, la surface limite une portion du champ : c'est un *tube de force*.

9. Superposition de plusieurs champs de force.

Conformément au § 7, nous dirons qu'une force admet un potentiel dans un champ, quand ses composantes parallèlement aux axes sont définies en tous les points de ce champ comme les dérivées partielles (changées de signe) d'une fonction des coordonnées $V(x, y, z)$.

Soit plusieurs forces qui, agissant isolément, admettent un potentiel dans le même champ. Posons que leurs actions sont indépendantes les unes des autres, lorsqu'elles agissent simultanément.

Je dis que l'ensemble admet un potentiel dont on obtient la valeur en chaque point en additionnant les valeurs des potentiels des forces agissant isolément.

Cette proposition résulte de ce que les travaux s'additionnent algébriquement. Si, pour passer d'un point A à un point B, les travaux des divers systèmes de forces, agissant isolément, sont :

$$\mathcal{C}'_{AB} = V'_A - V'_B, \quad \mathcal{C}''_{AB} = V''_A - V''_B \dots;$$

quand ils agiront simultanément, ils effectueront un travail :

$$\mathcal{C}_{AB} = \mathcal{C}'_{AB} + \mathcal{C}''_{AB} + \dots$$

Tout se passe donc comme s'il existait au point A un potentiel :

$$V_A = V'_A + V''_A + \dots,$$

et au point B un potentiel :

$$V_B = V'_B + V''_B + \dots$$

De ce théorème fondamental résulte la grande simplification due à l'emploi des potentiels : ils s'ajoutent algébriquement, tandis que les forces se composent géométriquement.

10. Exemples de forces admettant un potentiel.

1°. — CHAMP UNIFORME.

Au voisinage d'un point à la surface de la Terre, la pesanteur admet un potentiel. Nous savons que le travail accompli quand on passe d'un point A à un point B ne dépend pas de la trajectoire. Les surfaces équipotentielles sont des plans horizontaux; aussi les appelle-t-on quelquefois *surfaces de niveau*, en souvenir du nom qu'elles portent dans le champ de la pesanteur. La force, normale aux surfaces équipotentielles, est verticale. Elle reste constante approximativement quand on se déplace suivant la verticale.

Prenons pour axe des z la verticale et comptons les z positivement vers le zénith : soit p le poids du corps; le potentiel a pour

expression :
$$V = pz, \quad F = -\frac{\partial V}{\partial z} = -p;$$

la pesanteur est dirigée verticalement vers le nadir.

Le champ est *uniforme* (§ 8).

2°. — FORCES CENTRALES PROPORTIONNELLES A UNE PUISSANCE DE LA DISTANCE.

Posons que la force qui s'exerce en tout point A du champ, passe par un point fixe O et que sa grandeur est proportionnelle à une certaine puissance n de la distance r à ce point. Les surfaces équipotentielles sont des sphères ayant le point O pour centre.

Le potentiel n'est fonction que de la distance r ; il a pour expression :

$$kr^{n+1}, \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

La force radiale est :

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = -(n+1)kr^n.$$

D'après le paragraphe 9, il existe encore un potentiel si les forces sont dues à l'attraction ou à la répulsion d'autant de centres qu'on voudra, agissant en raison d'une puissance quelconque de la distance et suivant la droite qui les joint au point agi (forces centrales).

En particulier, le champ de force admet un potentiel, si les centres en nombre quelconque agissent en raison inverse du carré de la distance.

Nous reviendrons longuement sur ce cas fondamental.

11. Cas où le potentiel peut prendre plusieurs valeurs discontinues au même point. Généralisation de la définition du potentiel.

Étudions un champ de force qui semble bizarre, mais dont l'importance est énorme, puisqu'il est réalisé approximativement au voisinage d'un courant quelconque, rigoureusement dans tout l'espace pour un courant rectiligne indéfini.

Par hypothèse, les surfaces équipotentiellles sont des demi-plans s'arrêtant à une droite indéfinie dont la trace sur un plan normal est en D. Les lignes de force, normales aux surfaces équipotentiellles (§ 8), sont des circonférences situées dans des plans normaux à la droite D, et ayant pour centre sur chacun des plans la trace de la droite D. Ce sont donc des courbes fermées.

Enfin prenons comme expression du potentiel l'équation : $V = k\alpha$, où α désigne l'angle du demi-plan S_1 considéré avec l'un d'eux P pris pour origine des azimuts.

La figure 7 représente une des lignes de force.

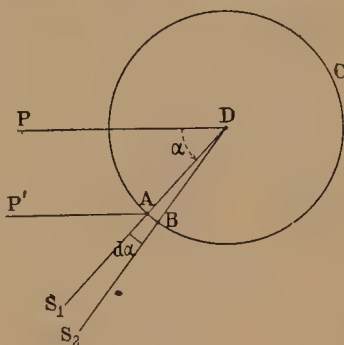


Fig. 7.

Cherchons quelle est la grandeur de la force sur la ligne de force ABC de rayon r . Nous avons généralement :

$$Fds = -dV.$$

$$\text{Or} \quad ds = r d\alpha, \quad dV = k d\alpha.$$

$$\text{D'où :} \quad F = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{k}{r}.$$

La force est en raison inverse de la distance au point D; elle est constante en tous les points d'une ligne de force.

Partons d'un point A pour y revenir : deux cas peuvent se présenter.

1° La trajectoire n'entoure pas le point D. — Quand nous revenons au point A, l'angle α reprend la même valeur : le travail est nul. Il y a potentiel au sens ordinaire du mot.

2° La trajectoire entoure le point D. — Dans ce cas, nous ne revenons pas au point A avec la même valeur de l'angle α : il a crû ou décrû d'un nombre entier n de fois 2π . Donc le travail total accompli par la force, le long d'une trajectoire fermée quelconque partant du point A et revenant au point A, est égal à $2\pi k.n$.

Chaque fois que nous tournons autour du point D d'un tour dans le sens où les angles α croissent, le travail est $-2\pi k$.

Chaque fois que nous tournons d'un tour en sens contraire, le travail est $+2\pi k$.

Voici donc un exemple où le potentiel prend sur chaque surface équipotentielle une infinité de valeurs en progression arithmétique; le travail accompli quand on part d'un point pour y revenir, peut avoir une infinité de déterminations en progression arithmétique.

12. Connectivité de l'espace.

Le cas précédent se rattache à la notion générale de *connectivité de l'espace* (fig. 8).

Soit dans une portion d'espace deux points quelconques A et B, et deux chemins 1 et 2, allant de A à B à travers cet espace.

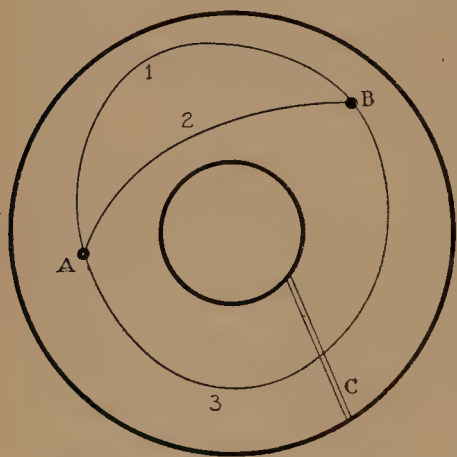


Fig. 8.

On dit que *l'espace est simplement connexe* lorsqu'on peut passer du trajet 1 au trajet 2 par déformation continue sans sortir de l'espace considéré.

Ainsi l'intérieur d'une sphère est simplement connexe.

Au contraire, l'espace compris entre deux cylindres concentriques n'est pas simplement connexe (fig. 8). Parmi les trajets joignant deux points quelconques A et B de cet espace, certains (1 et 3, par exemple) ne jouissent pas de la propriété de pouvoir, par déforma-

tion continue et sans sortir de l'espace, se transformer les uns dans les autres; ce sont ceux qui font autour du cylindre intérieur des nombres de tours *différents*.

Le cas traité au § 11 rentre dans celui-ci; en effet, la force devient infinie sur la droite D; elle n'est donc définie que dans l'espace extérieur à un cylindre ayant pour axe la droite D, et dont le rayon, aussi petit qu'on veut, doit rester fini. Le rayon du cylindre extérieur limitant l'espace devient infini, ce qui ne change pas le degré de connectivité.

Si on introduit une cloison C et si l'on pose que les trajets ne traverseront pas cette cloison, l'espace compris entre deux cylindres

concentriques devient simplement connexe. On dit qu'avant l'établissement de la cloison, il était *doublement connexe*.

L'intérieur d'un tore est de même *doublement connexe*.

D'une manière générale, la connectivité d'une portion d'espace est définie par le nombre, plus un, de cloisons qu'il faut établir pour la rendre simplement connexe, ces cloisons étant considérées comme infranchissables. Par exemple, l'espace traversé par deux courants électriques rectilignes est triplement connexe pour la force magnétique.

Nous n'aurons pas souvent l'occasion d'utiliser *explicitement* ces notions; le lecteur s'apercevra cependant qu'elles interviennent *implicitement* à chaque instant. C'est pourquoi nous en parlons.

13. Flux d'un vecteur à travers une surface.

Soit S une surface, dS un de ses éléments. Soit F un vecteur défini en tous les points d'une portion d'espace qui contient la surface considérée. Au point O de la surface, il fait l'angle α avec la normale ON .

On appelle *flux du vecteur à travers une portion de la surface*, l'intégrale :

$$\iint F \cos \alpha \cdot dS,$$

étendue à cette portion. Elle n'est définie en signe que si l'on choisit un sens sur la normale, par suite s'il est possible de distinguer l'une de l'autre les deux faces de la surface.

Soit X, Y, Z , les composantes de F en un point x, y, z , de la surface; soit l, m, n , les cosinus directeurs de la normale. On a :

$$\iint F \cos \alpha \cdot dS = \iint (lX + mY + nZ) dS.$$

En choisissant des plans parallèles aux plans coordonnés pour découper des aires dS , on a encore :

$$\iint F \cos \alpha \cdot dS = \iint (Xdydz + Ydzdx + Zdx dy).$$

En appliquant cette formule, il faut tenir compte des conventions de signes. Considérons une droite parallèle à l'axe des x et définie par des valeurs données de y et de z .

Si la surface est fermée, un point se déplaçant sur cette droite de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, pénètre dans l'espace limité par la surface au point x_1 , en sort pour x_2 , y rentre pour x_3 , ... Le nombre des points d'entrée et de sortie est évidemment pair. Soit X_1, X_2, \dots

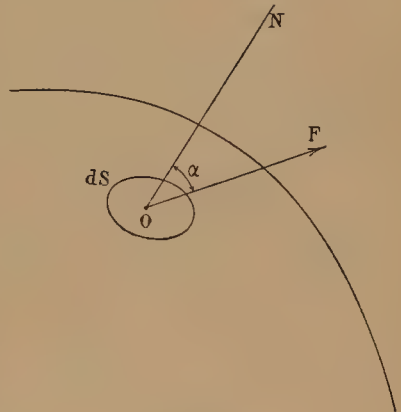


Fig. 9.

les valeurs correspondantes de X : nous devons écrire, en convenant de prendre la normale positivement vers l'extérieur de la surface :

$$\iint X dy dz = \iint (X_2 - X_1) dy dz + \iint (X_4 - X_3) dy dz + \dots$$

Si la surface est ouverte, nous devons compter positivement X quand la traversée se fait dans un sens supposé défini à l'avance, négativement quand elle se fait en sens contraire.

14. Flux conservatif et non conservatif.

La portion de surface à travers laquelle on considère le flux est nécessairement limitée par une courbe fermée C .

Supposons le vecteur défini dans tout l'espace et faisons passer par la courbe C une infinité de surfaces. Calculons le flux du vecteur pour les portions de toutes ces surfaces qui sont limitées par la courbe C . Quand le résultat est le même, on dit que le flux est *conservatif* ou qu'il se conserve.

Énonçons ce qui précède en d'autres termes.

Attachons à la courbe C *supposée rigide* une surface parfaitement déformable. Le flux est conservatif s'il reste le même, quelle que soit la forme que nous donnons à cette surface, l'intégration étant toujours faite jusqu'au contour C .

Cette manière d'opérer a l'avantage que, la déformation de la surface étant continue, on peut toujours distinguer les faces l'une de l'autre : il n'y a pas ambiguïté sur le signe à donner au flux.

THÉORÈME. — *Si le flux est conservatif, le flux à travers une surface fermée quelconque est nul. Les normales sont prises positivement toutes vers l'extérieur, ou toutes vers l'intérieur de la surface fermée.*

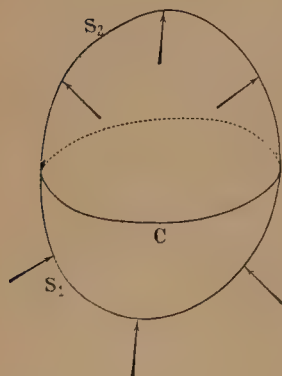


Fig. 10.

Traçons sur la surface fermée S un contour fermé C qui la sépare en deux parties S_1 et S_2 . Puisque le flux est conservatif, il est le même pour les deux surfaces *en grandeur et en signe*, à condition de prendre les normales (comme l'indiquent les flèches), de manière que par une déformation continue les faces correspondantes des surfaces S_1 et S_2 se superposent. On a : $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Calculons maintenant le flux à travers la surface fermée S , les normales étant prises toutes vers l'extérieur ou toutes vers l'intérieur. Il faut changer le signe de l'un des flux précédemment calculés. Donc la somme : $\mp \mathcal{F}_1 \pm \mathcal{F}_2$, est nulle.

15. Exemple de flux conservatif : écoulement d'un liquide incompressible.

1°. — Jetons dans une rivière des corps qui se maintiennent en suspension dans l'eau, par exemple de petites balles ayant la densité de l'eau. Elles prennent des directions variables suivant leur proximité du fond ou des rives. Leur direction est celle de *l'écoulement* aux divers points, leur vitesse mesure la *vitesse d'écoulement* en ces points. Au voisinage d'un point O , les directions sont parallèles, et les vitesses égales, avec une approximation d'autant plus grande qu'on s'écarte moins du point O ; autrement dit, le champ du vecteur *vitesse* est uniforme (§ 8, 3°).

2°. — Définissons le débit à *travers une surface*.

Plongeons dans la rivière un cerceau que, pour simplifier, nous supposons d'abord plan. Nous avons tendu, sur le pourtour de ce

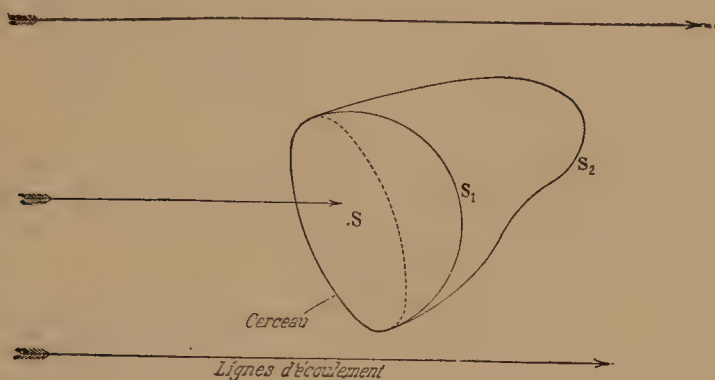


Fig. 11.

cerceau, un filet dont le fil est assez fin pour ne pas gêner le passage de l'eau. Pendant chaque seconde il passe, à travers la surface S formée par le filet, un certain nombre de litres d'eau qui sera par définition le *débit* D à *travers la surface considérée*.

Au lieu d'un filet, employons un grillage limité toujours au pourtour du cerceau, mais pouvant prendre, grâce à la rigidité de ses fils, une forme quelconque (hémisphérique, par exemple). Nous demandons quels sont les débits à travers les surfaces S_1, S_2, \dots qu'il forme.

Quelles que soient ces surfaces, le débit est constant et égal à D , à la seule condition que le fluide soit incompressible et que les surfaces S_1, S_2, \dots du grillage soient entièrement immergées dans l'eau (fig. 11).

En effet, le volume fermé limité par les surfaces S et S_1 est *plein* de liquide *incompressible* ; donc, pendant un temps quelconque, il sort à travers S_1 autant de liquide qu'il en entre à travers S .

D'où la notion fondamentale de *débit à travers une courbe fermée*.

Puisque la forme de la surface limitée au contour du cerceau est indifférente, nous n'avons plus besoin de la spécifier : nous pouvons parler sans ambiguïté du *débit à travers le cerceau*. Évidemment, quand nous voudrions mesurer effectivement ce débit, nous serons obligés de choisir une surface particulière; mais nous pourrions prendre la plus commode, puisque le résultat sera toujours le même.

Ce qui précède s'applique évidemment encore, si le cerceau a une forme gauche quelconque.

Nous voici parvenus à deux notions :

1° celle de direction et de vitesse d'écoulement;

2° celle de débit à travers une courbe fermée quelconque.

16. Expression du débit total en fonction de la vitesse d'écoulement.

Relions-les l'une à l'autre, ce qui ne présente aucune difficulté.

Nous savons qu'au voisinage d'un point, on peut supposer constantes la direction et la vitesse d'écoulement; qu'une surface courbe quelconque peut, avec l'approximation qu'on veut, être remplacée par un polyèdre d'un grand nombre de faces. Nous voici donc ramenés à une surface plane d'aire S plongée dans un liquide où l'écoulement est uniforme.

Soit v la vitesse d'écoulement mesurée en centimètres par seconde.

Plaçons l'aire S normalement à la direction d'écoulement. Il passe

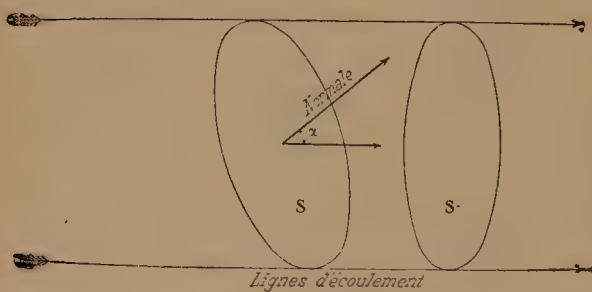


Fig. 12.

par seconde à travers elle un nombre de centimètres cubes égal à vS ; S est évaluée en centimètres carrés.

Quand l'aire n'est plus normale au courant, le flux est généralement $vS \cos \alpha$, où α représente l'angle que fait la normale à la surface avec la direction d'écoulement (fig. 12).

Menons en effet par le pourtour de la surface S des droites parallèles à la direction de l'écoulement : elles forment un cylindre dont la section droite est S' . A travers la surface de ce cylindre, il ne passe rien, puisque le liquide coule parallèlement : donc le flux est le même à travers S et S' . A travers S' il est vS' ; or $S' = S \cos \alpha$, nous avons donc à travers S le flux ou débit : $D = vS \cos \alpha$.

Le problème est ainsi complètement résolu : quelle que soit la surface, nous pouvons la décomposer en petits plans; sur chacun de ces petits plans, nous pouvons considérer l'écoulement comme complètement déterminé par deux nombres constants, l'un α fixant sa direction, l'autre v fixant sa vitesse.

Dans l'exemple précédent, le vecteur est la vitesse d'écoulement, le flux du vecteur est le débit total, c'est-à-dire le volume de liquide qui passe dans l'unité de temps à travers la surface considérée.

Le liquide étant incompressible, sa densité est invariable; nous pouvons négliger de la mettre en facteur : le *volume* qui s'écoule et la *masse* du liquide sont proportionnels.

Le flux est conservatif; on peut parler du flux à travers une courbe fermée.

Le flux à travers une surface fermée est nul; bien entendu, il faut supposer le volume limité par elle complètement rempli. Par exemple, à l'intérieur d'une surface fermée¹, amenons le liquide au moyen d'un tuyau : il en sort une certaine quantité à travers la surface entière, défalcation faite de la partie qui est limitée par le tuyau; il en entre par le tuyau une quantité égale. Le tuyau joue le rôle de *tube* pour le vecteur *vitesse d'écoulement*.

17. Cas d'un fluide compressible.

Reprenons les mêmes raisonnements avec un fluide compressible. Nous définissons encore en chaque point la direction et la vitesse de l'écoulement. Le produit de la densité (ici variable) par la vitesse d'écoulement est un vecteur qu'on peut supposer connu en direction et grandeur. Le flux de ce vecteur à travers une surface représente encore le débit matériel à travers cette surface.

Mais le flux n'est pas conservatif. La quantité de gaz à l'intérieur d'une surface fermée n'est pas constante à cause de la compressibilité.

L'expression débit à travers une courbe fermée n'a plus de sens.

A travers une surface fermée, le flux n'est pas nécessairement nul. A l'intérieur de cette surface, nous pouvons mettre un tube plein de gaz comprimé; ouvrons le tube : la sortie du gaz à travers la surface fermée n'est compensée par aucune rentrée.

Nous trouverons réalisés en Magnétisme et en Électricité les deux cas : tantôt le flux de force sera conservatif, tantôt il ne le sera pas.

18. Flux de force dans le cas d'un potentiel.

Considérons maintenant comme vecteur la force dans le cas où elle admet un potentiel. Soit S une surface quelconque dont nous pouvons distinguer les deux faces. Menons les normales; repérons les différents points de chacune de ces normales à l'aide de la distance n comptée sur elle à partir d'un de ses points arbitrairement choisi :

$$F \cos \alpha = -\frac{\partial V}{\partial n}, \quad \iint F \cos \alpha \, dS = -\iint \frac{\partial V}{\partial n} \, dS.$$

¹ Il va de soi que nous appelons ici surface fermée une surface mathématiquement fermée et non pas physiquement étanche : la phrase n'aurait aucun sens dans le second cas.

Pour calculer approximativement cette intégrale, menons une surface S' parallèle à la surface considérée à une distance invariable εn . Découpons la surface en petits éléments εS ; mesurons pour chacun de ces éléments la variation moyenne εV du potentiel quand on passe de S à S' ; le flux est :

$$-\frac{1}{\varepsilon n} \cdot \sum \varepsilon V \cdot \varepsilon S.$$

Généralement les calculs sont impossibles, mais le sens de l'intégrale est clair.

19. Divergence d'un vecteur. Théorème de Green.

1°. — Soit un vecteur F défini dans un champ; son module et sa direction varient d'une manière continue. Soit $d\omega$ un petit volume autour du point P . On appelle *divergence* du vecteur F au point P une quantité telle, que son produit par le volume $d\omega$ représente le flux du vecteur F à travers la surface limitant le volume $d\omega$.

La divergence du vecteur F est définie indépendamment d'un système particulier de coordonnées; la définition suppose que le flux infiniment petit à travers la surface limitant un volume est proportionnel au volume limité. L'existence d'une divergence pour un système *quelconque* de coordonnées résulte de son calcul pour un système *déterminé*, par exemple pour les coordonnées cartésiennes.

2°. — Tant au chapitre XXII du *Cours de Mathématiques générales*, qu'au chapitre II du *Cours de Mécanique*, nous avons prouvé que la divergence d'un vecteur de composantes cartésiennes X, Y, Z (continues dans un espace), a pour expression :

$$\text{Div. } (X, Y, Z) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z};$$

le flux est considéré comme positif quand il sort du volume considéré.

Nous avons donné l'expression de la divergence en coordonnées sphériques et cylindriques au § 48 du *Cours de Mécanique*; nous ne reviendrons pas sur ces démonstrations élémentaires. Quand le vecteur admet un potentiel V , on a en coordonnées cartésiennes :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\text{Div. } F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\Delta V,$$

en posant pour abrégé :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

3°. — La connaissance de la divergence en tous les points d'un volume fini permet de calculer le flux à travers la surface qui le

limite. En effet, il est évident que ce qui sort de la surface fermée entière est la somme algébrique de ce qui sort de tous les volumes élémentaires qui la constituent. On a donc l'identité :

$$\iint F \cdot \cos \alpha \cdot dS = \iiint \text{Div. } F \cdot d\omega. \quad (1)$$

L'intégrale double est étendue à la surface fermée entière; l'intégrale triple est étendue au volume qu'elle limite.

Dans le cas d'un potentiel, l'équation (1) devient :

$$\iint F \cdot \cos \alpha \cdot dS = - \iint \frac{\partial V}{\partial n} dS = - \iiint \Delta V \cdot d\omega. \quad (2)$$

Au surplus, voici la démonstration très simple de ces identités. Nous avons montré plus haut qu'on a :

$$\iint X dy dz = \iint [(X_2 - X_1)' + (X_4 - X_3) + \dots] dy dz.$$

Si X est une quantité continue et n'a pas de valeurs infinies entre x_1 et x_2 , x_3 et x_4 , ... (ce que nous supposons toujours dans l'application du théorème), on peut poser :

$$X_2 - X_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial X}{\partial x} dx, \quad X_4 - X_3 = \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial X}{\partial x} dx, \dots$$

$$\text{On a donc :} \quad \iint X dy dz = \iiint \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz.$$

Opérant de même sur les intégrales :

$$\iint Y dz dx, \quad \iint Z dx dy,$$

on trouve, en posant : $dx dy dz = d\omega$:

$$\begin{aligned} \iint F \cdot \cos \alpha \cdot dS &= \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint \text{Div. } F \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Les normales à la surface sont prises positivement vers l'extérieur.

Le flux est conservatif dans tout l'espace considéré, si la fonction V satisfait à l'équation (dite de Laplace) : $\Delta V = 0$.

On dit qu'elle est *harmonique* (*Mécanique rationnelle*, § 52).

20. Curl d'un vecteur. Théorème de Stokes.

1°. — On appelle *curl* du vecteur F de composantes X, Y, Z (*curl* en anglais signifie *boucle* et se prononce *keurl*; les Allemands emploient l'expression *vort*, diminutif de *vortex*, tourbillon; les Ita-

liens disent *rot*) le vecteur φ dont les composantes ξ, η, ζ , sont définies par les équations :

$$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \quad (1)$$

Nous écrirons :

$$(\xi, \eta, \zeta) = \text{curl}(X, Y, Z), \quad \varphi = \text{curl } F.$$

La divergence du vecteur φ est nulle :

$$\text{Div. curl}(X, Y, Z) = \text{Div.}(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Le flux du vecteur φ est donc conservatif; on peut parler sans ambiguïté de son flux à travers un contour fermé, sans qu'il soit nécessaire de spécifier quelle est la surface d'intégration choisie parmi les surfaces limitées à ce contour.

2°. — THÉORÈME DE STOKES.

Au § 490 du *Cours de mathématiques générales*, nous avons démontré, sous le nom de Stokes, le théorème suivant : *Le flux du vecteur φ à travers un contour fermé est égal à la circulation du vecteur F le long de ce contour.* Nous ne reviendrons pas sur la démonstration. Remarquons que le théorème n'est possible qu'en vertu de la conservation du flux du vecteur φ .

Nous pouvons *arbitrairement* nous donner un vecteur X, Y, Z , dans un champ et remplacer sa circulation le long d'une courbe par le flux d'un autre vecteur ξ, η, ζ , à travers une surface quelconque limitée par cette courbe. Ce second vecteur est complètement déterminé, et son flux est conservatif; autrement dit, sa divergence est nulle.

Mais la réciproque n'est pas vraie : nous ne pouvons pas prendre arbitrairement le vecteur ξ, η, ζ ; son flux doit être conservatif.

De plus, le vecteur X, Y, Z , dont il est le curl, n'est déterminé qu'à une fonction arbitraire près. Les vecteurs :

$$X, Y, Z, \quad \text{et} \quad X - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z - \frac{\partial V}{\partial z},$$

satisfont également aux équations (1).

21. Exemple. Flux d'un vecteur constant.

Soit un vecteur constant : $\zeta = 2A$, dirigé suivant l'axe des z . Son flux à travers un contour quelconque est égal à la circulation le long de ce contour du vecteur F dont les composantes sont :

$$X = -Ay, \quad Y = Ax, \quad Z = 0.$$

Le vecteur F est normal à la droite allant de l'origine des coordonnées au point de coordonnées x et y ; il est proportionnel à la distance r de ce point à l'origine : $F = Ar$.

Vérifions la proposition pour un cercle de rayon R placé dans le plan xOy et ayant son centre à l'origine.

Le flux du vecteur ζ est : $2A \cdot \pi R^2$.

La circulation du vecteur F est : $2\pi R \cdot RA$.

Nous aurions pu attribuer au vecteur F les composantes :

$$X = -Ay - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = Ax - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

où V est une fonction quelconque de x , y et z .

Nous savons en effet que la circulation, le long d'une courbe fermée, d'un vecteur qui admet un potentiel est nulle.

CHAPITRE II

ACTIONS EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE

22. Champ de force. Intensité du champ.

1°. — On dit qu'il y a *champ de force* lorsque la force est donnée en grandeur et direction en tous les points d'un espace qui est le champ.

Nous pouvons arbitrairement définir des champs de force. En fait, nous ne rencontrons de champ de force que dans trois cas : pesanteur, électricité, magnétisme; il est remarquable qu'ils soient tous créés par des agents agissant en raison inverse du carré de la distance.

L'emploi des mots *champ* et *intensité du champ* implique une idée particulière sur le mode de production de la force. On admet implicitement que le milieu est déformé avant même que la force puisse effectivement se manifester.

Autour de la Terre, par exemple, nous ne pouvons pas mesurer la pesanteur en un point sans y placer une masse. Mais on répugne à admettre des actions à distance; on pose donc qu'*avant même l'introduction de cette masse*, il y a quelque chose de modifié dans le milieu : *il existe une force à l'état virtuel*. C'est en vertu de cet ordre de considérations qu'on définit un champ par son intensité en chaque point, avant même qu'il y ait effectivement une force réalisée. *L'intensité du champ est la force qui s'exercerait sur la masse unité de l'agent capable d'obéir à cette force, si on l'introduisait dans le champ*. Dans ce qui suit, nous confondons les termes *intensité du champ* et *force*; il n'y a aucun inconvénient, pourvu que le lecteur soit prévenu.

2°. — Nous étudierons les champs produits par des agents s'attirant ou se repoussant proportionnellement au produit de leurs masses, en raison inverse du carré de leur distance et suivant la direction qui les joint. Les agents sont de deux espèces, *positive* et *négative*, les agents de même espèce se repoussent; les agents d'espèces différentes s'attirent.

Suivant ce qui est expliqué plus haut, nous définirons *l'intensité du champ* créé en un point A comme la force qui *s'exercerait* sur l'unité de masse de l'agent positif placé au point A. Nous parlerons de cette force comme existant antérieurement à la mise en place de l'agent destiné à la mesurer. Soit donc F le vecteur représentatif de l'intensité du champ au point A dû à une masse punctiforme m de l'agent placée en O; sa direction passe par la masse O; il est dirigé dans le sens OA si m est positif, dans le sens AO si m est négatif.

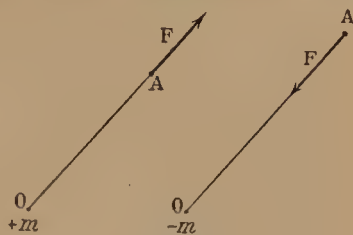


Fig. 13.

Si les agents sont répartis d'une manière continue dans un volume, leur masse est définie par une *densité de volume* ρ ; l'élément de masse est ρdv , où dv est l'élément de volume.

Les agents peuvent être répartis en couches minces : leur masse est définie par une *densité de surface* σ ; l'élément de masse est σdS , où dS est l'élément d'aire de la couche.

3°. — POTENTIEL D'UNE MASSE PONCTUELLE.

Le potentiel d'une masse ponctuelle m située au point O est :

$$V = \frac{m}{R},$$

où R est la distance \overline{OA} au point agi A. Les surfaces équipotentiellles sont des sphères de centre O; les lignes de force sont des droites passant par O; les tubes de force sont des cônes de sommet O.

On a :

$$-\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{m}{R^2};$$

le champ est bien en raison inverse du carré de la distance.

Suivant les conventions générales, si m est positif, le champ est centrifuge; si m est négatif, il est centripète : il est toujours dirigé vers les potentiels décroissants.

4°. — CAS GÉNÉRAL.

Le potentiel en un point A est généralement :

$$V = \sum \frac{m}{R} = \iint \frac{\sigma dS}{R} + \iiint \frac{\rho dv}{R},$$

puisque nous posons que les actions des masses sont indépendantes de l'existence de masses voisines (§ 9).

Le calcul du potentiel en un point A consiste dans l'intégration de la première somme pour toutes les surfaces (R est la distance de l'élément de surface au point A), et dans l'intégration de la seconde pour tous les volumes (R est la distance de l'élément de volume au point A).

23. Angles solides.

1°. — La démonstration des théorèmes qui suivent repose sur la considération des *angles solides*.

Un cône quelconque de sommet O délimite une aire s sur la sphère S_1 dont nous prenons le rayon pour unité.

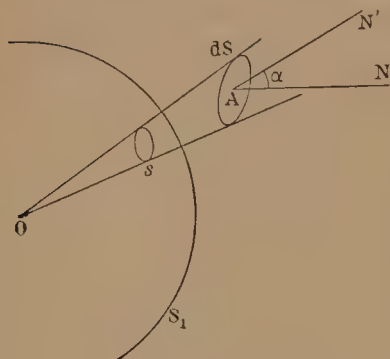


Fig. 14.

Par définition, cette aire mesure l'angle solide ω du cône.

Nous prenons pour unité d'aire le carré qui a pour côté le rayon de la sphère.

ω peut varier de 0 à 4π ; c'est un nombre.

Un cône de sommet O et d'angle solide infiniment petit $d\omega$ découpe sur la surface quelconque S un élément d'aire dS . Soit r la distance OA et α

l'angle de la direction moyenne AN' des génératrices du cône avec la normale AN à la surface. On a évidemment :

$$d\omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}.$$

Lorsque la surface a deux faces distinctes, l'angle solide est susceptible de deux déterminations, suivant que du sommet on voit l'une ou l'autre face. Nous distinguerons les faces et les angles solides par les signes $+$ et $-$.

2°. — ANGLE SOLIDE ω SOUS LEQUEL ON VOIT UN DISQUE DE RAYON R D'UN POINT A DE SON AXE.

On appelle *axe* d'un disque circulaire la normale OA à son plan, élevée par le centre O du cercle.

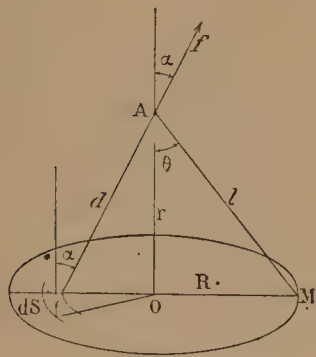


Fig. 15.

L'aire d'une zone sphérique est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle. Faisons passer une sphère de rayon l et de centre A par le pourtour du disque : l'angle solide cherché a pour mesure le quotient par l^2 de l'aire de la calotte qui est au-dessous du disque.

La hauteur de la calotte et l'angle solide sont donc :

$$l - r = l(1 - \cos \theta), \quad \omega = 2\pi(1 - \cos \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right).$$

24. Flux envoyé par une masse punctiforme.

Le flux envoyé par une masse punctiforme m , à travers une sur-

face qu'elle voit sous un angle solide infiniment petit $d\omega$, est : $md\omega$.

En effet, soit dS l'élément à travers lequel nous évaluons le flux. La force est : $m : r^2$; elle est dirigée suivant AN' . Le flux est :

$$\frac{m}{r^2} dS \cos \alpha = md\omega.$$

COROLLAIRES.

1°. — Le flux étant indépendant de la position de l'élément dS , on peut parler sans ambiguïté du flux envoyé dans un cône $d\omega$: le flux est le même à travers les éléments qu'il découpe sur des surfaces quelconques.

2°. — Les flux s'additionnant algébriquement (ici arithmétiquement), la proposition s'applique à un cône d'angle fini quelconque ω .

3°. — Nous pouvons parler sans ambiguïté du flux à travers un contour fermé; c'est le flux envoyé dans le cône qui a pour sommet le point agissant et qui s'appuie sur le contour.

4°. — A travers une surface fermée quelconque le flux est :

$$m\Sigma d\omega = 4\pi m,$$

si le point agissant est dans la surface.

5°. — Si le point agissant est hors de la surface fermée, le flux total est nul. En effet, considérons le contour apparent de la surface vue du point agissant. Il la sépare en deux portions S_1 et S_2 , à travers lesquelles le flux est le même en valeur absolue (3°). Mais dans un des cas il entre dans la surface, dans l'autre cas il en sort : la somme est nulle. Nous pouvons affecter d'un signe la face externe et du signe contraire la face interne; la proposition s'énonce en disant que la somme algébrique des flux est nulle.

6°. — La surface fermée est traversée deux fois ou un nombre pair de fois par une droite émanant du point agissant. Les propositions 4° et 5° s'appliquent, quelles que soient les complications de la surface, en considérant comme positifs les flux qui sortent et négatifs les flux qui entrent, ou inversement.

7°. — S'il existe un nombre quelconque de masses (positives ou négatives) à l'intérieur de la surface fermée, le flux total est $4\pi\Sigma m$.

Le flux *sortant* est en excès, quand $\Sigma m > 0$; il est en défaut, quand $\Sigma m < 0$.

25. Équations de Poisson et de Laplace.

Le flux du vecteur F à travers l'élément de volume $dv = dx dy dz$, est (§ 19) :

$$\text{Div. } F. dv = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv.$$

Quand le vecteur F admet un potentiel, on a (§ 19) :

$$\text{Div. } F. dv = -\Delta V dv.$$

Écrivons que le flux à travers l'élément dv est égal à 4π fois la somme des masses contenues dans l'élément ; il vient :

$$-\Delta V dv = 4\pi\rho dv, \quad \Delta V + 4\pi\rho = 0,$$

où ρ est la densité de volume.

C'est l'équation de Poisson ; Laplace l'avait déjà considérée dans le cas où $\rho = 0$.

En tous points où il n'y a pas d'agent libre :

$$\rho = 0, \quad \Delta V = 0.$$

Le flux est alors conservatif ; à travers une surface fermée quelconque, il est nul (§ 14).

COROLLAIRE I. — *Le potentiel ne peut présenter ni maximum ni minimum en dehors des masses agissantes.*

Si au point A existe un véritable maximum, A est entouré de surfaces équipotentiellles fermées, intérieures les unes aux autres. En tous les points de chacune d'elles, la force est dirigée vers l'extérieur : le flux total ne peut être nul. Donc, au point A , il y a une masse positive. Même raisonnement si au point A existe un véritable minimum ; la masse est négative.

COROLLAIRE II. — Soit A un point d'équilibre en dehors des masses agissantes. Il est sûrement d'équilibre *stable* pour certaines directions, d'équilibre *instable* pour d'autres. En effet, sur les lignes menées du point A , le potentiel à partir du point A ne peut (d'après le corollaire I) décroître partout ni croître partout. Donc au point A le potentiel est sûrement un maximum par rapport à certaines directions, un minimum par rapport à d'autres (§ 7, 3°).

Le potentiel est constant sur les lignes ou surfaces équipotentiellles passant par le point A ; on aura dans ces directions un équilibre *indifférent*.

26. Le flux est conservatif à l'intérieur d'un tube de force qui ne contient pas de masses agissantes. Champs uniformes.

Le flux total à travers une surface fermée est nul. Il est nul par définition sur la surface latérale du tube, puisqu'en un point quelconque de cette surface, la force est dirigée dans le plan tangent. Donc ce qui entre par une surface quelconque S_1 limitée au tube sort par une autre surface S_2 quelconque. Tout se passe comme pour un tube rempli de liquide incompressible.

CHAMP UNIFORME.

Dans tout espace où ne se trouvent pas de masses agissantes, la force ne peut avoir une direction constante sans être constante.

Les tubes de force sont des cylindres. Le flux doit être conservatif; il est d'ailleurs égal à la force multipliée par la section droite du tube qui est constante : donc la force est constante. Les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles; le potentiel décroît proportionnellement à la distance parcourue sur la normale à ces plans.

Lorsque les lignes de force sont des droites parallèles, par suite les surfaces équipotentielles des plans parallèles normaux sur les droites, on dit que le champ est *uniforme* (§ 8). Tout champ peut être considéré comme uniforme dans un espace assez petit, à la condition qu'il ne renferme aucune singularité : pas de point conique pour les surfaces équipotentielles (§ 27), pas de points multiples pour les lignes de force. En effet, les surfaces d'un faisceau qui ne peuvent se couper sont quasiment des plans parallèles dans un espace assez réduit; leurs trajectoires orthogonales sont des droites parallèles.

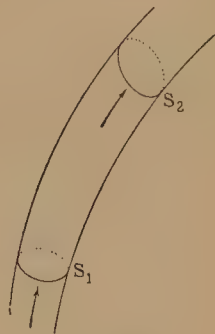


Fig. 16.

27. Surfaces équipotentielles et lignes de force pour deux masses de même signe.

1°. — Les surfaces équipotentielles ont pour équation (en coordonnées bipolaires, voir *Exercices et Compléments de mathématiques générales*, § 438) :

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = V.$$

Soit (fig. 17) : $m_1 > m_2 > 0$.

Dans la figure, la masse m_1 est supposée à gauche de la masse m_2 .

Il est évident que les surfaces équipotentielles sont de révolution autour des points O_1 et O_2 où sont concentrées les masses m_1 et m_2 ; les lignes de force sont, par conséquent, dans des plans méridiens; nous n'avons à figurer que ce qui se passe dans un de ces plans.

Au voisinage des points O_1 et O_2 , le potentiel est très grand et les surfaces équipotentielles sont quasiment des sphères. A chaque potentiel assez grand correspond donc une surface à deux nappes complètement séparées.

A grande distance, tout se passe comme si les points O_1 et O_2 étaient confondus; la surface équipotentielle est à une nappe et se rapproche de la forme sphérique.

Il est clair que le signe du potentiel, partout le même, est celui des masses. Très grand en valeur absolue près des masses, il décroît jusqu'à zéro quand on s'éloigne indéfiniment.

La surface équipotentielle, qui sert de limite entre les surfaces à deux nappes et les surfaces à une nappe, possède un *point conique*; la courbe équipotentielle contenue dans le méridien servant de

tableau, possède un point double D. On vérifiera qu'il se trouve

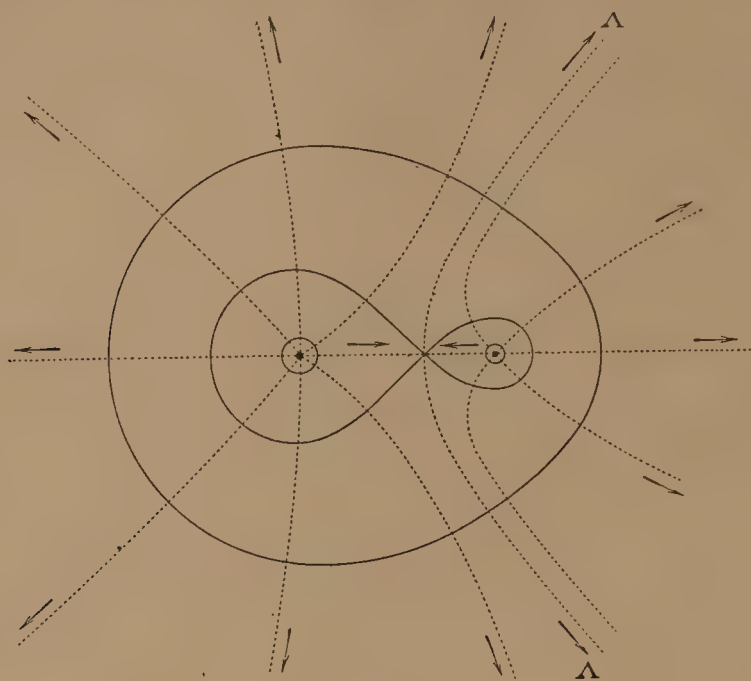


Fig. 17.

entre les deux points O_1 et O_2 , à des distances de ces points telles qu'on ait :

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}.$$

La force y est nulle (§ 8, 3°).

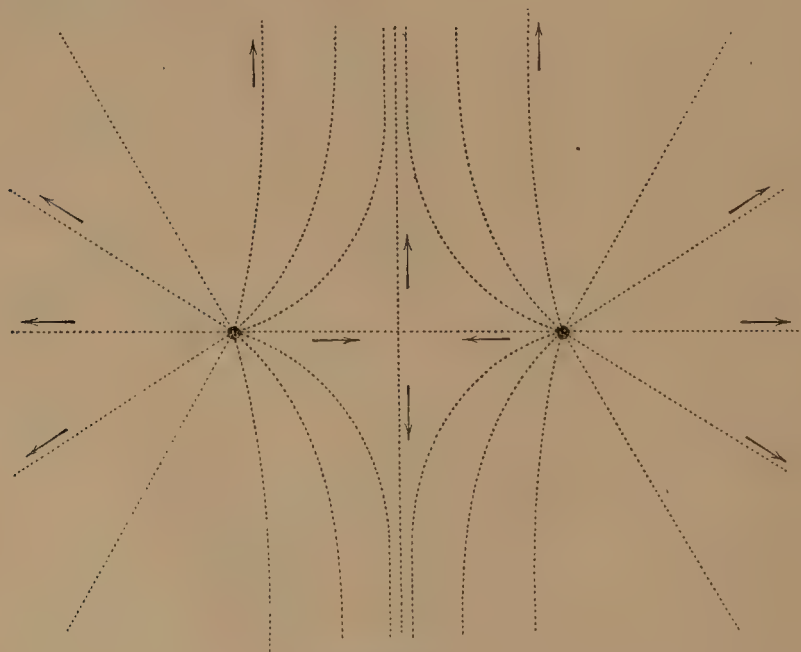


Fig. 18

2°. — Les lignes de force ne peuvent évidemment aller du point O_1 au point O_2 , puisqu'une masse positive est repoussée par l'un et l'autre point. Elles forment donc deux systèmes émanant de l'un ou l'autre point ; elles se perdent à l'infini. Les deux systèmes sont séparés par des lignes Λ passant toutes par le point conique D et formant une surface de révolution ; elles sont, si l'on veut, la continuation des deux lignes de force O_1D , O_2D . Une masse positive, partant du voisinage de O_1 sur la ligne O_1O_2 et se déplaçant sans vitesse, arrive en D où la force est nulle ; de là, elle peut arbitrairement prendre l'une quelconque des lignes Λ pour gagner l'infini.

3°. — CAS PARTICULIER ; MASSES ÉGALES.

L'équation est :
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{V}{m}.$$

Le point conique est à égale distance des masses ; la surface de force Λ devient un plan normal à la droite qui les joint.

La figure 18 représente les lignes de force d'un plan méridien.

28. Surfaces équipotentielles et lignes de force pour deux masses de signes contraires.

1°. — Les surfaces équipotentielles ont pour équation :

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = V.$$

Soit : $m_1 > m_2.$

Dans la figure, la masse m_1 est supposée à gauche de m_2 .

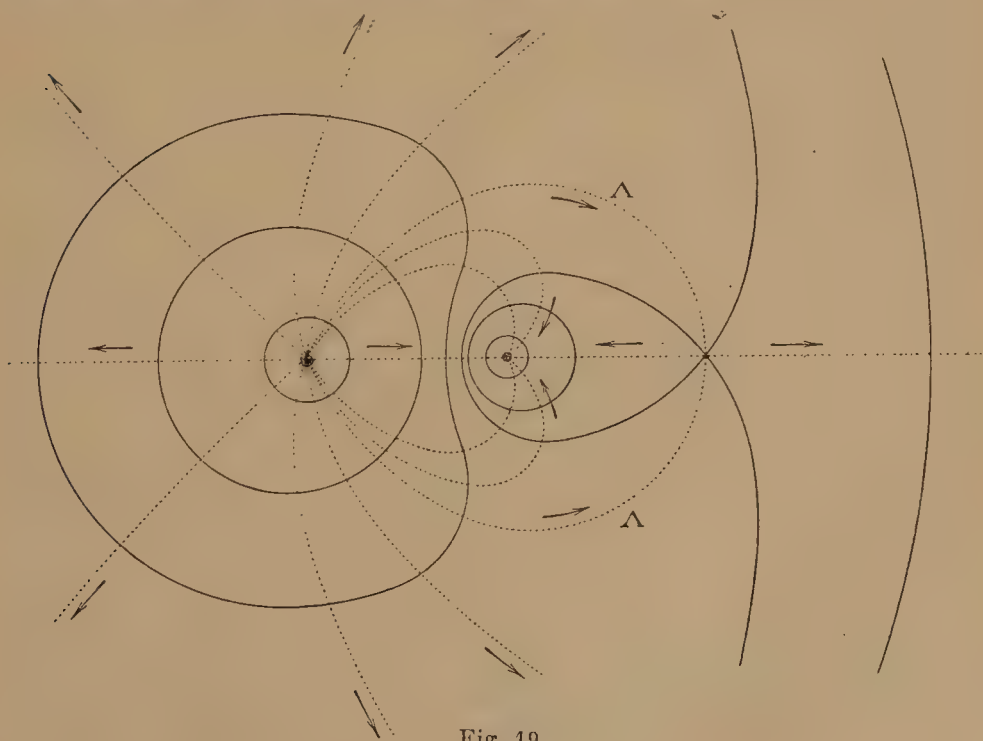


Fig. 19.

Au voisinage des points O_1 et O_2 , les surfaces équipotentielles (évidemment de révolution autour de O_1O_2) sont quasiment sphériques. Le potentiel est très grand et positif près de O_1 , très grand et négatif près de O_2 .

A grande distance tout se passe comme si les masses étaient confondues; les surfaces sont quasiment sphériques. Le potentiel tend vers zéro à mesure qu'on s'éloigne. Puisque nous supposons que la masse positive est la plus grande, il tend vers 0 à travers des valeurs positives.

Il existe une surface qui possède un point conique; dans le plan méridien qui sert de tableau, il existe une courbe équipotentielle qui possède un point double. Ce point D est en dehors du segment O_1O_2 , du côté de la masse la plus petite (m_2 par conséquent), à une distance telle qu'on ait (§ 8, 3°) :

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}.$$

Il est facile de voir que la surface équipotentielle correspondante a le signe de la plus grande masse (positif dans nos hypothèses).

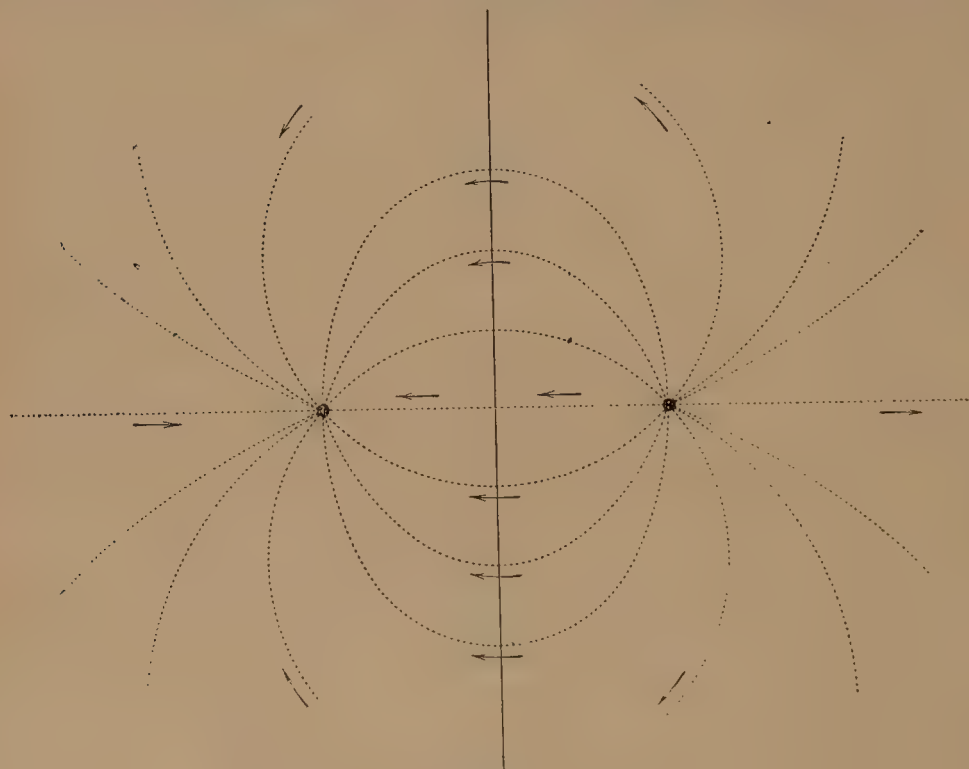


Fig. 20.

La surface équipotentielle $V=0$ (qui est tout entière dans la surface à point conique) est une sphère de centre C.

Son rayon et les distances $\overline{O_1C}$ et $\overline{O_2C}$ ont les expressions suivantes

où a est la distance des points agissants (*Exercices et Compléments de mathématiques générales*, § 439) :

$$R = \frac{am_1m_2}{m_1^2 - m_2^2}; \quad \overline{O_1C} = \frac{am_1^2}{m_1^2 - m_2^2}, \quad \overline{O_2C} = \frac{am_2^2}{m_1^2 - m_2^2}.$$

On a :

$$\overline{O_1C} \cdot \overline{O_2C} = R^2.$$

2°. — Les lignes de force forment deux groupes. Les unes vont de O_1 aboutir à O_2 ; les autres vont de O_1 se perdre à l'infini. N'oublions pas que, par hypothèse, en O_1 est la masse la plus grande.

Les deux groupes sont séparés par des lignes de force Λ qui émanent de O_1 et aboutissent au point conique D ; elles forment une surface de révolution. Une masse positive peut aller de O_1 à O_2 par leur moyen; elle joint le point conique et suit la ligne de force DO_2 . Il est vrai que du point conique, en allant dans le sens O_2D , elle peut s'éloigner à l'infini.

3°. — CAS PARTICULIER : MASSES ÉGALES.

La surface équipotentielle qui possède un point conique et la surface équipotentielle sphérique se confondent avec le plan normal à la droite O_1O_2 mené par le milieu du segment O_1O_2 . On vérifiera que le point conique et le point C passent l'un et l'autre à l'infini.

La figure 20 représente les lignes de force.

29. Construction des graphiques précédents.

1°. — SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES.

La méthode générale consiste à tracer les surfaces qui corres-

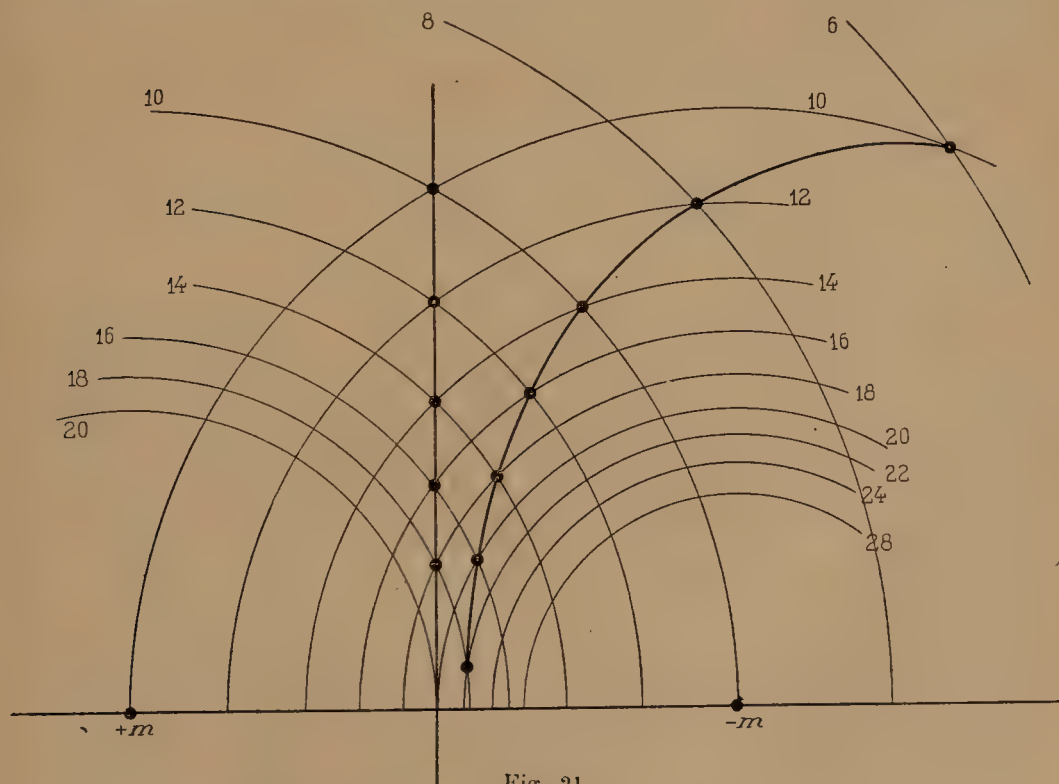


Fig. 21.

pondent à chacun des points agissants; le potentiel d'un point quelconque s'obtient en additionnant *algébriquement* les cotes des surfaces qui y passent. Les constructions sont aisées pour un nombre quelconque de points situés sur une droite : le phénomène est alors de révolution; il suffit de tracer les lignes équipotentiellles dans un plan méridien quelconque (plan passant par la droite).

La figure 21 montre la construction pour deux masses égales et de signes contraires. Dans le plan du tableau, chacune des masses a des cercles pour lignes équipotentiellles. Conventionnellement nous donnons la cote 10 à la sphère ayant pour centre la masse $+m$ et passant par la masse $-m$; il est alors facile de déterminer les rayons des sphères équipotentiellles 12, 14, 16, ..., 8, 6, 4, ...

Une méridienne équipotentielle passe par les points tels que la différence des cotes soit constante.

Nous avons tracé une partie des méridiennes des cotes 0 et -4 .

Si la masse $+$ était, par exemple, quatre fois plus grande que la masse $-$, les cotes des surfaces relatives à la première devraient être multipliées par 4. La construction est du reste la même.

Je ne saurais trop conseiller au lecteur de construire complètement la figure dans l'hypothèse des masses inégales, de même signe et de signes contraires.

2°. — LIGNES DE FORCE.

La méthode ne s'applique que si les masses sont distribuées sur une droite. Elle est très intéressante comme précisant les idées sur les lignes et tubes de force. Je raisonne sur deux masses égales et de signes contraires (fig. 22).

Les lignes de force vont de l'une des masses à l'autre. Nous pouvons constituer avec elles des tubes de force de révolution; la figure 22 représente en gros trait la section méridienne d'un de ces tubes. La construction repose sur le fait que *le flux de force est conservatif à l'intérieur d'un de ces tubes, par suite dans l'espace annulaire compris entre deux de ces tubes.*

Or, à travers une surface quelconque coupant l'un de ces tubes (le disque AB, par exemple, qui est une section droite), le flux de force est égal à la somme *algébrique* des flux respectivement envoyés par les deux masses. Nous sommes donc ramenés à étudier la grandeur de ces flux, par suite la forme des tubes qui correspondent à chacune des masses, plus particulièrement la section méridienne de ces tubes.

Au § 23, nous avons montré que l'angle solide d'un cône de demi-angle au sommet θ est proportionnel à $1 - \cos \theta$. Pour déterminer les traces sur le plan du tableau des cônes dont les angles solides varient en progression arithmétique, nous devons donc tracer une circonférence ayant pour centre le sommet du cône, diviser le diamètre en parties égales (10 dans la figure 22) et joindre au centre les

points de la circonférence déterminés par les verticales équidistantes. Nous avons numéroté de 1 à 14 les traces des cônes ayant $+m$ pour sommets et dont les angles solides sont comme les nombres 1, 2, 3, ..., 14.

Faisons la même opération à partir du point $-m$; comme les

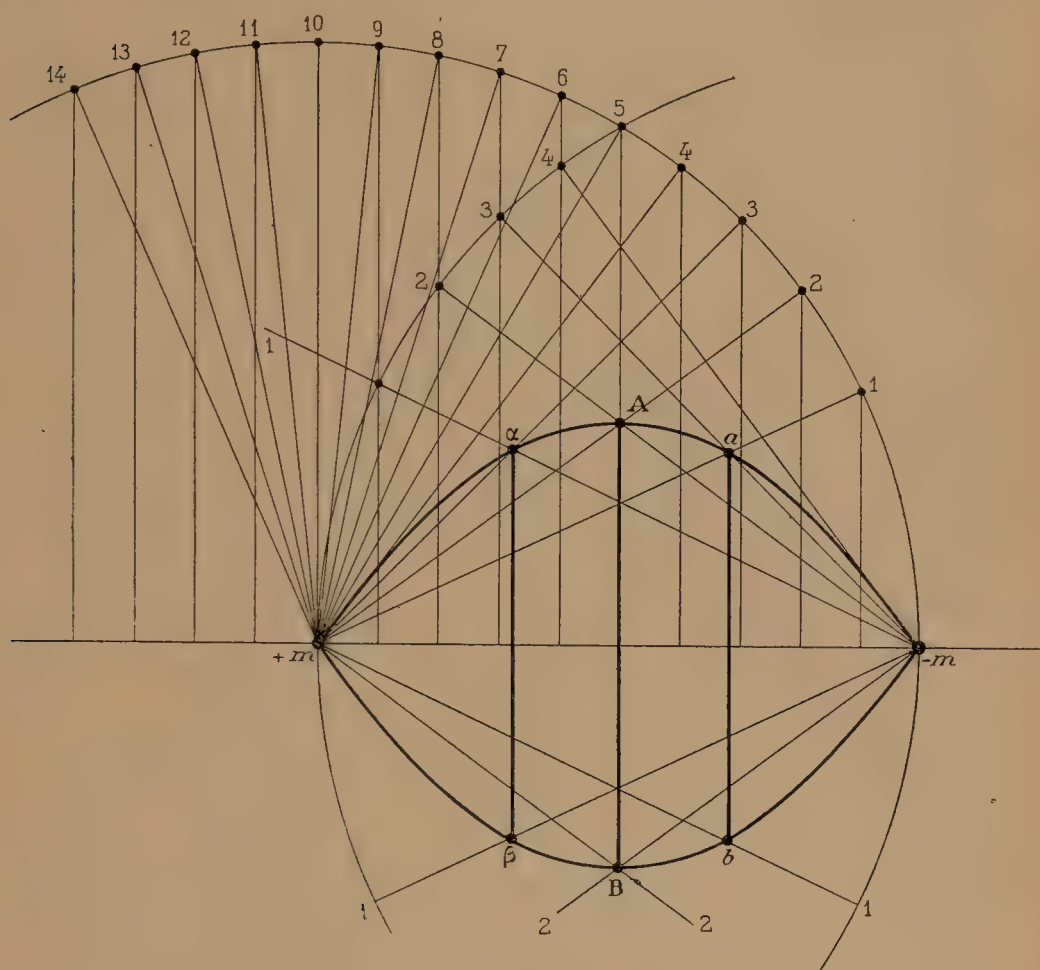


Fig. 22.

masses sont égales, donnons des cotes égales. Si l'une des masses valait k fois l'autre, les cotes correspondantes seraient multipliées par k .

Ceci posé, considérons le point A de rencontre des génératrices des cônes de cotes 2. Je dis qu'à travers le disque AB, le flux total est 4. En effet, les masses sont de signes contraires; mais elles envoient leur flux dans les faces opposées du disque.

Je dis que les points α et a , intersections des génératrices de cotes 1, 3; 3, 1, de même somme 4, appartiennent à la même ligne de force que le point A. En effet, dans les disques $\alpha\beta$ et ab passe le même flux que dans AB.

Bref, la ligne de force est obtenue en cherchant le lieu des points où la somme des cotes des génératrices est constante.

La figure 23 donne la ligne de force de cote

$$6 (= 3 + 3 = 2 + 4 = 4 + 2).$$

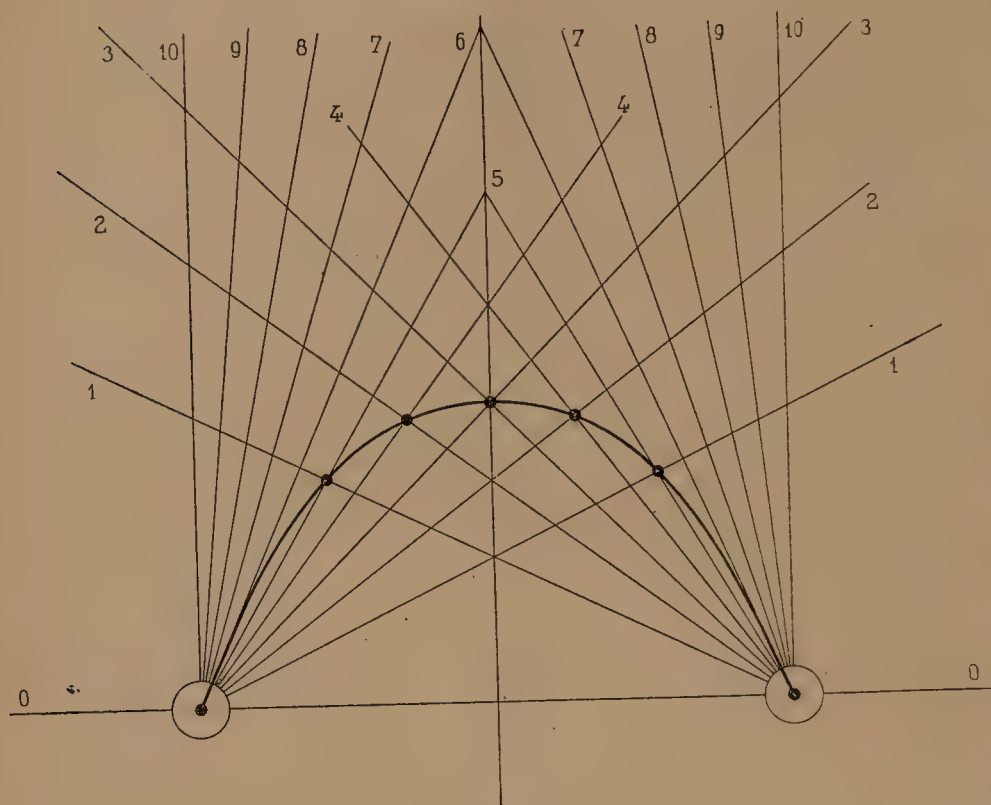


Fig. 23.

Le lecteur vérifiera aisément que la ligne de force de cote 6 a pour tangente aux points agissants la génératrice de cote 6.

30. Masse placée dans un champ uniforme.

1°. — Le problème actuel est un cas particulier des précédents ; il suffit de supposer que l'une des masses est assez grande et s'éloigne suffisamment pour que, dans l'espace environnant l'autre, elle produise une force constante en grandeur en direction, ce qu'on appelle un *champ uniforme*. Comme une masse d'un certain signe placée très loin sur une droite produit exactement le même effet qu'une masse égale, de signe contraire, placée à la même distance sur la droite, mais de l'autre côté, les deux cas précédents fournissent le même cas particulier.

2°. — Nous supposons que la masse m placée à proximité est positive. Les surfaces équipotentiellles ont pour équation :

$$V = Hx + \frac{m}{r};$$

z est la distance à un plan P normal à la direction dans laquelle se trouve la masse lointaine, r est la distance à la masse m .

A grande distance de m , les surfaces équipotentiellles sont approximativement des plans parallèles à P; les lignes de force sont des droites normales à ces plans : *le champ est uniforme* (§ 8). Il faut

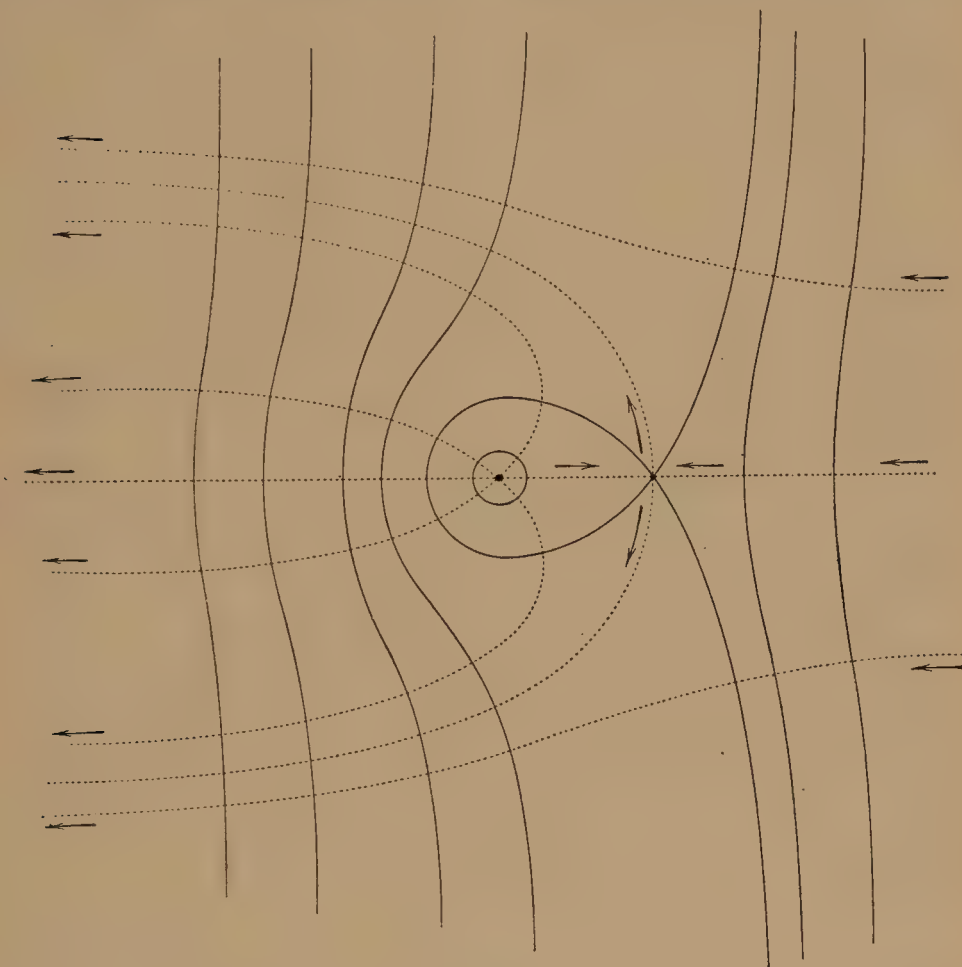


Fig. 24.

déterminer quelle modification il subit au voisinage de m .

On a encore une surface équipotentielle à deux nappes reliées par un point conique déterminé par l'équation :

$$m = r^2 H.$$

La force y est nulle (§ 8, 3°).

Je laisse au lecteur le soin de parfaire la discussion.

31. Action sur un point extérieur d'une couche sphérique, uniforme, infiniment mince.

Soient O le centre de cette couche, R son rayon, σ la densité superficielle uniforme par hypothèse.

Évaluons le flux à travers une sphère concentrique S de rayon r . Par raison de symétrie, les lignes de force *hors de la couche* sont

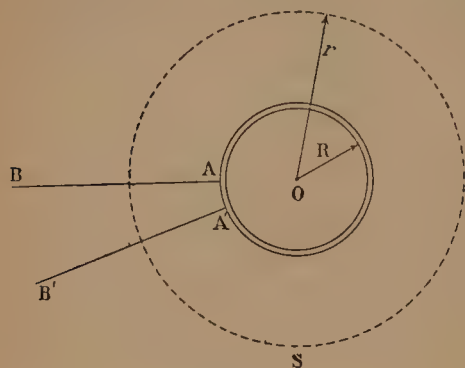


Fig. 25.

des rayons $AB, A'B', \dots$; la force est constante en tous les points de S et normale à S . Soit F sa valeur.

Le flux de force a pour expression : $4\pi r^2 F$.

Il doit être égal à $4\pi \Sigma m$.

$$\text{D'où : } F = \frac{\Sigma m}{r^2}.$$

Donc la force exercée en un point extérieur quelconque par une couche sphérique, uniforme, infiniment mince, est la même que si toute la masse était concentrée au centre de la couche (Newton).

COROLLAIRES.

1°. — La proposition s'applique évidemment à une couche d'épaisseur quelconque de densité uniforme, ou à une couche d'épaisseur quelconque formée de couches concentriques minces de densités uniformes.

2°. — Évaluons la force à la surface de la sphère; il faut poser $r = R$; d'ailleurs : $\Sigma m = 4\pi \cdot R^2 \sigma$; d'où : $F = 4\pi \sigma$.

Nous verrons (§ 36) que ce résultat est absolument général.

32. Action sur un point intérieur d'une couche sphérique, uniforme, infiniment mince.

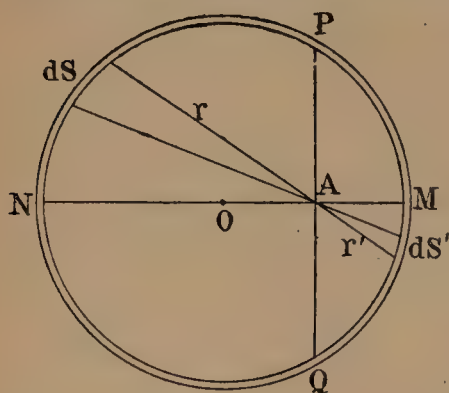


Fig. 26.

1°. — Soit A un point quelconque.

Menons le diamètre AO et le plan PQ normal à ce diamètre.

Traçons deux cônes infiniment petits, opposés par le sommet A et d'angle solide $d\omega$: ils découpent sur la couche deux éléments dS et dS' , faisant avec les génératrices le même angle α .

Leurs charges agissent en sens contraires suivant la même direction.

Les forces qu'ils exercent sont proportionnelles à :

$$F = \frac{dS}{r^2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha}, \quad F' = \frac{dS'}{r'^2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha};$$

elles sont donc égales : les actions des éléments considérés s'équilibrent.

Sans rien négliger, nous pouvons décomposer la surface sphérique en groupes de deux éléments dont les effets se détruisent. Pour chaque groupe, les éléments sont de part et d'autre du plan PQ. Donc l'action totale de la couche sphérique en tout point intérieur est nulle.

2^o. — Réciproquement, parmi toutes les lois fonctions de la distance, la loi en raison inverse du carré est la seule pour laquelle l'action d'une couche uniforme sphérique est nulle en tout point intérieur.

En effet, soit $\varphi(r) : r^2$ la loi de la distance,

Si $\varphi(r)$ est constant, l'action est nulle.

Si $\varphi(r)$ n'est pas constant, nous pourrions toujours trouver deux limites r_1 et r_2 entre lesquelles $\varphi(r)$ varie dans le même sens, *croît par exemple*; $d\varphi : dr > 0$.

Traçons une sphère de diamètre : $r_1 + r_2$.

Considérons le point A tel que : $\overline{AM} = r_1$, $\overline{AN} = r_2$.

Pour les deux cônes opposés par le sommet, les forces sont :

$$F = \frac{dS \cdot \varphi(r)}{r_2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha} \varphi(r), \quad F' = \frac{dS' \cdot \varphi(r')}{r'^2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha} \varphi(r').$$

Puisque r est plus grand que r' et que $d\varphi : dr > 0$, on a : $F > F'$; cette conclusion vaut pour un groupe quelconque d'éléments dS , dS' , pris de part et d'autre du plan PQ. Comme cette division en groupes ne néglige aucune partie de la surface sphérique, l'action totale de cette surface ne peut être nulle au point A.

Donc, si l'action est nulle, $\varphi(r)$ est constant. C. Q. F. D.

33. Action d'une sphère homogène en un point situé à l'intérieur.

Soit R le rayon de la sphère, soit r la distance au centre du point considéré. Toutes les couches dont les rayons sont compris entre R et r n'ont aucune action : la seule action résulte de la sphère de rayon r . Appliquons le théorème du § 31; soit ρ la densité de volume. Tout se passe comme si la masse entière $\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho$ était concentrée au centre et agissait, à la distance r , en raison inverse de r^2 .

La force est donc dirigée suivant le rayon et égale à :

$$\frac{4}{3} \pi \rho \frac{r^3}{r^2} = \frac{4}{3} \pi \rho \cdot r.$$

Elle est proportionnelle à la distance au centre.

APPLICATION.

Le poids d'un corps qu'on descend dans un puits diminue propor-

tionnellement à la profondeur du puits et de manière que son poids s'annule au centre de la Terre. Ceci, bien entendu, dans l'hypothèse improbable où la Terre pourrait être considérée comme homogène.

Donc le poids à la surface de la Terre est un maximum. Plus exactement, si on représente le poids P en prenant pour abscisses la distance r au centre de la Terre supposée de rayon R , il est donné par une droite quand r varie de 0 à R , puis par une hyperbole cubique, quand $r > R$. Les deux courbes ne se raccordent pas tangentiellement : elles se coupent sous un angle fini pour $r = R$. Le poids varie d'une manière continue, mais la dérivée $dP : dr$ présente une discontinuité pour $r = R$.

34. Action d'une couche circulaire de densité uniforme σ en un point A de son axe. Action d'un plan indéfini.

1°. — Nous appelons *axe* d'une couche circulaire la normale OA à son plan élevée au centre O du cercle (fig. 15, § 23).

Par raison de symétrie, la force F que nous cherchons est dirigée suivant l'axe ; additionnons donc toutes les composantes suivant l'axe des forces f dues à chaque élément de la couche.

La force f due à l'élément dS est : $\sigma dS : d^2$, où d est sa distance au point A . La composante utile est :

$$f \cos \alpha = \sigma dS \cos \alpha : d^2.$$

$dS \cos \alpha : d^2$ est l'angle solide sous lequel on voit du point A l'élément dS , puisque la normale à dS , parallèle à OA , fait l'angle α avec la droite qui joint A et dS .

En définitive, la force F exercée au point A est dirigée suivant l'axe et égale à $\omega \cdot \sigma$, où ω est l'angle solide sous lequel on voit du point A la couche circulaire.

D'où (§ 23) :

$$F = 2\pi\sigma(1 - \cos \theta) = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right).$$

2°. — ACTION SUR UN POINT EXTÉRIEUR D'UN PLAN INDÉFINI RECOUVERT D'UNE COUCHE DE DENSITÉ UNIFORME.

On peut assimiler le plan à un disque de très grand rayon qu'on voit sous l'angle 2π . L'action exercée sur un point A par une couche homogène, de densité σ , répandue sur un plan indéfini, est normale au plan, indépendante de la distance du point au plan et égale à $2\pi\sigma$.

35. Champ de révolution autour d'un axe pour les points voisins de cet axe.

Au début de l'étude du Magnétisme, on comprend généralement assez mal l'importance de la condition $\Delta V = 0$. Pour qu'elle

apparaisse nettement, nous allons montrer qu'un champ de révolution autour d'un axe Ox est complètement déterminé au voisinage de cet axe par ses valeurs sur l'axe, quelle que soit du reste sa provenance (aimant cylindrique, bobine, ...).

En coordonnées cylindriques x, ρ , posons, conformément à l'énoncé :

$$V = V_0 + V_2 \rho^2 + V_4 \rho^4 + V_6 \rho^6 + \dots \quad (1)$$

V_0, V_2, \dots sont des fonctions de la coordonnée x comptée parallèlement à l'axe; ρ est la distance à l'axe. Nous n'introduisons que les puissances paires de ρ , parce que le phénomène est de révolution autour de Ox : il est le même pour $+\rho$ et $-\rho$.

La condition $\Delta V = 0$, exprimée en coordonnées cylindriques (*Mécanique rationnelle*, § 48), est :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = 0. \quad (2)$$

Introduisons (1) dans (2); écrivons que tous les coefficients de ρ sont identiquement nuls; d'où la condition :

$$\frac{\partial^2 V_{2n}}{\partial x^2} + (2n + 2)^2 V_{2n+2} = 0,$$

qui permet de déterminer les fonctions V de proche en proche.

On trouve :

$$V = V_0 - \frac{\rho^2}{4} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\rho^4}{64} \frac{\partial^4 V_0}{\partial x^4} - \frac{\rho^6}{2304} \frac{\partial^6 V_0}{\partial x^6} + \dots,$$

que nous écrirons pour simplifier :

$$V = -a + \frac{\rho^2}{4} a'' - \frac{\rho^4}{64} a'''' + \dots = -(a + b\rho^2 + \dots).$$

Près de l'axe, on peut limiter le développement à ses deux premiers termes. Le coefficient du terme en ρ^2 est nul sur le plan normal à l'axe pour lequel $a'' = 0$, c'est-à-dire pour lequel la force suivant l'axe passe par un maximum.

Malgré son aspect rébarbatif, le théorème précédent a des applications techniques fort importantes.

36. Discontinuité produite par une couche agissante mince.

Appelons 1 et 2 les régions du milieu situées de part et d'autre d'une couche agissante extrêmement mince. Comparons les forces en deux points A et B situés dans les milieux 1 et 2, sur une normale à la couche et infiniment près de celle-ci.

La couche est étendue sur une surface quelconque; la densité σ est variable d'un point à l'autre. Sur les points A et B, l'action de la couche se divise en deux parties : celle de l'élément voisin de A et B qui agit comme un plan indéfini de densité invariable σ ; celle

de tout le reste de la couche. Il faut ajouter les actions des corps agissants, autres que la couche, situés à des distances finies des points A et B.

Ceci posé, soit F_1 la composante, normale à la couche, de la force au point A (milieu 1); elle est comptée positivement vers le milieu 1.

Soit de même F_2 la composante, normale à la couche, de la force au point B (milieu 2); elle est comptée positivement vers le milieu 2.

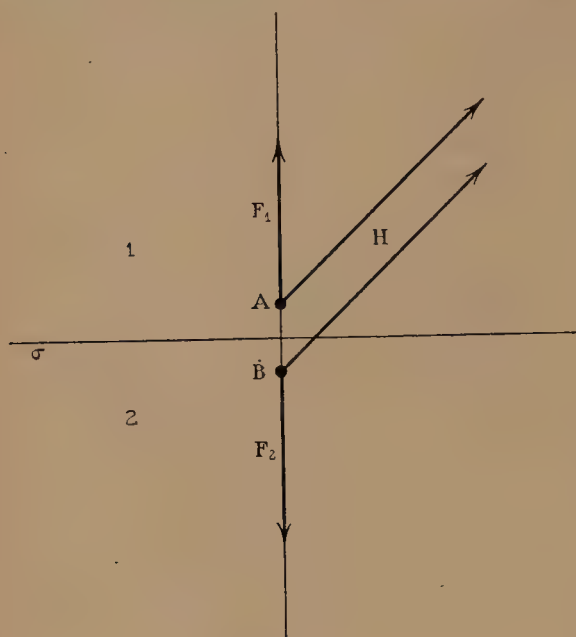


Fig. 27.

L'élément de la couche très voisin de A et de B, élément qui agit comme un plan indéfini de densité constante σ , exerce une action normale égale à $2\pi\sigma$. Si cet élément existait seul, on aurait donc (fig. 27) :

$$F_1 = F_2 = 2\pi\sigma,$$

$$F_1 + F_2 = 4\pi\sigma;$$

la discontinuité normale serait $4\pi\sigma$.

A l'action de cet élément, il faut joindre le champ continu H dû au reste de la couche agissante et aux corps qui sont à distance finie de A

et de B; puisque leur action est continue et que les points A et B sont infiniment voisins, la composante normale qu'ils produisent est la même en A et en B. Ils ne modifient donc pas la discontinuité normale qui reste égale à $4\pi\sigma$. Nous avons encore :

$$F_1 + F_2 = 4\pi\sigma.$$

où F_1 et F_2 sont maintenant les composantes normales totales.

Repérons les normales vers les deux milieux au moyen des distances n_1 et n_2 comptées sur elles à partir d'origines quelconques et dans les sens convenus. On a (§ 7) :

$$F_1 = -\frac{\partial V}{\partial n_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial V}{\partial n_2}; \quad \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = 0.$$

Telle est l'équation de passage à travers une couche agissante infiniment mince.

La discontinuité ne porte que sur la composante normale à la couche; la composante tangentielle reste continue.

CHAPITRE III

AIMANTS. — MILIEUX POLARISÉS

37. Aimants temporaires, aimants permanents.

1^o. — On sait que la limaille de fer s'attache à la lime. Un outil quelconque en acier trempé (ciseau à bois, pince coupante, ciseaux



Fig. 28.

ordinaires, rasoir, ...), plongé dans la limaille de fer, entraîne avec lui, quand on le retire, des houppes de limaille *qui sont au moins au nombre de deux* : l'outil est un *aimant* ; il possède des propriétés *magnétiques*. Les régions où sont suspendues les houppes s'appellent

pôles; il existe au moins deux pôles. La figure 28 montre différents aimants qu'on a plongés dans la limaille; ils tiennent suspendues leurs houppes de limaille.

L'expérience ne réussit pas avec un bout de fil de fer; ce n'est pas un aimant.

2°. — Mais accolons ce fil de fer à l'un des outils précédemment essayés, de manière que l'une de ses extrémités dépasse l'outil; plongeons-la dans la limaille, retirons-la. Elle entraîne une houppe :

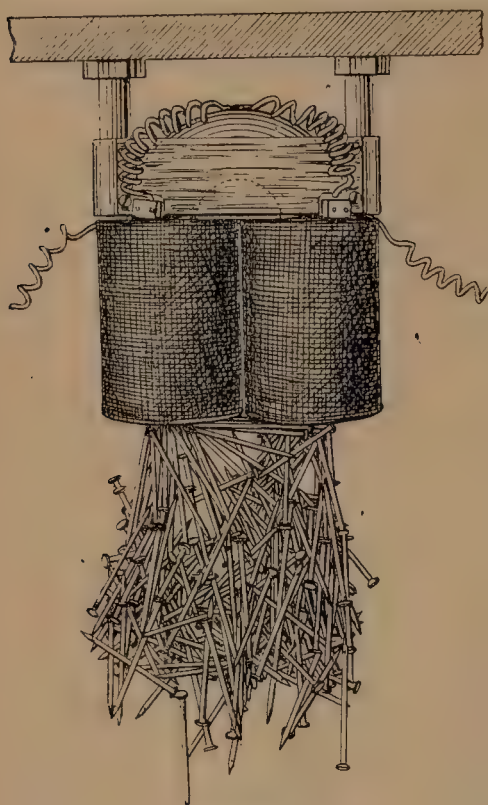


Fig. 29.

le fil de fer est devenu un aimant. Éloignons-le de l'outil; il perd son aimantation; c'était donc un aimant *temporaire*, tandis que l'outil est un aimant *permanent*.

Procurons-nous des aiguilles à tricoter et trempions-les *sec* de manière qu'elles se brisent sans se tordre. Vérifions qu'elles ne sont pas des aimants. Re commençons avec elles l'expérience du fil de fer; nous constatons que non seulement elles s'aimantent au contact de l'outil, mais qu'elles conservent ensuite leur aimantation. Ce qui, du reste, était à prévoir, puisque les outils trempés sont des aimants permanents.

Nous apprendrons plus tard à obtenir une aimantation *régulière* intense. Nous dirons qu'une aiguille est *régulièrement aimantée* quand, plongée dans la limaille et sortie horizontalement, elle

conserve deux houppes bien symétriques à ses extrémités.

3°. — L'expérience avec la limaille s'explique par la propriété des grains de se transformer en aimants quand ils sont à *proximité* d'un aimant. Devenant eux-mêmes des aimants, ils agissent sur les grains voisins. Du reste, l'emploi de la limaille n'est utile que pour les aimants de petites dimensions. Pour de forts aimants, les grains de limaille peuvent être remplacés par des clous. La figure 29 montre un électro-aimant soutenant 2^{kg},500 de pointes de 8 centimètres de longueur.

38. Pôle nord et pôle sud. Méridiens magnétique et géographique.

1°. — Un fil de cocon supporte un étrier de papier (fig. 30) dans

lequel nous introduisons une aiguille cylindrique régulièrement aimantée; nous nous arrangeons de manière qu'elle soit horizontale. Le support du fil est en cuivre (métal non magnétique).

L'aiguille tourne dans le plan horizontal jusqu'à se mettre dans un plan vertical bien déterminé (*méridien magnétique*), faisant en chaque lieu, avec le *méridien géographique*, un angle appelé *déclinaison*; suivant le lieu, la déclinaison varie de 0° à une vingtaine de degrés. Une des extrémités de l'aiguille peut donc, sans ambiguïté, s'appeler *pôle nord*; l'autre est le *pôle sud*.

Quelle que soit l'aiguille utilisée, le plan vertical d'équilibre est toujours le même.

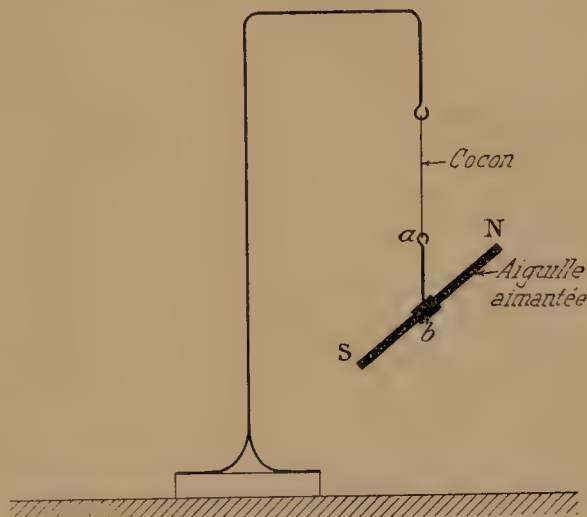


Fig. 30.

2°. — Sur plusieurs aiguilles, marquons les pôles nord.

Prenons une aiguille à la main; approchons un de ses pôles de l'une des extrémités de l'aiguille suspendue : suivant les cas, nous constatons une attraction ou une répulsion. Le résultat des expériences est résumé dans la règle suivante : *Deux pôles de même nom se repoussent, deux pôles de noms contraires s'attirent.*

3°. — Prenons enfin un outil d'acier trempé de forme quelconque; plongeons-le dans la limaille; marquons les endroits où se forment des houpes, après les avoir arrachées.

Approchons de l'aiguille suspendue les pôles ainsi déterminés; nous vérifions que les pôles de l'outil se conduisent soit comme des pôles nord, soit comme des pôles sud; ils peuvent être désignés sans ambiguïté. Nous constatons de plus que tous les pôles d'un aimant ne sont jamais de même nom; ils peuvent, par exemple, être tous *nord*, moins un qui sera *sud*.

39. Polarisation.

1°. — Quand ces phénomènes furent classés, au milieu du *xviii^e* siècle, on avait déjà reconnu l'existence de deux espèces d'électricité. Par analogie, on supposa dans les aimants un fluide nord et un fluide sud. L'expérience suivante montra bientôt que les phénomènes magnétiques sont très différents des phénomènes électriques.

Vérifions qu'une longue aiguille à tricoter NS (fig. 31) est *régulièrement aimantée*. Cassons-la en deux morceaux : *ces morceaux sont*

des aimants complets; ils ont chacun deux pôles de noms contraires et donnent deux houppes symétriques dans la limaille. La même expérience réussit sur chacun des fragments, et ainsi de suite.

Si donc la limaille ne s'attachait pas au milieu de l'aiguille avant qu'elle ne fût brisée, il faut conclure, non pas qu'elle n'était aimantée qu'aux extrémités, mais que l'aimantation ne produisait des

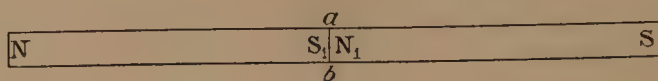


Fig. 31.

effets visibles qu'aux extrémités; ce qui est bien différent. Si l'aiguille contenait du fluide nord au pôle nord et du fluide sud au pôle sud, on pourrait isoler ces fluides, ce que l'expérience démontre impossible. Pour petit que soit le fragment obtenu par des cassures successives, il semble toujours contenir en quantités égales la même quantité des deux fluides.

2°. — L'expérience inverse fournit l'explication du phénomène.

Reprenons les deux fragments; attachons-les sur une mince planchette, en plaçant en regard les pôles de noms contraires que la

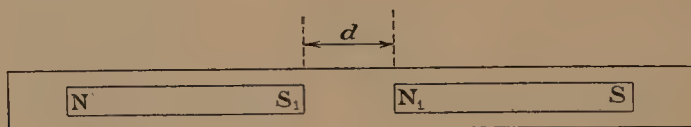


Fig. 32.

cassure a fait apparaître. Modifions d'une expérience à l'autre la distance d (fig. 32). Plongeons l'appareil dans la limaille.

Si d est grand, les houppes de chaque fragment sont symétriques. Mais pour d petit, les houppes S_1 et N_1 tendent à se rejoindre; elles diminuent jusqu'à s'annuler pour $d=0$. Les pôles N_1 et S_1 semblent avoir disparu; la limaille ne s'attache plus qu'en N et S .

Voici l'explication du phénomène.

Les éléments de limaille sont attirés par les aimants, parce qu'ils sont eux-mêmes transformés en des aimants, tout comme le bout de fil de fer du § 37. Si l'on présente l'extrémité A d'un bout de fil de fer AB au pôle N d'un aimant, il naît en A un pôle sud qui est attiré par le pôle N; il naît en B un pôle nord qui est repoussé. La preuve est que le bout de fil de fer ou le grain de limaille ne se mettent pas à plat contre l'aimant: ils se hérissent; ils ne touchent l'aimant que par un de leurs bouts (Voir la figure 28 et les deux intéressantes figures 49 et 50).

Supposons le grain de limaille présenté à deux pôles égaux N_1

et S_1 peu distants. Il résulte de ce qui précède qu'il tend à *faire pont* d'un pôle à l'autre. C'est ce que montre l'expérience (fig. 28).

Mais quand les pôles N_1 et S_1 viennent au contact, un bout du grain de limaille tend à se transformer en un pôle sud sous l'influence de N_1 , en un pôle nord sous l'influence égale de S_1 . Les actions se contre-balancent : le grain ne s'aimante pas et n'est pas attiré.

3°. — HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE LA POLARISATION.

Ces expériences ont conduit à la notion fondamentale de *polarisation*.

Puisque, si petit que soit le fragment obtenu par cassure, il se présente comme un aimant complet, il nous est loisible de conserver *par manière de parler* nos fluides nord (positif) et sud (négatif); mais nous les localisons *en quantités égales* dans les molécules elles-mêmes, sûrs ainsi que l'expérience directe ne nous contredira plus.

Nous imaginons donc des molécules polarisées, aimants élémentaires, constituant par leur juxtaposition les aimants naturels.

Nous postulons que les fluides $\pm m$ contenus dans ces molécules agissent en raison inverse du carré de la distance, INDÉPENDAMMENT DE LA NATURE DU MILIEU.

Le lecteur n'oubliera pas ce dernier membre de phrase : que le milieu soit le vide ou du fer, nous posons qu'à la même distance, l'action d'une masse donnée est exactement la même. On comprendra plus tard comment cette proposition n'est pas contradictoire avec le fait que l'introduction d'un barreau de fer doux entre deux aimants modifie complètement leurs actions mutuelles.

Il ne reste plus qu'à mettre en œuvre ces hypothèses, en tirer les conclusions et comparer avec les phénomènes. Faut-il prévenir le lecteur que personne n'a jamais cru à l'existence *objective* de ces fluides? Voici bientôt cent ans qu'Ampère expliqua le magnétisme par des courants moléculaires, et soixante que Maxwell prouva que toute autre hypothèse implique contradiction avec un ensemble d'interprétations bien coordonnées. Si donc de nos jours la théorie d'Ampère reparaît avec fracas, le lecteur n'y verra que l'effet du battage auquel nous ont accoutumés certains physiciens, désireux de sembler découvrir ce que tout le monde devrait savoir. Leur réussite ne prouve que l'ignorance et la platitude générales. Je revien-drai du reste plus longuement sur leurs merveilleux travaux.

4°. — MOLÉCULE POLARISÉE OU DOUBLET.

Ainsi le magnétisme est assurément un phénomène moléculaire; nous appelons ici *molécules* des portions de matière si petites, qu'aucune méthode mécanique ne nous permet de les couper en deux, de façon à obtenir un pôle nord séparé d'un pôle sud.

Voici la définition provisoire qui nous suffira dans toute la première partie de ce Cours.

Une molécule polarisée (*aimant élémentaire ou doublet*) est constituée par deux petites masses $+m$ et $-m$ situées à une distance dl l'une de l'autre.

L'axe de la molécule est la direction qui joint les masses.

Le moment dM de la molécule est le produit : $dM = mdl$; on peut le représenter par un vecteur parallèle à l'axe de la molécule, dirigé de la masse $-m$ à la masse $+m$, de longueur proportionnelle à dM .

Cherchons quelles conséquences générales résultent de la constitution polarisée des aimants. Nous étudierons ensuite *in abstracto* quelques cas simples.

40. Potentiel d'un doublet en un point extérieur.

1°. — Cherchons le potentiel du doublet au point A.

Joignons le point A aux deux masses $+m$ et $-m$; soit θ l'angle que fait avec l'axe du doublet l'une ou l'autre des droites AB ou AC.

Posons : $\overline{AC} = R_1$, $AB = R_2$.

Ces distances diffèrent infiniment peu. Le potentiel cherché est :

$$dV = m \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = m \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = \frac{mdl \cdot \cos \theta}{R^2} = \frac{dM \cos \theta}{R^2}.$$

R est la distance du point A au doublet.

Il résulte de cette expression du potentiel que le moment magnétique jouit des propriétés ordinaires d'un vecteur; en particulier, il peut être remplacé par ses composantes suivant trois axes rectangulaires.

Soient en effet α, β, γ , les cosinus directeurs du moment magnétique; soient λ, μ, ν , les cosinus directeurs de la droite qui joint la molécule polarisée au point A; on a :

$$dM \cdot \cos \theta = dM (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) = \alpha dM \cdot \lambda + \beta dM \cdot \mu + \gamma dM \cdot \nu.$$

La somme des potentiels, calculés avec les composantes du moment, redonne bien le potentiel total trouvé ci-dessus.

2°. — AUTRE EXPRESSION DU POTENTIEL.

En vertu du théorème précédent, considérons la composante du doublet suivant l'axe des x .

Le potentiel créé au point A situé à la distance R est :

$$dV = m \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = m dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = dM \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = dM \frac{\partial p}{\partial x},$$

en posant, pour abréger, $p = 1 : R$.

L'observateur va de la masse négative à la masse positive; si la distance R diminue, si par conséquent son inverse p croît, le potentiel dû au doublet est positif au point considéré.

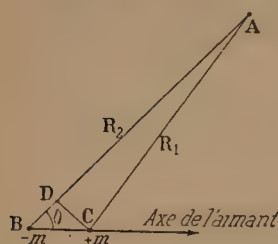


Fig. 33.

Les composantes de la force au point A de coordonnées x', y', z' sont :

$$X = -dM \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x} \left(\frac{1}{R} \right),$$

$$Y = -dM \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x} \left(\frac{1}{R} \right),$$

$$Z = -dM \frac{\partial^2}{\partial z' \partial x} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Mais on a : $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$.

Les dérivées par rapport à x et x' , y et y' , z et z' , sont respectivement égales et de signes contraires ; d'où :

$$X = dM \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right), \quad Y = dM \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{R} \right), \quad Z = dM \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Ces expressions seront d'un emploi continu.

On remarquera que le potentiel d'un doublet est en raison inverse du carré, *la force est en raison inverse du cube de la distance au point agi*.

Ainsi de l'existence simultanée des masses positives et négatives agissant en sens inverses, résulte que la loi élémentaire (en raison inverse du CARRÉ de la distance) disparaît autant dire toujours. C'est la différence des actions de masses égales situées à des distances différentes qui intervient ; par suite, la loi intégrale d'action est en raison inverse du CUBE de la distance.

41. Intensité de polarisation ou d'aimantation. Remplacement d'une constitution discontinue par une constitution continue.

1°. — Soit un milieu constitué par un nombre infini d'aimants élémentaires juxtaposés dont les moments et les axes varient d'une manière continue. Nous poserons que le moment magnétique d'un élément de volume est proportionnel au produit du volume par une quantité vectorielle \mathfrak{J} que nous appellerons *intensité de polarisation* ou *d'aimantation* : $dM = \mathfrak{J} dv$.

\mathfrak{J} est un vecteur dont nous représenterons par A, B, C, les composantes parallèles à trois axes rectangulaires.

Le milieu ainsi constitué est un aimant.

Calculons le potentiel en un point extérieur.

Chaque élément de volume équivaut à trois aimants de moments :

$$Adv, \quad Bdv, \quad Cdv,$$

respectivement dirigés suivant les axes Ox , Oy , Oz .

Les potentiels s'ajoutant algébriquement, on a immédiatement (§ 40) :

$$V = \iiint \left(A \frac{\partial p}{\partial x} + B \frac{\partial p}{\partial y} + C \frac{\partial p}{\partial z} \right) dv.$$

L'intégrale est étendue à tout le volume; $p = 1/R$, est l'inverse de la distance de l'élément considéré au point pour lequel on calcule le potentiel.

2°. — Intégrons par parties; V devient :

$$\iint p(A dy dz + B dz dx + C dx dy) - \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) p dv.$$

Soient α, β, γ , les cosinus directeurs de la normale à la surface, normale dirigée vers l'extérieur de celle-ci. Soit dS l'élément de surface. On a :

$$dy dz = \alpha dS, \quad dz dx = \beta dS, \quad dx dy = \gamma dS.$$

Posons :

$$\sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma, \quad \rho = - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

σ est la projection du vecteur \vec{J} sur la normale à la surface dirigée vers l'extérieur.

Soit θ l'angle que fait ce vecteur avec la normale (fig. 34).

On a :

$$\sigma = \vec{J} \cos \theta;$$

D'ailleurs (§ 19) :

$$\rho = - \text{Div. } \vec{J}.$$

3°. — Le potentiel se met généralement sous la forme (§ 22) :

$$V = \iint \frac{\sigma dS}{R} + \iiint \frac{\rho dv}{R}.$$

Comparons cette expression à l'expression trouvée ci-dessus.

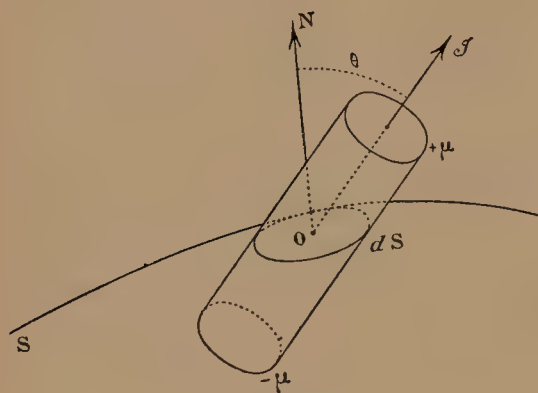


Fig. 34.

Tout se passe comme s'il existait :
en tout point de la surface de l'aimant, une densité superficielle :

$$\sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma = \vec{J} \cos \theta;$$

en tout point à l'intérieur de l'aimant, une densité de volume :

$$\rho = - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = - \text{Div. } \vec{J}.$$

Ce qui est une proposition fondamentale.

42. Induction.

1°. — Soient X, Y, Z , la force due à toutes les masses existant soit dans l'aimant, soit hors de l'aimant : ces masses sont définies dans

l'aimant par les densités σ et ρ . Nous venons de voir en effet que tout se passe comme s'il existait sur l'aimant une couche de densité σ , dans l'aimant une densité de volume ρ . Ces masses agissent par hypothèse en raison inverse du carré des distances.

On appelle *induction* \mathfrak{B} le vecteur dont les composantes sont :

$$a = X + 4\pi A, \quad b = Y + 4\pi B, \quad c = Z + 4\pi C.$$

Cherchons le flux de ce vecteur à travers une surface fermée quelconque; il a pour expression :

$$\iint (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) dS + 4\pi \iint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dS;$$

α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale dirigée vers l'extérieur de la surface fermée quelconque considérée.

Or on a :

$$\iint (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) dS = \Sigma 4\pi m,$$

$\Sigma 4\pi m$ représente la somme des masses qui sont dans la surface. On peut écrire la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} & 4\pi \iint (A dy dz + B dz dx + C dx dy) \\ &= 4\pi \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= -4\pi \iiint \rho dv = -4\pi \Sigma m = -\Sigma 4\pi m. \end{aligned}$$

Donc la somme des deux intégrales est nulle.

Le flux du vecteur induction à travers une surface fermée quelconque est nul. Il est le même à travers toute surface limitée par un même contour. D'après le § 19, les composantes a, b, c du vecteur induction satisfont à l'équation :

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \text{Div. } \mathfrak{B} = 0.$$

2°. — Comme ce théorème est capital, précisons par une représentation matérielle. Soit S (fig. 34) la surface fermée d'intégration; une molécule polarisée de base ds , de longueur l , contenant les masses $\pm d\mu$, coupe la surface S suivant l'aire dS telle qu'on ait :

$$ds = dS \cdot \cos \theta.$$

On a par définition :

$$d\mu \cdot l = dM = \mathfrak{J} l ds, \quad d\mu = \mathfrak{J} \cos \theta : dS.$$

Appliquons à toutes les molécules coupées par la surface :

$$\iint d\mu = \iint \mathfrak{J} \cos \theta \cdot dS = \iint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dS.$$

Évaluons maintenant le magnétisme libre total à l'intérieur de la

surface S . Les molécules qui y sont contenues tout entières, ne fournissent rien à la somme.

Les molécules qui sont coupées fournissent une quantité :

$$-\iint d\mu.$$

D'où, en définitive :

$$4\pi \iint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dS = -4\pi \Sigma m.$$

3°. — INTERPRÉTATION DU VECTEUR INDUCTION.

En tout point de l'air, la force est définie sans ambiguïté. A l'intérieur d'un corps aimanté il n'en est plus ainsi. Nous devons *creuser une cavité* à l'intérieur de laquelle la mesure est censée faite.

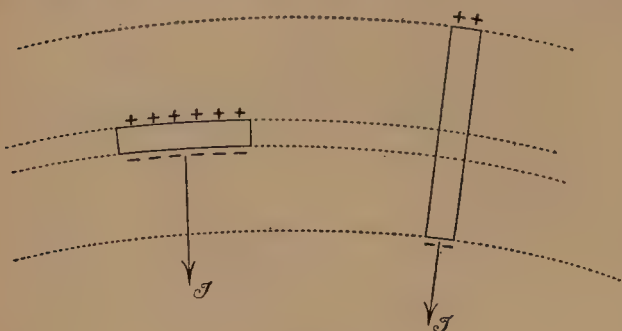


Fig. 35.

Si la cavité est un cylindre *mince et long* parallèle à l'aimantation (fig. 35. à droite), la densité du magnétisme libre sur les parois latérales est nulle (§ 41); la densité sur les fonds ne change pas sensiblement la force en tous les points qui ne sont pas contre ces fonds.

En définitive, la force conserve la même valeur X, Y, Z , que s'il n'existait aucune cavité.

Si, au contraire, la cavité est un cylindre *plat* (fig. 35 à gauche), le magnétisme libre des fonds intervient; il faut ajouter au vecteur force X, Y, Z , précédemment défini, l'action de deux plaques portant des couches égales et de signes contraires, de densité \mathfrak{J} : c'est une force $4\pi\mathfrak{J}$ normale aux bases du cylindre plat (§ 34). Les composantes de la force sont dès lors a, b, c ; elle devient identique à l'induction.

43. Énergie potentielle d'un volume polarisé.

On appelle *énergie potentielle* d'un corps C , le travail total qu'il faut dépenser pour l'amener de l'infini (où par hypothèse le champ dû aux corps autres que C est nul, § 5) dans sa position actuelle.

Soit m_1, m_2, \dots des masses éparses à l'infini; pour les amener aux points où les potentiels sont V_1, V_2, \dots , il faut dépenser le travail :

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots = \Sigma m V.$$

Ceci posé, raisonnons sur une molécule polarisée C (fig. 36). Le potentiel dû aux corps agissants autres que C , est V là où se trouve la masse $+m$; il est V' là où se trouve la masse $-m$. Le travail

qu'il a fallu dépenser pour amener la molécule de l'infini dans sa position actuelle (ou le travail égal que la molécule restituerait si, obéissant aux forces du champ, elle s'en retournait à l'infini) est :

$$mV - mV' = m(V - V') = m \frac{\partial V}{\partial n} dn = dM \cdot \frac{\partial V}{\partial n};$$

la variable n est comptée du pôle négatif au pôle positif de la molécule. L'énergie potentielle est donc le produit du moment de la

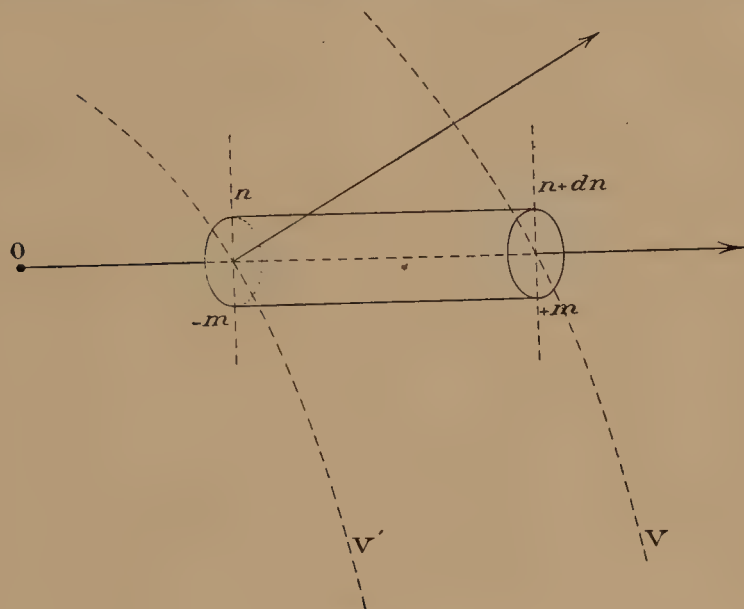


Fig. 36.

molécule par la projection (changée de signe) de la force sur la direction de ce moment. C'est aussi bien le produit du moment de la molécule, par la force changée de signe, et par le cosinus de l'angle que font les deux directions :

$$\left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv.$$

L'énergie potentielle totale a pour expression :

$$W = \iiint \left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv. \quad (1)$$

Intégrant par parties, et comparant aux résultats du § 41, on a :

$$W = \iint V_{\sigma} dS + \iiint V_{\rho} dv; \quad (2)$$

expression qu'on peut écrire immédiatement.

L'aimantation du corps étant rigide, le champ qu'elle produit n'intervient pas; le potentiel V des formules (1) et (2) est dû à toutes les masses agissantes, *défalcation faite de celles contenues par le corps dont nous cherchons l'énergie potentielle.*

44. Solénoïde élémentaire.

1°. — Un corps dont les dimensions transversales sont très petites est un *solénoïde élémentaire*, si l'intensité de polarisation \mathfrak{J} est partout tangente à la surface latérale, et si le produit : $\Phi = \mathfrak{J}s$ de l'intensité par la section droite s est partout constant.

Soit dl un élément de longueur; son *moment* est par définition :

$$dM = \mathfrak{J}sdl = \Phi dl. \quad (1)$$

L'axe de ce moment est la direction même du filet au point considéré.

Calculons le potentiel en un point extérieur.

2°. — La densité superficielle σ est nulle en tout point de la surface latérale, puisque le vecteur \mathfrak{J} est tangent à cette surface. D'après l'équation (1), le flux du vecteur \mathfrak{J} tout le long du solénoïde est conservatif : donc la densité de volume ρ est nulle.

Autrement dit, le moment dM étant proportionnel à dl , les masses $\pm m$ sont égales pour tous les éléments dl en lesquels on peut diviser le solénoïde. L'action sur tout point extérieur de la masse $+m$ d'un élément est exactement compensée par l'action de la masse $-m$ de l'élément consécutif, puisque ces masses sont accolées.

Bref, n'agissent que les masses qui couvrent les *surfaces terminales* du solénoïde, *surfaces auxquelles le vecteur est normal*.

Soit s l'aire de l'une d'elles; elle contient une masse :

$$\mathfrak{J}s = \Phi, \quad \text{puisque (§ 41) : } \mathfrak{J} = \sigma.$$

Le potentiel au point A est donc :

$$V = \Phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Il ne dépend que de la position des extrémités du solénoïde.

3°. — Appliquons la formule générale :

$$dV = \frac{dM \cos \theta}{R^2} = \Phi \frac{dl \cos \theta}{R^2}.$$

Quand les dl sont pris positivement dans le sens du vecteur \mathfrak{J} , on a :

$$dR = -dl \cos \theta, \quad dV = -\Phi \frac{dR}{R^2} = \Phi d\left(\frac{1}{R}\right), \quad V = \Phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

qui est la formule (2).

45. Aimants solénoïdaux.

On appelle *aimant solénoïdal* un aimant constitué par des solénoïdes élémentaires partant tous de la surface de l'aimant et aboutissant tous à cette surface. Il revient au même de dire que c'est un

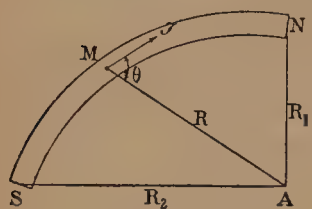


Fig. 37.

aimant dans lequel il n'y a de magnétisme libre qu'à la surface. Le vecteur aimantation satisfait partout à la condition :

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\rho = 0.$$

L'un de ces aimants est fondamental : c'est le *solénoïde* ; les filets magnétiques sont rectilignes. Un solénoïde est un aimant cylindrique, terminé par des sections droites et dans lequel l'intensité d'aimantation, constante en direction et en grandeur, est parallèle aux génératrices du cylindre. Il n'existe de magnétisme libre que sur les bases ; la densité superficielle γ est numériquement égale à l'intensité d'aimantation.

Aimants permanents dans un champ uniforme.

46. Moment magnétique total d'un aimant permanent.

1°. — Les aimants sont dits *permanents* quand la polarisation est *rigide*, c'est-à-dire qu'elle n'est pas sensiblement modifiée par un champ extérieur. Un aimant permanent est donc complètement défini quand on donne en tous ses points les composantes A , B , C , de l'aimantation.

Plaçons-le dans un champ uniforme : *l'expérience montre que l'espace qui entoure la Terre peut être très exactement considéré comme tel, loin des aimants artificiels et des masses importantes de fer.* Déterminons son mouvement comme conséquence de la théorie précédente ; comparons aux phénomènes.

Sur chaque masse élémentaire m appartenant à l'aimant agit, outre le champ uniforme, le champ dû à toutes les autres masses appartenant à l'aimant. Les actions réciproques de ces masses ont même directrice, sont deux à deux égales et de signes contraires : elles déforment le corps (à la vérité, d'une manière négligeable), mais ne peuvent lui communiquer un mouvement d'ensemble. Nous n'avons à tenir compte que du champ dû aux masses extérieures qui, par hypothèse, est uniforme et d'intensité H .

L'expérience fondamentale de l'aimant brisé (§ 39) nous a conduit à distinguer le magnétisme *libre* du magnétisme *total*. Le magnétisme $+$ d'une molécule polarisée peut être plus ou moins complètement annihilé par le magnétisme $-$ de la molécule polarisée voisine. Nous venons même de définir (§ 45) des aimants où le magnétisme libre n'existe plus qu'à la surface.

Nous savons que le *magnétisme libre* d'un aimant est défini par une densité de volume ρ , et une densité de surface σ :

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right), \quad \sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

2°. — RÉSULTANTE DES FORCES.

La somme algébrique des *masses magnétiques libres* est nulle, puisque la somme totale est nulle et que la compensation porte toujours sur des masses de signes contraires *égales* (§ 39).

Sur toutes les masses élémentaires libres m , le champ H produit par définition des forces mH , appliquées aux masses, parallèles à la direction du champ. Transportons-les au centre de gravité de l'aimant; elles donnent une résultante nulle :

$$\sum mH = H \sum m = 0.$$

Donc les déplacements de l'aimant (abstraction faite de la pesanteur) auront lieu sans déplacement du centre de gravité; ils se réduiront à une rotation autour de ce point. (*Mécanique rationnelle*, §§ 298 et 518.)

Conformément à ce résultat, un morceau d'acier (pesé avec une balance formée de matières non magnétiques) a exactement le même poids, qu'il soit aimanté ou non, quelle que soit son orientation sur le plateau de la balance, cela malgré l'existence du champ terrestre capable (nous le savons) de produire une orientation.

3°. — RÉSULTANTE DES COUPLES.

Considérons à part les masses *libres* positives m ; déterminons les coordonnées de leur centre de gravité P par les formules ordinaires :

$$x_1 = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad y_1 = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad z_1 = \frac{\sum mz}{\sum m}.$$

Au point P (*pôle positif*) est appliquée la résultante des forces qu'exerce le champ uniforme sur l'ensemble des masses libres positives; elle est dirigée parallèlement au champ et dans le même sens; son intensité est : $H \sum m$.

Opérant de même sur les masses négatives *libres* m' , nous déterminons un point N , centre de gravité de ces masses; c'est le *pôle négatif*, point d'application de la résultante. Cette résultante est parallèle au champ, dirigée en sens contraire; son intensité est :

$$H \sum m'.$$

Or $\sum m = \sum m', \quad H \sum m = H \sum m'.$

En définitive, les pôles sont les centres de gravité des masses libres positives et négatives considérées isolément. L'action du champ uniforme se réduit à deux forces parallèles au champ, appliquées aux pôles et de grandeur $H \sum m$. Elles forment un couple.

47. Moment magnétique d'un aimant.

1°. — Soit $\pm \sum m$ la somme des masses *libres* totales positives ou négatives; soit l leur distance.

On appelle *moment magnétique* de l'aimant le produit (fig. 38) :

$$M = l \Sigma m.$$

Le couple auquel l'aimant est soumis dans le champ H a pour moment :

$$C = Hl \Sigma m \cdot \sin \varphi = MH \cdot \sin \varphi.$$

Il est représenté par un vecteur normal au plan des vecteurs M et H , égal à l'aire du parallélogramme construit sur ces vec-

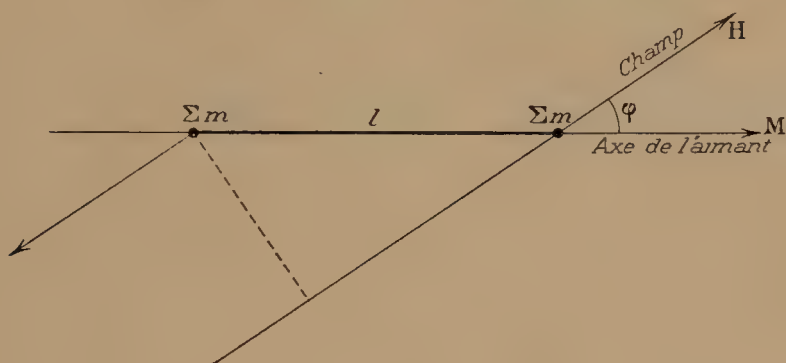


Fig. 38.

teurs. C'est par définition le *produit vectoriel* de ces deux vecteurs. Nous écrirons :

$$C = M \wedge H,$$

puisque le couple tend à amener le vecteur M sur le vecteur H (§ 3).

2°. — Nous pouvons obtenir le même résultat par la composition des moments magnétiques des éléments de volume de l'aimant sur lesquels le champ extérieur produit des couples élémentaires.

Par définition, le moment magnétique d'un élément dv a pour composantes :

$$Adv, \quad Bdv, \quad Cdv.$$

Le moment magnétique M de l'aimant est la résultante de ces vecteurs. Soit λ, μ, ν , les cosinus directeurs de l'axe de l'aimant; on a :

$$M_\lambda = \iiint Adv, \quad M_\mu = \iiint Bdv, \quad M_\nu = \iiint Cdv. \quad (1)$$

3°. — Soit d'une manière générale X, Y, Z les composantes du champ en un point. Il exerce sur la molécule polarisée un couple dont les composantes sont :

$$(BZ - CY)dv, \quad (CX - AZ)dv, \quad (AY - BX)dv.$$

Dans le cas général, le calcul du couple résultant est impossible parce qu'on ne connaît pas la distribution du magnétisme dans l'aimant.

Mais supposons le champ uniforme; soit λ' , μ' , ν' , ses cosinus directeurs. Les composantes du couple résultant sont :

$$\iiint (BZ - CY) dv = MH(\mu\nu' - \nu\mu'),$$

$$\iiint (CX - AZ) dv = MH(\nu\lambda' - \lambda\nu'),$$

$$\iiint (AY - BX) dv = MH(\lambda\mu' - \mu\lambda').$$

Elles ne contiennent plus que les composantes (1) du moment magnétique total, qui intervient comme paramètre caractéristique.

L'axe du couple résultant a pour grandeur :

$$MH\sqrt{(\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 + (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2} = MH \cdot \sin \varphi,$$

formule trouvée ci-dessus.

48. Énergie potentielle d'un aimant dans un champ uniforme.

Appliquons la formule générale du § 43 :

$$\begin{aligned} W &= \iiint \left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \iiint A dv + \frac{\partial V}{\partial y} \iiint B dv + \frac{\partial V}{\partial z} \iiint C dv, \end{aligned}$$

puisque le champ est uniforme par hypothèse.

On peut encore écrire en utilisant les notations du § 47 :

$$\dot{W} = -M(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = -MH \cdot \cos \varphi,$$

où φ est l'angle que font les vecteurs M et H .

Un aimant de moment M vient de l'infini en un point où le champ est H . L'énergie potentielle à l'infini est nulle par convention. Le travail disponible (diminution de l'énergie potentielle) est $MH \cos \varphi$. Il est positif et égal à MH , si l'aimant est dans sa position d'équilibre stable; il est négatif et égal à $-HM$, si l'aimant est dans sa position d'équilibre instable.

Faisons-le tourner d'un angle φ , à partir de la position d'équilibre stable, autour d'un axe normal au champ; le travail est :

$$-dW = -d\varphi \cdot MH \sin \varphi;$$

cela signifie que l'aimant est soumis à un couple $C = MH \sin \varphi$, qui tend à le ramener à la position d'équilibre.

Le travail disponible, quand l'aimant passe de la position d'équilibre instable à la position d'équilibre stable, est :

$$\int_0^\pi MH \sin \varphi \cdot d\varphi = 2MH,$$

conformément au résultat énoncé ci-dessus.

49. Moment magnétique des aimants solénoïdaux.

La position des pôles se calcule en utilisant seulement le magnétisme libre, c'est-à-dire en laissant de côté les éléments polarisés dont les pôles se neutralisent. Pour calculer le moment magnétique, il est également légitime d'utiliser tous les éléments polarisés, que leur magnétisme soit ou non neutralisé par le magnétisme d'éléments voisins; cela revient à introduire des moments élémentaires égaux et opposés qui disparaissent dans la somme.

1°. — AIMANT CYLINDRIQUE, BASES NORMALES AUX GÉNÉRATRICES.

C'est le solénoïde proprement dit. Soient l la longueur, S la section droite, $V = lS$ le volume. Soit \mathfrak{J} l'intensité d'aimantation constante et parallèle aux génératrices.

La densité superficielle σ sur les bases est égale à \mathfrak{J} ; la densité de volume est partout nulle.

Les pôles de l'aimant sont aux centres de gravité des bases; le moment magnétique est :

$$M = lS\mathfrak{J} = V\mathfrak{J} = V\sigma.$$

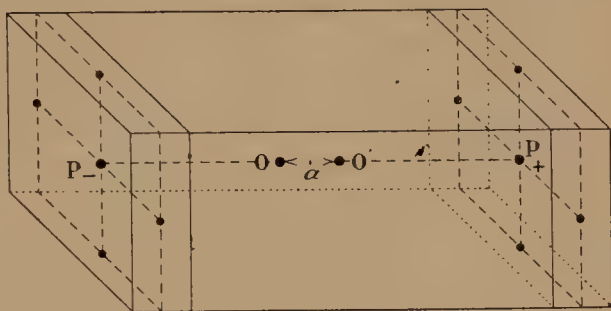


Fig. 39.

Appliquons la seconde méthode. On a deux volumes V pleins d'une densité de volume uniforme ρ . Pour l'un, ρ est positif; pour l'autre, ρ a la même valeur, mais négative. Quand ils sont confondus, le magnétisme libre est partout nul. Déplaçons l'un des volumes de la *très petite* longueur a dans le sens des génératrices : à l'intérieur du corps, le magnétisme libre reste encore partout nul; sur les bases apparaissent deux densités superficielles égales et de signes contraires :

$$\sigma = a\rho.$$

Les centres de gravité O et O' des magnétismes *totaux* positif et négatif sont distants de a ; la masse totale de chacun des magnétismes est ρV ; le moment magnétique est :

$$M = a\rho V = V\sigma;$$

résultat identique au précédent.

2°. — AIMANT SPHÉRIQUE.

Il est plus facile de commencer par la seconde méthode. Deux sphères de rayon R sont remplies uniformément de la densité de volume $\pm \rho$; faisons glisser l'une d'elles de la quantité $OO' = a$ (fig. 40). Le moment magnétique devient :

$$M = a\rho V = \mathfrak{J}V,$$

équation qui définit l'intensité d'aimantation comme le produit $a\rho$ du déplacement par la densité de volume.

lèlement à la composante horizontale II du champ (azimut initial de l'aimant).

On rattache le ressort et l'on tourne la partie supérieure de l'appareil jusqu'à ce que l'aimant reprenne l'azimut initial; le ressort est alors non tordu :

$$\alpha = 0.$$

On amène l'aimant à $\theta = 90^\circ$ de cet azimut initial, en tordant en haut d'un angle β ; la torsion α du ressort est alors :

$$\alpha = \beta - 90^\circ$$

On emploiera comme cercles gradués les cercles en papier que fournit le commerce.

L'expérience est très intéressante et fondamentale. On recommencera l'expérience après avoir plus ou moins chauffé l'aimant, ou lui avoir imposé des chocs plus ou moins brutaux.

Le couple étant maximum pour $\theta = 90^\circ$, la torsion α doit rester constante au voisinage de cet azimut. Donc l'angle β et l'azimut θ de l'aimant varient alors de quantités égales : si on tourne en haut de 5° par exemple, l'aimant tourne de 5° ; au besoin on est averti par là que l'aimant a tourné de $\theta = 90^\circ$ approximativement.

L'étudiant construira les courbes $\beta = f(\theta)$, $\alpha = \beta - \theta = f(\theta) - \theta$.

2°. — COMPARAISON DES MOMENTS PAR PESÉE.

J'indique la méthode (qui n'est guère pratique), afin que le lecteur réfléchisse sur les propriétés des couples.

Employons une balance en *laiton* avec des couteaux et des plans d'*agate*. Lions un aimant *rigidement* au fléau de manière qu'il soit vertical dans la position moyenne de celui-ci. Supposons les couteaux normaux au plan méridien. Équilibrons par des poids.

Retournons l'aimant bout pour bout; admettons qu'il soit parfaitement symétrique de forme et homogène de matière, de manière que, s'il n'est pas aimanté, l'équilibre obtenu dans la première position subsiste après retournement (il est quasiment impossible de réaliser cette condition).

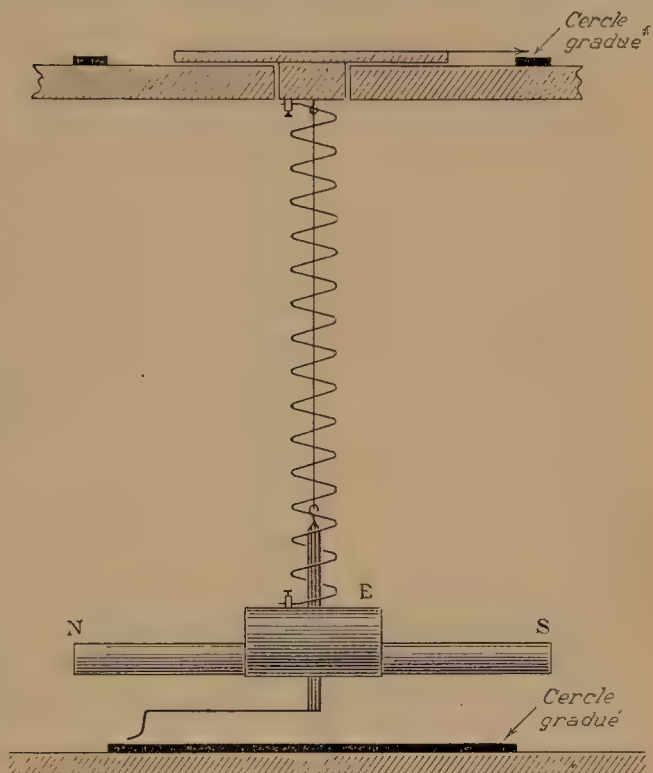


Fig. 41.

S'il est aimanté, il existe un couple MH qui change de signe avec

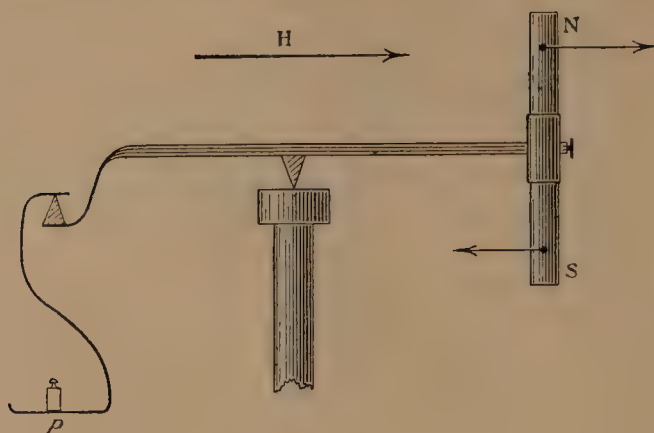


Fig. 42.

le retournement. L'équilibre n'a plus lieu. Il faut ajouter dans le plateau un poids p tel qu'on ait :

$$pl = 2MH,$$

où l est la distance des arêtes des couteaux.

51. Petites oscillations d'un aimant dans un champ.

1°. — Un aimant s'oriente dans un champ uniforme de manière que l'angle φ de son axe et du champ soit minimum (énergie potentielle minima, § 48).

S'il peut tourner librement autour de son centre de gravité, la position d'équilibre correspond à $\varphi = 0$: l'axe magnétique de l'aimant (droite joignant les pôles) est dans la direction du champ.

Si on lui impose un axe de rotation AB (fig. 43), son axe magnétique se place dans le plan formé par le champ et l'axe de rotation AB .

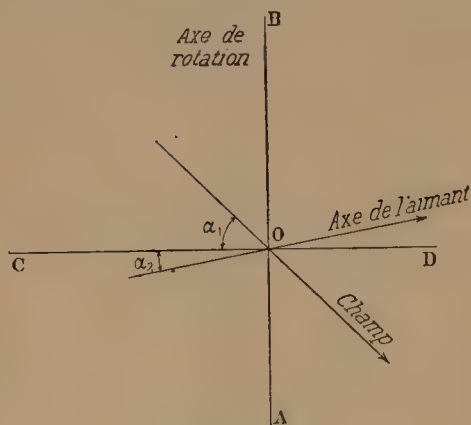


Fig. 43.

Soit CD une droite normale à AB et située dans le plan d'équilibre ; soit α_1 et α_2 les angles que font avec CD le champ et l'axe de l'aimant *lors de l'équilibre*. Définissons la position de l'aimant *hors de cette position* par l'angle θ du dièdre formé par le plan d'équilibre (plan de la figure)

et le plan passant par AB et par l'axe de l'aimant.

Le couple qui tend à ramener l'aimant à sa position d'équilibre est :

$$M \cos \alpha_2 \cdot H \cos \alpha_1 \cdot \sin \theta = MH \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \sin \theta.$$

Cela revient à écrire que seules sont utiles la composante $H \cos \alpha_1$ du champ et la composante $M \cos \alpha_2$ du moment. Elles font précisément l'angle 0.

2°. — Soit I le moment d'inertie de l'aimant et de son support par rapport à AB . Il oscille autour de AB sous l'influence du couple précédemment évalué ; les frottements sont sensiblement proportionnels à la vitesse.

La durée des petites oscillations est donc indépendante de l'amplitude (*Mécanique rationnelle*) ; elle a pour expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}}.$$

L'aimant, ordinairement suspendu à un fil sans torsion servant d'axe vertical, est un barreau cylindrique régulièrement aimanté d'axe sensiblement horizontal ; H désigne ordinairement la composante horizontale du champ. La formule devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

3°. — MESURE DE MH ; COMPARAISON DES CHAMPS.

La comparaison des composantes horizontales H_1 et H_2 de deux champs (par exemple, des composantes horizontales du champ terrestre en deux points de la surface du sol) consiste à faire osciller le même système en ces deux points. Soit T_1 et T_2 les périodes d'oscillation ; I demeurant invariable, on a :

$$T_1^2 M_1 = T_2^2 M_2.$$

La mesure absolue du produit MH implique la connaissance de I . Le calcul est généralement impossible à cause de la forme compliquée de l'étrier ; on détermine expérimentalement I par la méthode générale étudiée au § 404 de la *Mécanique rationnelle et expérimentale*.

Le réglage horizontal de l'axe de l'aimant peut être assez grossier, car l'angle α_2 , petit par hypothèse, intervient par son cosinus.

4°. — COMPARAISON DES MOMENTS MAGNÉTIQUES. MANIPULATION.

La comparaison des moments par la méthode des oscillations implique la connaissance des moments d'inertie. On tourne la difficulté en disposant parallèlement les barreaux sur le même étrier suspendu par un fil sans torsion (fig. 44).

Dans la première expérience, ils présentent du même côté leurs pôles de même nom : le moment direc-

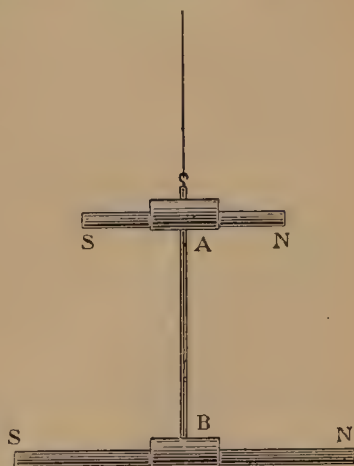


Fig. 44.

teur est $M + M'$. Dans la seconde, l'un des barreaux est retourné : le moment directeur est

$$M - M'.$$

On a pour durées d'oscillation :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(M + M')H}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(M - M')H}};$$

$$\text{d'où :} \quad T_1^2(M + M') = T_2^2(M - M'), \quad \frac{M'}{M} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2}.$$

La méthode n'est correcte que si les barreaux sont assez éloignés pour ne pas s'influencer. Dans la première disposition, ils tendent à se désaimanter réciproquement; dans la seconde, à s'aimanter réciproquement. Il n'existe pas de difficulté à les éloigner l'un de l'autre. Reste alors à savoir si le champ est le même là où se trouvent les deux barreaux, ce qu'impliquent les formules.

L'expérience qui précède est une bonne manipulation. On installera sur AB plusieurs tubes parallèles de cuivre servant d'étriers; on vérifiera que le résultat n'est pas le même quand les barreaux sont en contact ou suffisamment éloignés.

On complétera l'appareil en permettant à l'un des tubes étriers de tourner autour de AB. A cause de la symétrie de l'appareil, le moment d'inertie n'est pas changé. On vérifiera que le système des aimants à angle droit équivaut à un aimant de moment :

$$\sqrt{M^2 + M'^2}.$$

Soit, d'une manière générale, θ l'angle des axes des deux aimants; le moment de l'aimant équivalent est :

$$\sqrt{M^2 + M'^2 + 2MM' \cos \theta}.$$

Les moments se composent comme des vecteurs.

Un cercle gradué en papier, collé sur un cercle métallique lui-même soudé sur AB, permettra de mesurer θ avec une approximation suffisante.

52. Aimant dans un champ qui n'est pas rigoureusement uniforme.

Pour nous limiter au cas pratique, supposons le champ de révolution autour de Ox (fig. 45). Le potentiel est de la forme :

$$V = -(a + by^2).$$

a et b sont des fonctions de la distance x du plan de front considéré à un point O' quelconque pris sur Ox ; y est la distance à l'axe.

On demande à quel couple est soumis un aimant *régulier* (dont le centre est en O et dont la longueur n'est pas infiniment petite) quand, tournant dans un plan méridien, il fait un angle φ avec Ox .

Faisons le calcul pour deux masses $\pm m$ situées à une distance $2l = \overline{SN}$ l'une de l'autre.

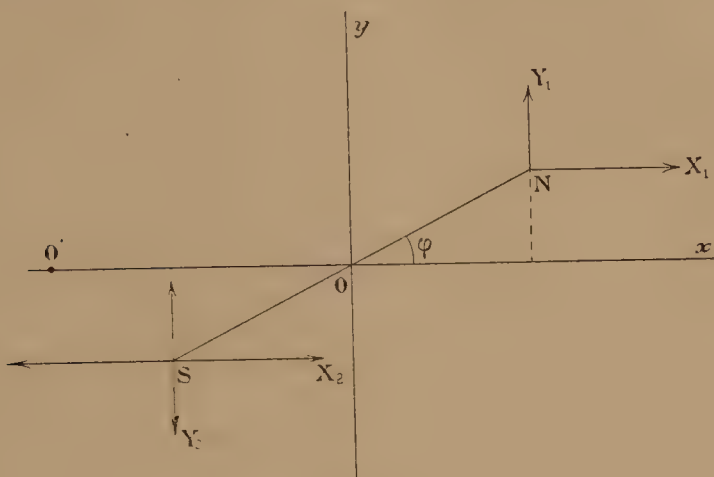


Fig. 45.

Soit X, Y , les composantes du champ dans le plan de front passant par le point O . Soit $X_1, Y_1; X_2, Y_2$, les composantes du champ à la même distance de l'axe, dans les plans où se trouvent les masses; Y_1 et Y_2 sont de sens contraires comme l'indique la figure.

Posons $\delta = l \cos \varphi$.

L'aimant est soumis au couple

$$C : m = (X_1 + X_2)y - (Y_1 - Y_2)\delta.$$

Calculons les parenthèses.

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad X_1 = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \delta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right);$$

$$\text{d'où :} \quad X_1 + X_2 = -2\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right).$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Y_1 = -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \delta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\right);$$

$$\text{d'où :} \quad Y_1 - Y_2 = -2\delta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}.$$

Dans ces formules substituons les valeurs des dérivées :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = a' + b'y^2, \quad -\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = a''' + b'''y^2, \quad -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 2b'y.$$

D'où l'expression du couple :

$$C : m = 2y \left(a' + b'y^2 + \frac{a'''\delta^2}{2} - 2b'\delta^2 \right).$$

Introduisons maintenant le résultat démontré au § 35 :

$$a'' = -4b :$$

$$C : m = 2ya' \left(1 - \frac{a'''}{4a'} y^2 + \frac{a'''}{a'} \delta^2 \right).$$

Introduisons l'angle φ : $y = l \sin \varphi$, $\delta = l \cos \varphi$.

Explicitons le moment magnétique : $ml = M$.

Il vient la formule historiquement célèbre :

$$C = Ma' \sin \varphi \left[1 - \frac{a'''}{4a'} l^2 (1 - 5 \cos^2 \varphi) \right].$$

D'où cette conclusion pratiquement importante.

Une aiguille a son centre sur l'axe d'un champ de révolution ; son axe magnétique fait avec l'axe de révolution un angle φ . Le couple auquel elle est soumise suit (en fonction de l'angle φ) la même loi que si le champ était uniforme, quand le centre de l'aiguille occupe sur l'axe de révolution le point pour lequel la courbe qui représente l'intensité du champ suivant cet axe possède un point d'inflexion ($a''' = 0$).

Nous trouverons au § 137 une application de ce corollaire.

Champs créés par les aimants permanents.

53. Lignes de force magnétiques. Spectres magnétiques.

1°. — Par définition, les lignes de force magnétiques sont, en chacun de leurs points, tangentes à la direction du champ en ce point (§ 8).

Soit NAS une ligne de force du champ d'un aimant NS ; plaçons

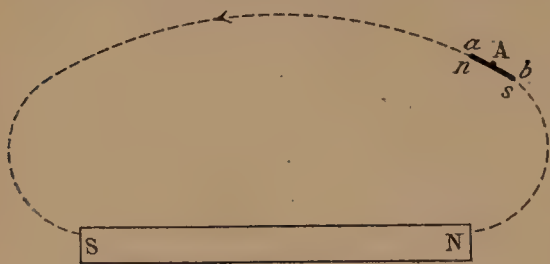


Fig. 46.

au point A une très petite aiguille régulièrement aimantée, faite par exemple d'une aiguille à coudre ; annulons les frottements par un procédé quelconque : l'aiguille se dispose tangentiellement à la ligne de force, son pôle s tourné vers le pôle N de l'aimant, son pôle n tourné

vers le pôle S. Sa direction donne la tangente à la ligne de force ; le sens ns de son axe détermine le sens de la ligne de force.

Quand le champ a des dimensions considérables, on procède effectivement comme il vient d'être dit : c'est le cas du champ terrestre. Comme il serait peu pratique de rendre une aiguille mobile

autour de son centre de gravité (pour annuler l'action de la pesanteur), on opère en deux fois. On utilise d'abord une aiguille (*de déclinaison*) mobile autour d'un axe vertical; elle donne le plan vertical (*méridien magnétique*) tangent à la ligne de force au point d'intersection de son axe magnétique et de l'axe de rotation (fig. 47).

On utilise ensuite une aiguille *d'inclinaison*; elle tourne autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité et normal au méridien magnétique précédemment déterminé. La direction que prend l'aiguille libre de tourner dans le méridien magnétique, est précisément celle du champ terrestre.

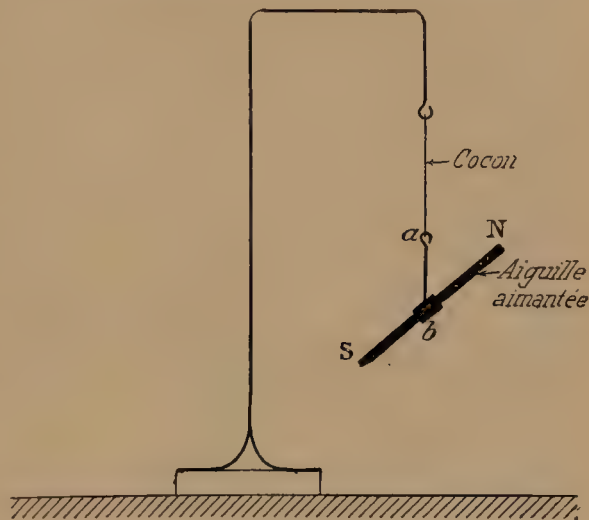


Fig. 47.

Nous reviendrons longuement là-dessus au tome II.

2°. — SPECTRES MAGNÉTIQUES.

Quand le champ a des dimensions restreintes, on détermine les lignes de force (au moins leur allure) au moyen du spectre magnétique (fig. 48).

A l'aide de cales maintenons un verre à vitre à quelques centimètres d'une table horizontale. Introduisons un aimant sous et contre



Fig. 48.

le verre. Plaçons dans un tamis de la limaille de fer (pas trop fine et bien dégraissée); tenons le tamis à quelques 50 centimètres du verre et saupoudrons aussi régulièrement que possible. La limaille tombe sur le verre et se dispose en files régulières *qui sont approximativement les lignes de force*. Il est bon de donner aux grains de la mobilité en tapant sur le verre avec un corps dur; les grains sursautent, s'orientent dans l'air et retombent en files plus visibles.

La théorie de l'expérience est immédiate. Les grains de limaille (qui sont plus ou moins allongés) s'aimantent dans le champ; ils se placent donc tangentiellement aux lignes de force, le pôle nord d'un grain en contact ou à proximité du pôle sud du grain suivant.

3°. — CHAMPS INTENSES.

Avec les champs intenses, on obtient des phénomènes extrêmement curieux.

La figure 49 représente des clous sur un électro-aimant dit de Faraday. Chaque clou trace approximativement un élément d'une certaine ligne de force. Les clous sont simplement posés; le champ les maintient en position et direction.

Chaque clou est transformé en un aimant. Il est ramené dans la direction de la ligne de force passant par sa pointe, par un couple

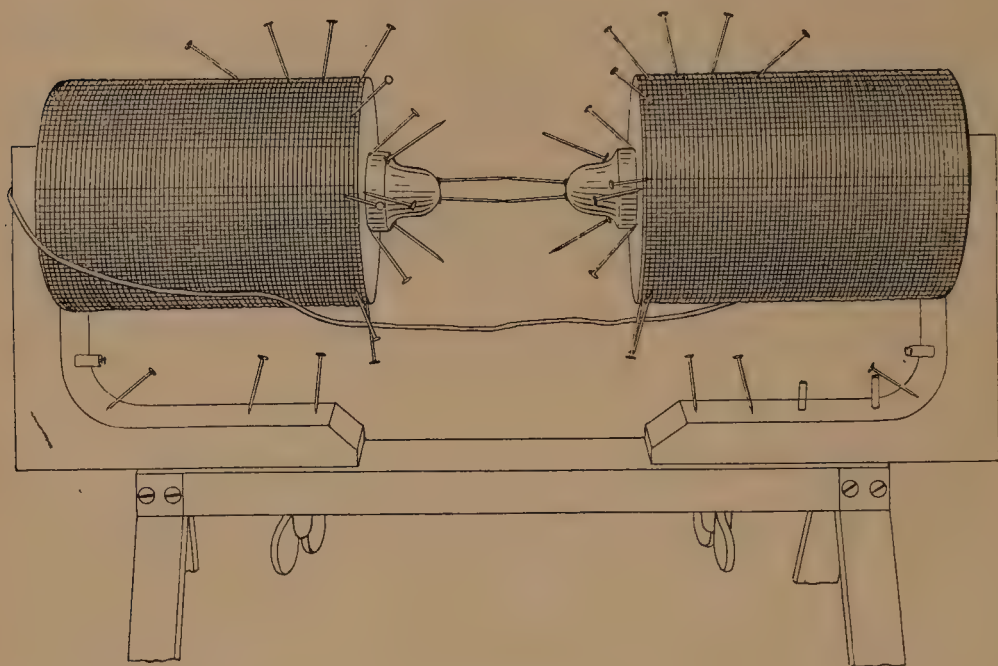


Fig. 49.

qui serait nul si l'angle du clou avec la ligne de force s'annulait, mais qui équilibre le couple de la pesanteur dès que cet angle prend une valeur de quelques degrés.

Si on écarte le clou de sa direction d'équilibre, il y revient en oscillant sur sa pointe comme un pendule. La durée d'oscillation diminue à mesure que le champ augmente.

Si le champ était parfaitement uniforme, nous savons que les forces sur le clou se réduiraient à un couple (§ 46). Mais le champ n'est pas uniforme; nous verrons (tome II) que *le clou tend à se déplacer vers les champs les plus intenses*: d'où résulte qu'il s'appuie sur l'électro par l'une de ses extrémités. La pression qu'il exerce croît quand croît la grandeur de la variation du champ de sa tête à sa pointe.

L'expérience est aussi remarquable quand on remplace les clous

par de la limaille (fig. 50). On obtient des hérisssements de limaille *qui se comportent quasiment comme un corps rigide*. On remarquera que les houppes se forment sur les bobines et sur les joues verticales



Fig. 50.

(en laiton) de ces bobines, preuve que la limaille n'a pas besoin pour s'aimanter d'être au contact immédiat d'un corps aimanté.

4°. — CONSERVATION DES SPECTRES MAGNÉTIQUES.

On a proposé bien des procédés pour conserver la trace d'un spectre magnétique obtenu sur un plan.

Le plus simple consiste à le réaliser dans l'obscurité en se servant comme surface polie d'une plaque photographique, gélatine en dessus. Le spectre obtenu, on éclaire un instant avec une source de faibles dimensions, placée au-dessus de la plaque, à une distance aussi grande que possible : on photographie ainsi la silhouette des grains de limaille. Il ne reste plus qu'à développer et à fixer à la manière ordinaire. C'est ainsi qu'ont été obtenues les figures de ce Cours.

On utilise parfois une plaque de verre recouverte d'une couche mince de paraffine ou de cire. Le spectre obtenu, on chauffe avec précaution de manière à ramollir la paraffine ; les grains de limaille s'y incrustent. On laisse refroidir.

On utilise encore du papier gommé et séché. Le spectre obtenu, on projette par vaporisation une mince couche d'eau qui fond la gomme et fixe la limaille en séchant.

De tous les procédés, le plus intéressant repose sur l'emploi de papier au ferri-cyanure de fer bien connu des dessinateurs industriels, et qu'on trouve chez tous les papetiers pour une somme modique (sous le nom de papier au ferro-prussiate, 2 à 3 francs le

rouleau de $0,75 \times 10$ mètres). A l'abri d'une lumière vive, on le découpe à la grandeur voulue; on le place sur une plaque de verre en maintenant ses bords par quatre lourdes baguettes de plomb. On fait le spectre à la lumière ordinaire du laboratoire, puis on porte au grand jour.

Le papier dans son rouleau est jaune verdâtre. Au jour il passe au vert, au bleu, enfin au bleu gris. La pose est alors suffisante. On fixe en lavant à grande eau. Le temps de pose est d'une vingtaine de minutes à la lumière des nuages blancs; elle est beaucoup plus courte au soleil.

L'avantage du procédé est d'obtenir des spectres aussi grands qu'on le désire et pour une somme minime. On peut tracer sur le papier le système des courbes orthogonales (voir plus loin, § 56) et les autres indications utiles.

54. Interprétation précise des spectres magnétiques plans.

1°. — Soit A le point où une ligne de force coupe le plan *horizontal* P. Projetons son élément \overline{AB} en \overline{AC} sur le plan : \overline{AC} est la direction du grain de limaille.

Par le point C, menons la ligne de force; projetons son élément \overline{CD} en \overline{CE} sur le plan : \overline{CE} est la direction du second grain de limaille.

Et ainsi de suite.

Les grains de limaille tracent donc généralement le faisceau des

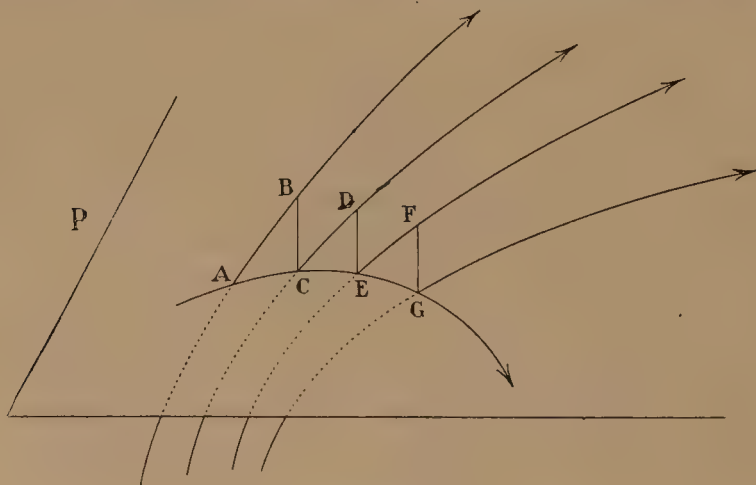


Fig. 51.

enveloppes des projections horizontales des tangentes aux lignes de force, aux points où elles coupent la surface polie; autrement dit, le faisceau des enveloppes des projections horizontales des intensités du champ aux divers points du plan P.

La surface de force engendrée par les lignes de force qui passent aux divers points d'une ligne de limaille est orthogonale au plan P.

La limaille ne décrit donc une ligne de force que si la ligne est tout entière dans le plan, autant que possible horizontal, du spectre magnétique : ce qui est exceptionnel, pour ne pas dire, ce qui n'est jamais réalisé.

2°. — On peut donner une autre définition mathématique simple du faisceau des lignes de limaille.

Prenons le plan P du spectre comme plan xOy . Soit $V(x, y, z)$ le potentiel.

Les lignes de limaille sont les trajectoires orthogonales du faisceau :

$$V(x, y, 0) = \text{constante},$$

des intersections des surfaces équipotentielles par le plan P.

Le lecteur démontrera aisément le théorème suivant.

Les pôles du spectre magnétique (points où viennent se couper les lignes de limaille) correspondent aux traces sur le plan P des lignes de force qui le coupent normalement.

Il revient au même de dire qu'un pôle correspond au point de tangence d'une surface équipotentielle avec le plan P.

55. Spectres magnétiques usuels.

Avant d'aller plus loin, le lecteur doit se familiariser avec les spectres magnétiques usuels ; il se donnera la peine (légère) de reproduire les divers cas auxquels correspondent les figures suivantes, au mieux en utilisant successivement toutes les méthodes ci-dessus décrites.

1°. — SPECTRE D'UN AIMANT CYLINDRIQUE (fig. 52).

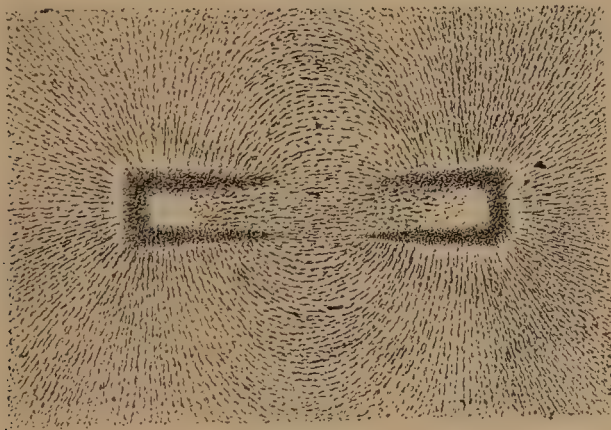


Fig. 52.

L'aimant étant placé tout contre la plaque de verre, les lignes de limaille représentent très approximativement les lignes de force (§ 54).

2°. — DEUX AIMANTS PARALLÈLES.

Même remarque que ci-dessus.

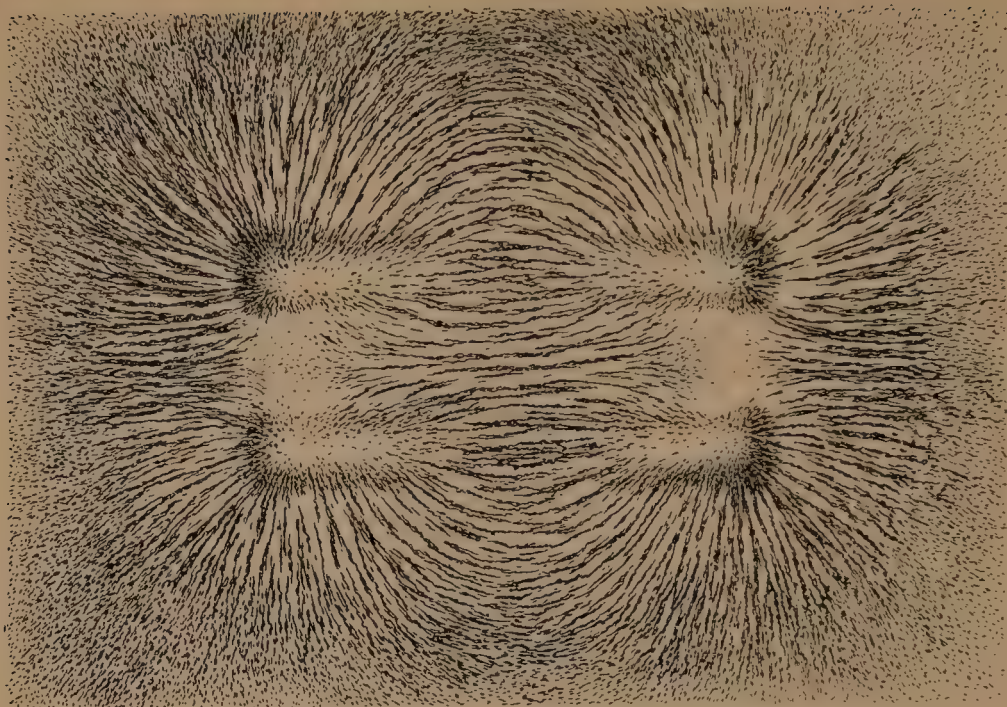


Fig. 53.

Dans la figure 53, les pôles de même nom sont en regard; dans la figure 54, les pôles de noms opposés sont en regard.

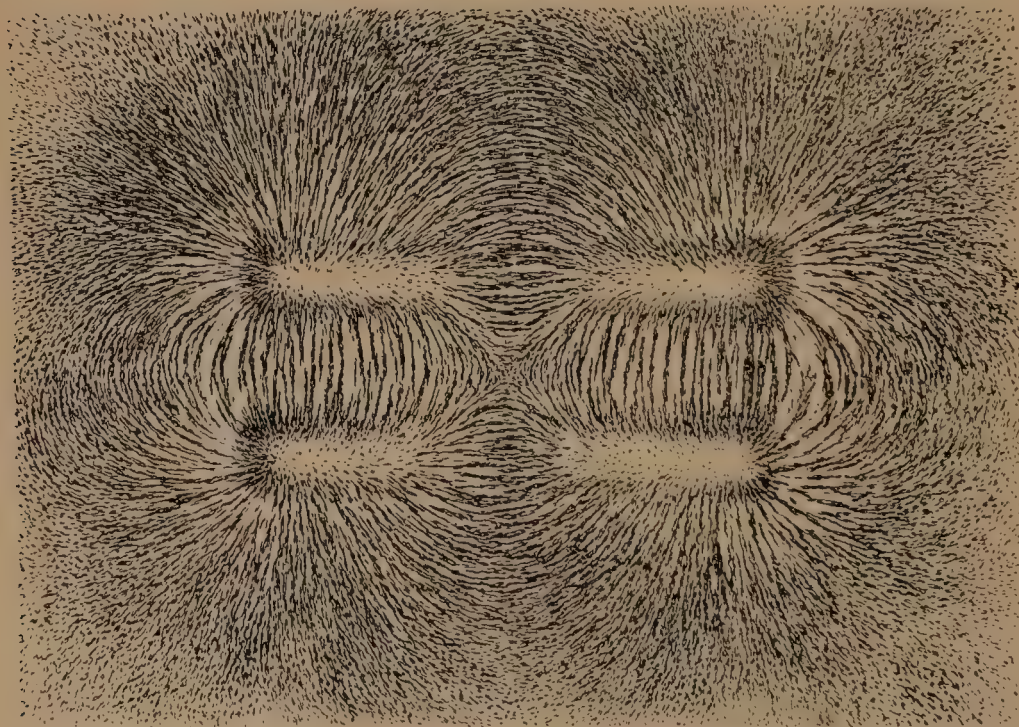


Fig. 54.

Une ligne de force partant d'un pôle nord doit aboutir à un pôle sud ; cette règle suffit à expliquer l'allure générale des faisceaux.

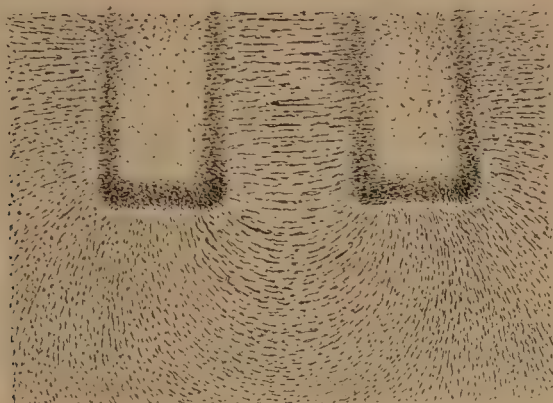


Fig. 55.

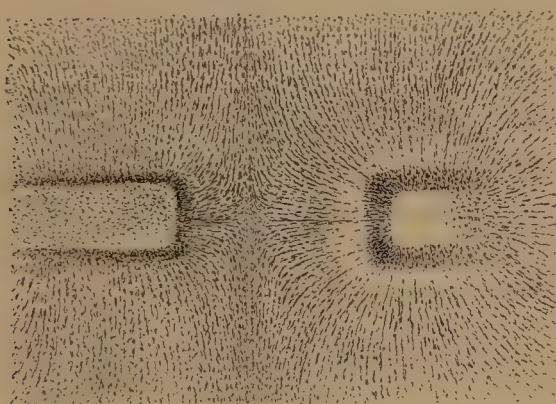


Fig. 56.

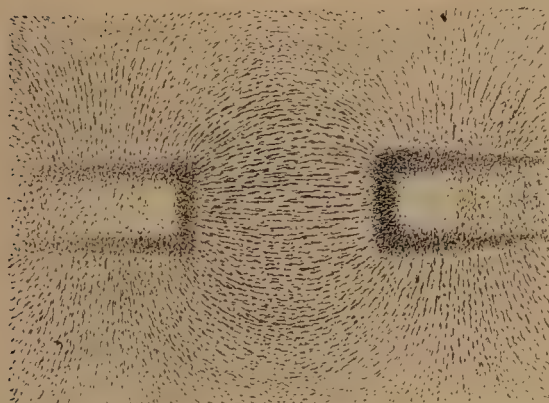


Fig. 57.

La figure 55 montre, à plus grande échelle, le spectre entre les extrémités de deux aimants parallèles dont les pôles de noms contraires sont en regard. La limaille utilisée est plus fine.

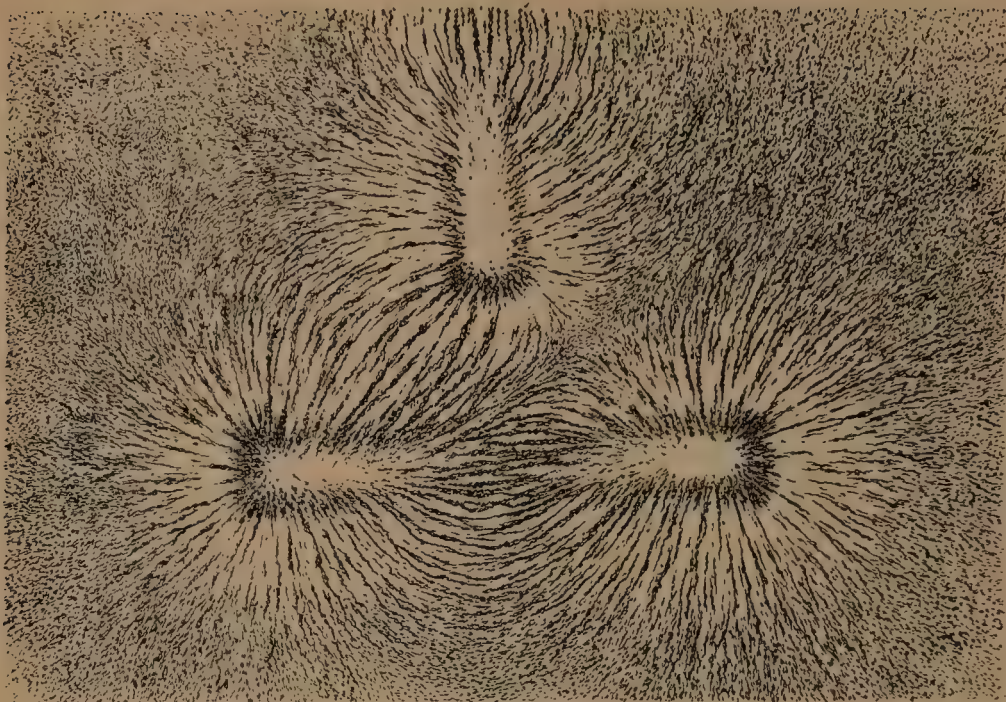


Fig. 58.

3°. — DEUX AIMANTS DANS LE PROLONGEMENT L'UN DE L'AUTRE.

Dans la figure 56, les pôles de même nom sont en regard; l'aimant droit est plus fort que l'aimant gauche.

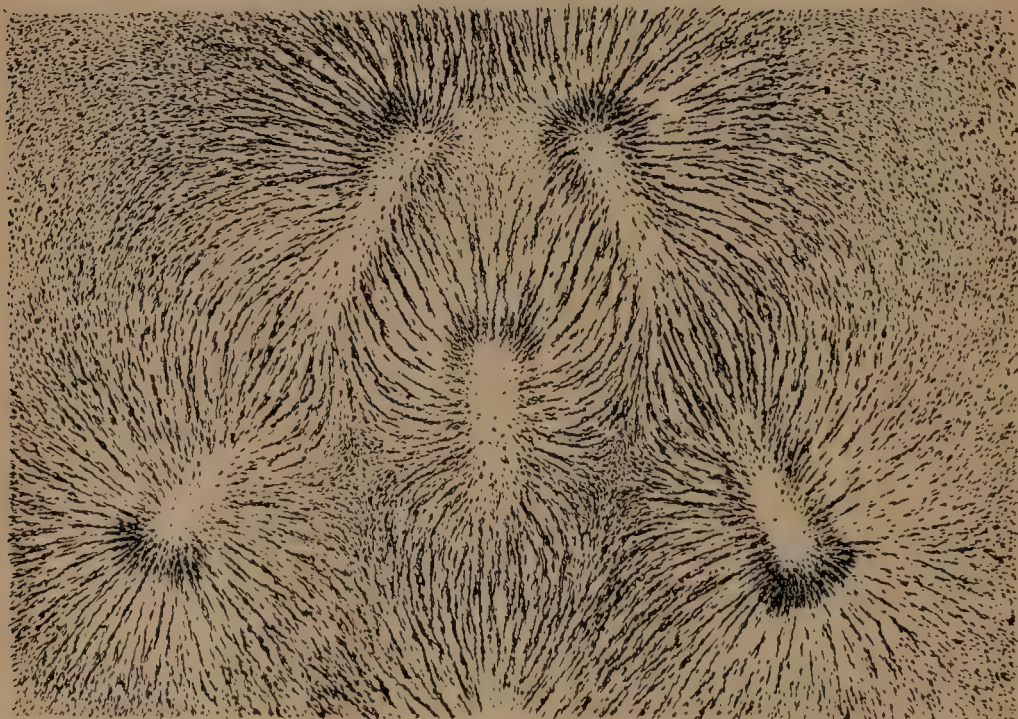


Fig. 59.

Dans la figure 57, les pôles de noms contraires sont en regard.

4°. — DEUX AIMANTS RECTANGULAIRES (fig. 58).

5°. — TROIS AIMANTS PLUS OU MOINS SYMÉTRIQUEMENT DISPOSÉS (fig. 59 et 60).

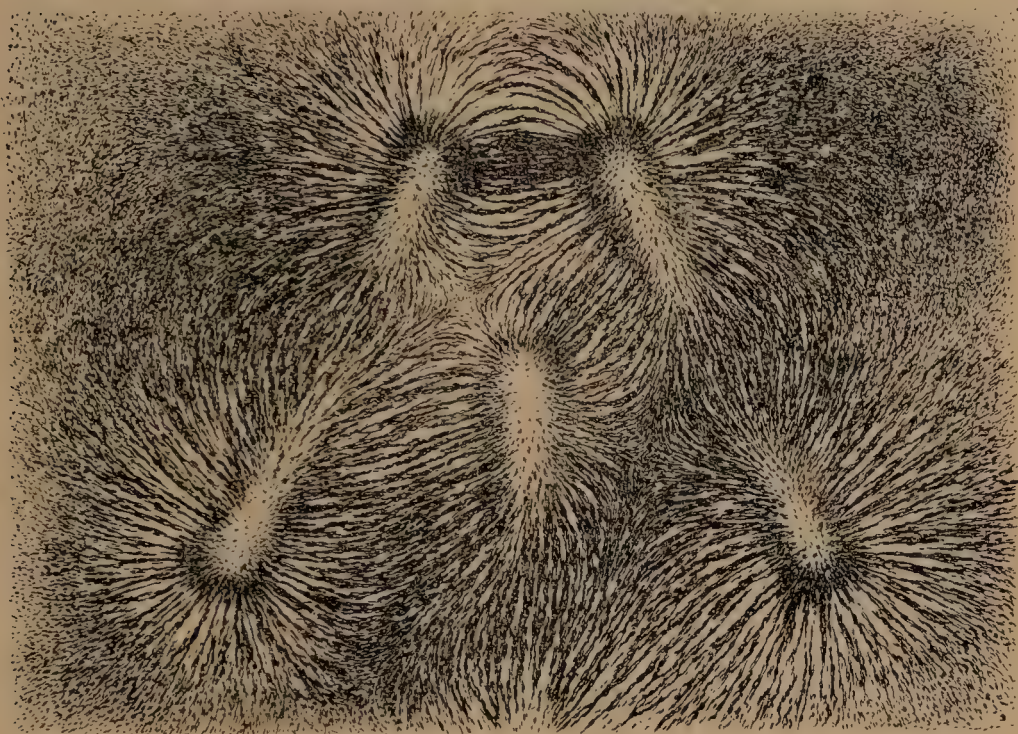


Fig. 60.

6°. — AIMANTS DEBOUT.

Les figures 62, 63 et 64 sont obtenues en utilisant un ou deux aimants cylindriques verticaux, disposés comme l'indique la figure 61.

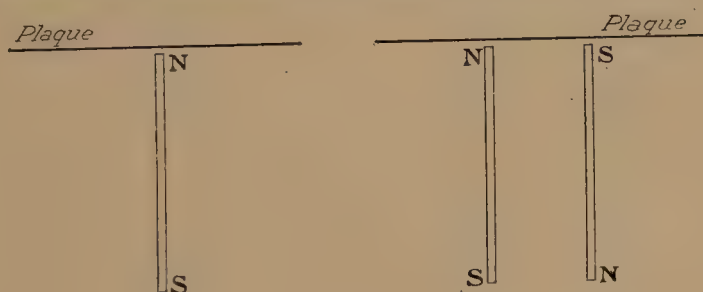


Fig. 61.

La figure 61 à gauche correspond à la figure 62.

La figure 61 à droite correspond à la figure 63.

Ici s'appliquent les considérations du § 54 : les lignes de force coupent le plan du spectre suivant des angles plus voisins, de 90° que de 0° ; il n'y a aucune relation simple entre elles et les lignes de limaille.



Fig. 62.

Si les aimants sont minces et assez longs pour que l'action des extrémités inférieures soit faible, les spectres sont très approxima-

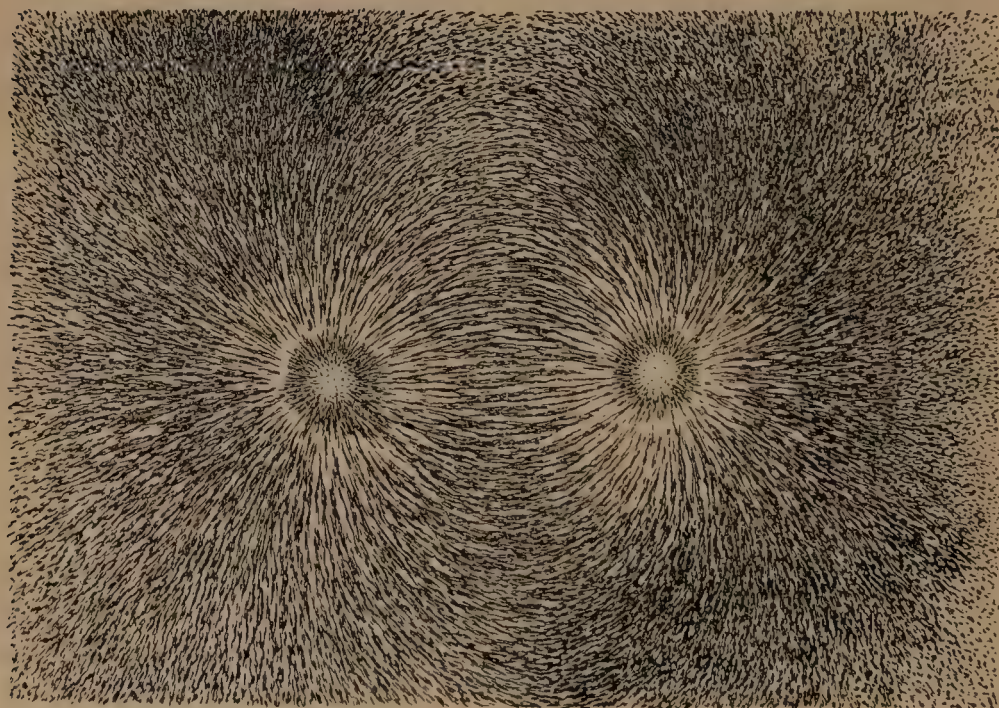


Fig. 63.

vement ceux d'une masse ponctuelle, de deux masses ponctuelles de noms contraires (sensiblement égales) et de deux masses pon-

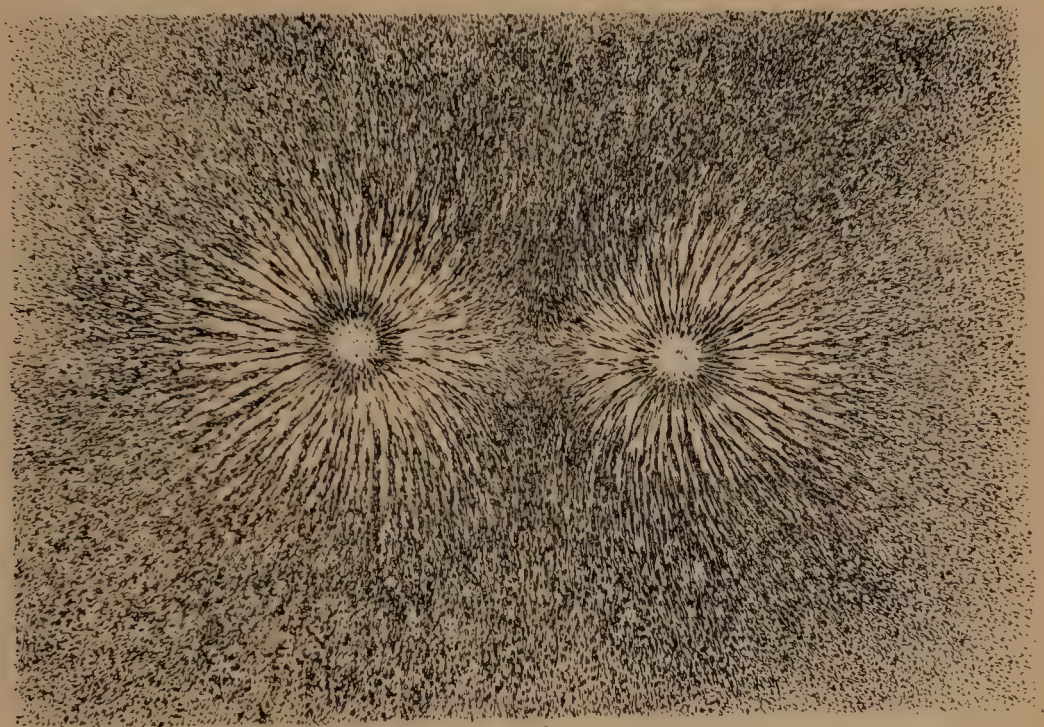


Fig. 64.

tuelles de même nom. On les comparera donc aux figures 17, 18,..., 22 et 23.

Nous aurons à tout instant l'occasion de nous reporter aux figures précédentes, qui sont la reproduction sans retouche des photographies obtenues par la méthode du § 53.

56. Champ d'une molécule polarisée, d'un aimant cylindrique réel.

1°. — Le potentiel créé par un petit aimant d'axe OO' et de moment M , dans une direction OM et à une distance $OM=r$, est donné par la formule (§ 40) :

$$V = \frac{M \cos \theta}{r^2}.$$

Calculons les composantes de la force au point M .

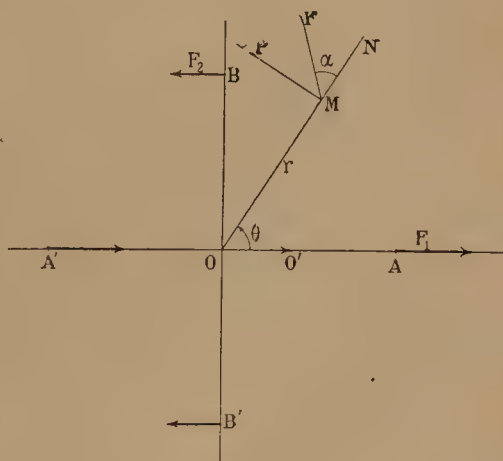


Fig. 65.

La composante suivant MN est :

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M \cos \theta}{r^3}.$$

La composante suivant MP est :

$$-\frac{\partial V}{\partial(r\theta)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{M \sin \theta}{r^2}.$$

En particulier, aux points A et A', la force est dirigée suivant l'axe

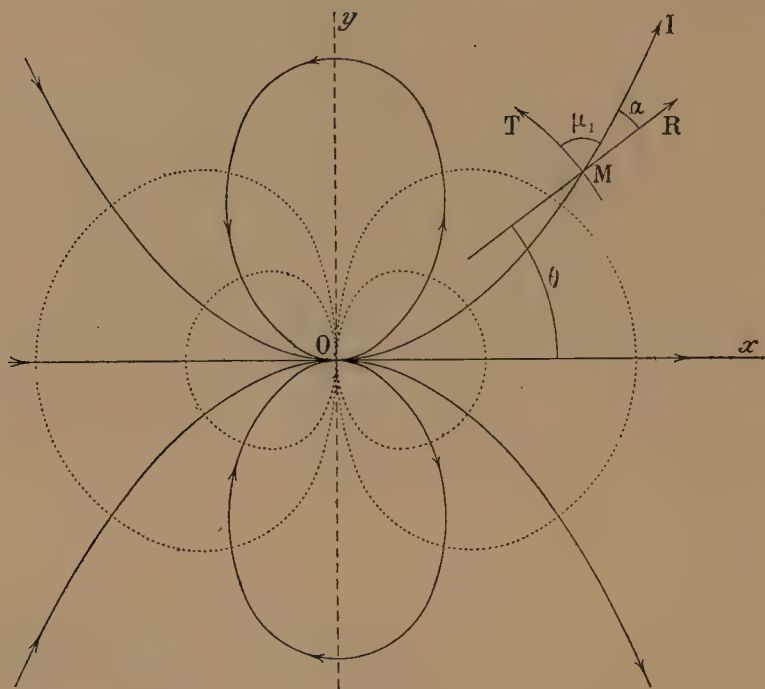


Fig. 66.

de l'aimant, dans le sens de cet axe, et a pour valeur ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) : $F_1 = \frac{2M}{r^3}$.

Aux points B et B', la force est dirigée parallèlement à l'axe de l'aimant et en sens inverse; elle a pour valeur ($\theta = \frac{\pi}{2}$) : $F_2 = \frac{M}{r^3}$.

En un point quelconque M, elle fait avec le rayon vecteur un angle α donné par la formule :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta;$$

sa grandeur est : $\frac{M}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$.

La figure 66 représente en traits pleins quelques lignes de force, en pointillé quelques surfaces équipotentiellles. On démontrera aisé-

ment (Voir *Mécanique rationnelle*, § 42) que le faisceau des lignes de force a pour équation :

$$r = a \sin^2 \theta.$$

Le champ créé par un aimant cylindrique réel (fig. 52) diffère d'autant plus de celui de la molécule polarisée qu'on reste plus près de l'aimant ; les champs deviennent identiques à une distance suffisante pour que l'aimant réel soit assimilable à une molécule polarisée.

2°. — Comme exercice de calcul utilisé dans la détermination des pôles d'un aimant, déterminons le lieu des points où le champ est normal à l'axe de l'aimant. On trouve la droite :

$$y = \sqrt{2} \cdot x.$$

57. Aimant assimilé à deux masses $\pm m$ situées à distance finie. Positions fondamentales de Gauss.

1°. — Assimilons l'aimant à deux masses $+m$ et $-m$ situées l'une de l'autre à une distance l qui n'est plus très petite : on a $ml = M$. Calculons la force aux points A et B, qui sont à la distance r du centre de l'aimant, dans le prolongement de son axe et dans son plan équatorial.

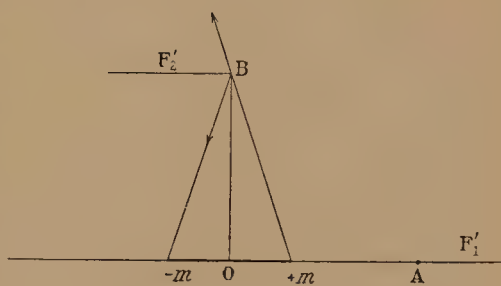


Fig. 67.

En A (première position de Gauss) :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{m}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{m}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = F_1 \left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^{-2}.$$

Développant en série, il vient :

$$\mathcal{F}_1 = F_1 \left[1 + \frac{l^2}{2r^2} + \frac{3l^4}{16r^4}\right].$$

En B (seconde position de Gauss) :

$$\mathcal{F}_2 = F_2 \frac{1}{\left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = F_2 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{l^2}{r^2} + \frac{3 \cdot 5}{2^7} \frac{l^4}{r^4}\right).$$

Évidemment l'assimilation d'un aimant de dimensions finies à deux masses est impossible.

Il faut seulement retenir de ce raisonnement qu'on peut poser :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{2M}{r^3} \left(1 + \frac{A_1}{r^2} + \frac{B_1}{r^4}\right) = Mf_1(r),$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{M}{r^3} \left(1 + \frac{A_2}{r^2} + \frac{B_2}{r^4}\right) = Mf_2(r);$$

les constantes A_1, B_1, A_2, B_2 seront déterminées par l'expérience; leur ordre de grandeur est indiqué par les formules précédentes.

2°. — AIMANT SYMÉTRIQUE MINCE.

Traisons le cas d'un aimant suffisamment long et mince, symétrique par rapport à son plan équatorial. Comptons les x suivant l'axe magnétique; ils repèrent la position des masses qui sont définies par une densité *de longueur* λ , c'est-à-dire par une densité telle que λdx soit la masse contenue dans l'élément dx de l'aimant.

Les forces, dans les positions 1 et 2, dues à la masse λdx , située à la distance x du plan équatorial, sont :

$$d\mathcal{F}_1 = \frac{4\lambda x dx}{r^3} \left[1 + \frac{2x^2}{r^2} + \frac{3x^4}{r^4} + \dots \right],$$

$$d\mathcal{F}_2 = \frac{2\lambda x dx}{r^3} \left[1 - \frac{3x^2}{2r^2} + \frac{15x^4}{8r^4} + \dots \right].$$

Pour avoir l'action de l'aimant entier, il faut additionner les forces dues à chacun des aimants élémentaires constitués par les masses $\pm \lambda dx$, situées l'une de l'autre à la distance $2x$; cela revient à intégrer entre 0 et l :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{2M}{r^3} + \frac{8}{r^5} \int \lambda x^3 dx + \frac{12}{r^7} \int \lambda x^5 dx + \dots$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{M}{r^3} - \frac{3}{r^5} \int \lambda x^3 dx + \frac{15}{4r^7} \int \lambda x^5 dx + \dots$$

La relation (§ 46, 3°) :

$$M = 2 \int \lambda x dx = l \int \lambda dx$$

définit la distance l des pôles de l'aimant.

3°. — Comme exercice, on calculera le lieu des points où le champ est normal à l'axe de l'aimant.

A grande distance le lieu se confond avec les droites obtenues au paragraphe précédent; elles servent d'asymptotes à la courbe cherchée, qui a l'allure d'une hyperbole.

58. Magnétomètre.

1°. — C'est une hypothèse fondamentale que plusieurs champs magnétiques se composent suivant la règle des vecteurs, ou, ce qui revient au même, que le potentiel total est égal à la somme des potentiels. Cela revient à admettre que les actions des masses magnétiques ne se modifient pas les unes les autres (§ 22). Nous savons qu'une pièce de fer placée près d'un aimant se transforme en un aimant; son voisinage modifie donc le champ de l'aimant, non pas parce qu'il modifie l'action des masses *données*, mais parce qu'il

change la grandeur des masses et leur distribution, ce qui est tout différent. Dire qu'il s'agit d'aimants permanents, c'est dire que nous pouvons négliger les réactions mutuelles des aimants sur la distribution de leur magnétisme. L'hypothèse est alors applicable en toute rigueur.

2°. — Ceci posé, un très petit barreau horizontal est suspendu à

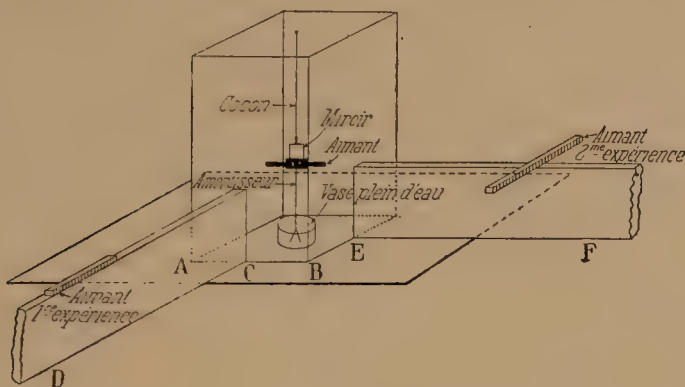


Fig. 68.

un fil sans torsion (par l'intermédiaire d'un étrier de forme convenable) : il constitue un magnétomètre (fig. 68).

De lui-même, son axe s'oriente suivant la composante horizontale H du champ (champ terrestre plus ou moins modifié par des aimants).

Par un procédé quelconque, réalisons un champ horizontal H' normal au précédent : les champs H et H' se composent en un champ résultant faisant avec H l'angle α (fig. 69) :

$$\operatorname{tg} \alpha = H' : H.$$

Si l'angle α est petit, on a simplement : $\alpha = H' : H$;

l'aimant tourne d'un angle indépendant de son moment magnétique et proportionnel au champ supplémentaire; d'où le nom de magnétomètre donné à l'appareil.

La mesure des petits angles α s'effectue avec la méthode de Pogendorff (§ 59).

3°. — SENSIBILITÉ.

La sensibilité du magnétomètre est en raison inverse de la composante horizontale H du *champ directeur*. Il peut être avantageux de diminuer celle-ci, résultat qu'on obtient au moyen d'aimants

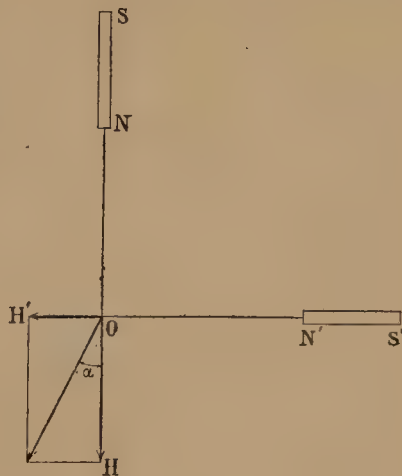


Fig. 69.

permanents dont le champ η se compose avec le champ terrestre h . D'ailleurs, on ne peut que bien rarement utiliser le champ terrestre *non modifié* : l'emploi de la méthode de Poggendorff exige que le plan du miroir ait une orientation conforme aux conditions d'installation dans le laboratoire ; or le petit aimant du magnétomètre est ordinairement collé sur le miroir, d'où la nécessité de modifier convenablement l'orientation du champ terrestre h .

Quoi qu'il en soit, pour diminuer H on approche des aimants (disposés autant que possible dans le plan horizontal où l'aiguille

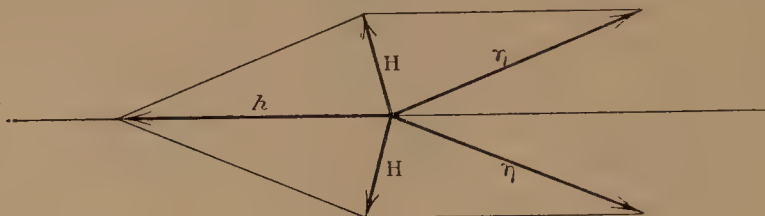


Fig. 70.

oscille, puisqu'il ne s'agit de modifier que cette composante) ; on suit les variations de H , en déterminant la période d'oscillation de l'aiguille (§ 51), en même temps qu'on s'efforce de conserver à l'aiguille l'orientation choisie.

Un phénomène curieux se produit lorsque H est voisin de zéro.

Dire que la composante H s'annule, c'est dire qu'on crée un champ horizontal η à très peu près égal et opposé au champ horizontal primitif h . Mais deux vecteurs égaux et à *peu près* opposés ont une résultante H à 90° de leur propre direction. Donc on est averti de la petitesse du champ H et par la grandeur de la période, et par la tendance que possède l'aiguille à tourner de 90° , dans un sens ou dans l'autre, pour la moindre rotation de l'aimant auxiliaire producteur du champ η (fig. 70).

59. Méthode de Poggendorff.

Nous utilisons pour la première fois la méthode de Poggendorff ; comme elle nous servira à tout instant, il est bon de la décrire.

f°. — EMPLOI DUN MIROIR SPHÉRIQUE ET D'UNE ÉCHELLE TRANSPARENTE.

Le miroir sphérique tourne autour de l'axe vertical O ; son rayon de courbure est OS . Une échelle cylindrique transparente, ayant l'axe O comme axe de révolution, se projette suivant AB . En S est une fente lumineuse (*spot*) ; le miroir en donne une image réelle sur l'échelle.

Si la normale au miroir coïncide d'abord avec OS , l'image du spot se fait sur le spot. Pour que le spot et son image ne se recouvrent pas, on élève le spot et on abaisse l'échelle de la quantité correspondante.

Quand la normale au miroir vient en ON , tournant de l'arc \overline{SN} , l'image du spot vient en S' , tournant de l'axe double $\overline{SS'} = 2\overline{SN}$.

Soit $\overline{OS} = 1$ mètre. Un degré à un mètre vaut $17^{\text{mm}},45$.

Si le miroir tourne de 1° , le spot se déplace de 33 millimètres.

On observe au dixième de millimètre, soit au $1/350$ de degré, soit à 10 secondes d'arc près.

Dans la pratique, l'échelle est rectiligne, de 50 centimètres de long, en celluloïd ou en papier calque collé sur du verre; elle se confond tant bien que mal avec la tangente au cercle AB . Il y a deux inconvénients : les déplacements du spot ne

sont plus proportionnels aux rotations du miroir; la mise au point est mauvaise, sauf pour une position du miroir.

2°. — EMPLOI D'UNE LUNETTE ET D'UN MIROIR PLAN.

Un miroir plan donne de l'échelle AB (centrée sur l'axe de rotation) une image $A'B'$.

Quand le miroir tourne de l'arc $\overline{MM''}$, l'image glisse sur le cylindre d'un arc double $\overline{A'A''} = 2\overline{MM''}$.

Elle vient en $A''B''$.

On vise en V avec une lunette L . Quand le miroir tourne, on voit défiler les traits de l'échelle sur le réticule de la lunette.

Par exemple, dans la première position du miroir, on vise l'image du point a ; dans la seconde, on vise l'image du point b .

La sensibilité est la même que plus haut, mais la précision des mesures est plus grande.

Comme échelle courbe, on emploie des règles de bois ou de métal fixées sur un gabarit découpé dans une planche. On utilise aussi des règles droites; on se heurte aux inconvénients signalés ci-dessus.

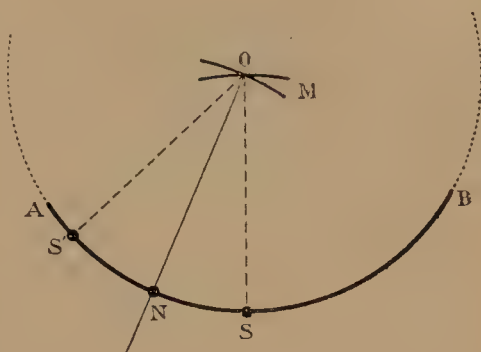


Fig. 71.

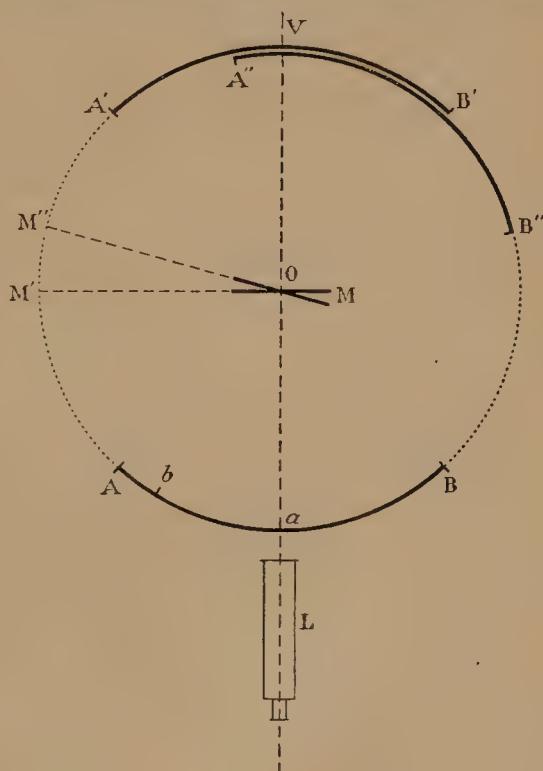


Fig. 72.

Les miroirs sphériques sont généralement très minces; ils se déforment aisément. On doit les coller avec un peu de cire vierge appliquée, comme de la soudure, avec un bout de fil de fer chauffé.

60. Démonstration de la loi en raison inverse du carré des distances.

Plaçons en O l'aiguille d'un magnétomètre. Étudions les déviations α produites par un aimant dans les deux positions 1 et 2, en fonction de la distance r (fig. 73).

L'expérience montre qu'elles sont bien représentées par les formules :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{H} f_1(r), \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{H} f_2(r), \quad (1)$$

données au § 57, où les A et B sont déterminés par l'expérience.

Or la *forme* des développements en série (suivant les inverses des puissances paires de la distance) suppose l'exactitude de la loi en raison inverse du carré de la distance; inversement, la conformité des résultats avec les formules (1) prouve l'exactitude des hypothèses fondamentales.

La vérification précise est due à l'illustre Gauss, qui a mis ainsi hors de doute la loi de Coulomb, c'est-à-dire la possibilité de calculer les phénomènes en partant de molécules polarisées dont les masses, égales et de signes contraires, agissent en raison inverse du carré de la distance : *ce qui du reste ne prouve pas la réalité objective de ces masses.*

61. Comparaison des moments magnétiques par la méthode du magnétomètre.

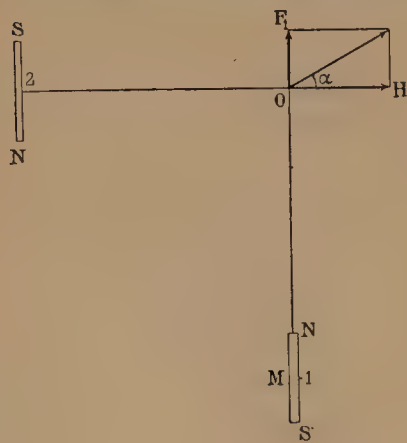


Fig. 73.

On fait agir les aimants sur l'aiguille d'un magnétomètre, dans l'une des positions fondamentales et à la même distance du centre des aimants à comparer au centre de l'aiguille du magnétomètre (fig. 73). Si cette distance est un multiple suffisant de la longueur de tous les barreaux, les moments sont entre eux comme les déviations de l'aiguille.

La méthode perd toute simplicité quand cette condition n'est pas satisfaite. Pour l'employer, il devient nécessaire d'opérer pour chaque barreau *au moins à deux distances*, ce

qui permet de calculer le coefficient du second terme du développement en série (§ 57).

62. Comparaison de champs horizontaux à peu près uniformes. Défecteurs.

1°. — DÉFLECTEUR DE POUILLET.

Un cercle de cuivre ou de bois peut tourner dans son plan horizontal autour de l'axe O; en O est le centre d'une aiguille aimantée suspendue par un fil de cocon, par conséquent libre de s'orienter dans ce plan.

Le cercle porte deux aimants horizontaux dans le prolongement l'un de l'autre; leurs pôles de noms contraires sont en regard. Ils

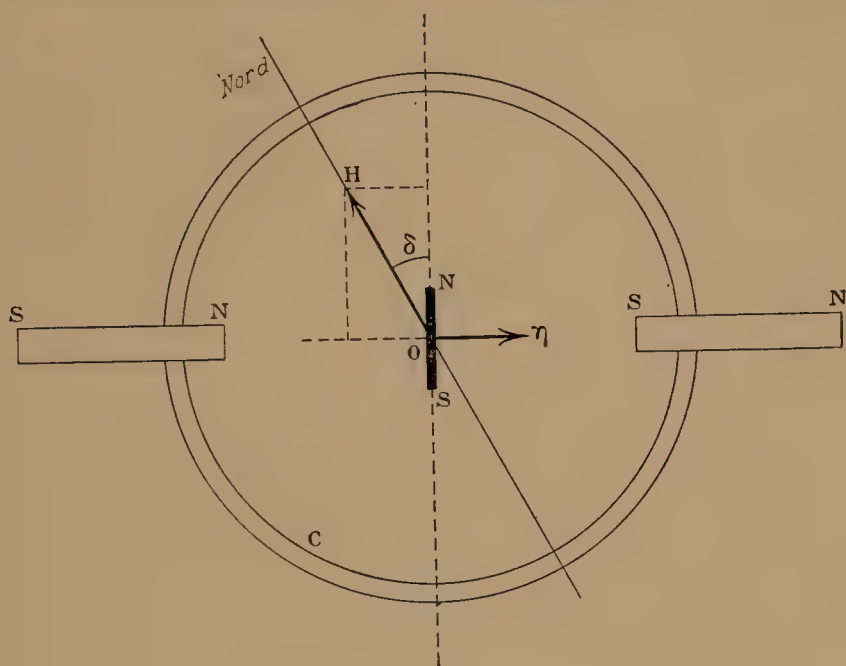


Fig. 74.

créent au point O un champ horizontal sensiblement uniforme (fig. 57), d'intensité η . On peut enlever les aimants et les replacer dans des positions toujours identiques.

Enlevons les aimants, déterminons la direction de l'aiguille (méridien magnétique). Replaçons-les, déterminons la déviation δ de l'aiguille hors du plan méridien magnétique, quand les aimants sont normaux à l'aiguille déviée : c'est alors que δ est maximum.

$$\text{On trouve :} \quad H \sin \delta = \eta. \quad (1)$$

L'intensité du champ résultant est alors $H \cos \delta$, comme on le peut vérifier en déterminant la période de l'aiguille écartée de sa position d'équilibre.

Soit T la période primitive, T_1 la nouvelle; on a :

$$T^2 = T_1^2 \cos \delta.$$

L'aiguille est devenue paresseuse; elle dort.

Recommençons l'expérience en un autre lieu, par exemple sur le pont d'un navire, après l'avoir exécutée à terre (voir tome II); nous trouvons une autre déviation δ' :

$$H' \sin \delta' = \eta;$$

d'où : $H \sin \delta = H' \sin \delta'$; d'où enfin le rapport : $H' : H$.

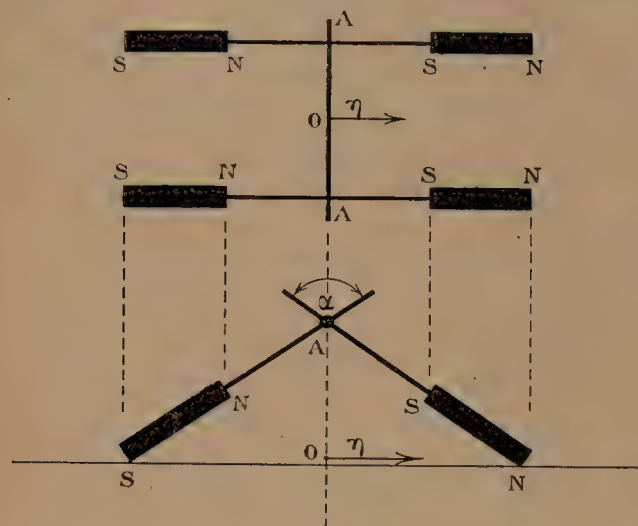


Fig. 75.

2°. — DÉFLECTEUR DE LORD KELVIN.

La méthode de lord Kelvin est analogue à celle (très antérieure) de Pouillet; le champ η peut maintenant varier.

Quatre petits aimants sont disposés de manière à produire en O un champ uniforme dans une portion suffisante de l'espace. La partie haute de la figure 75 les représente en projection horizontale. La partie basse de la figure

les représente en projection verticale : ils sont inclinés sur l'horizon

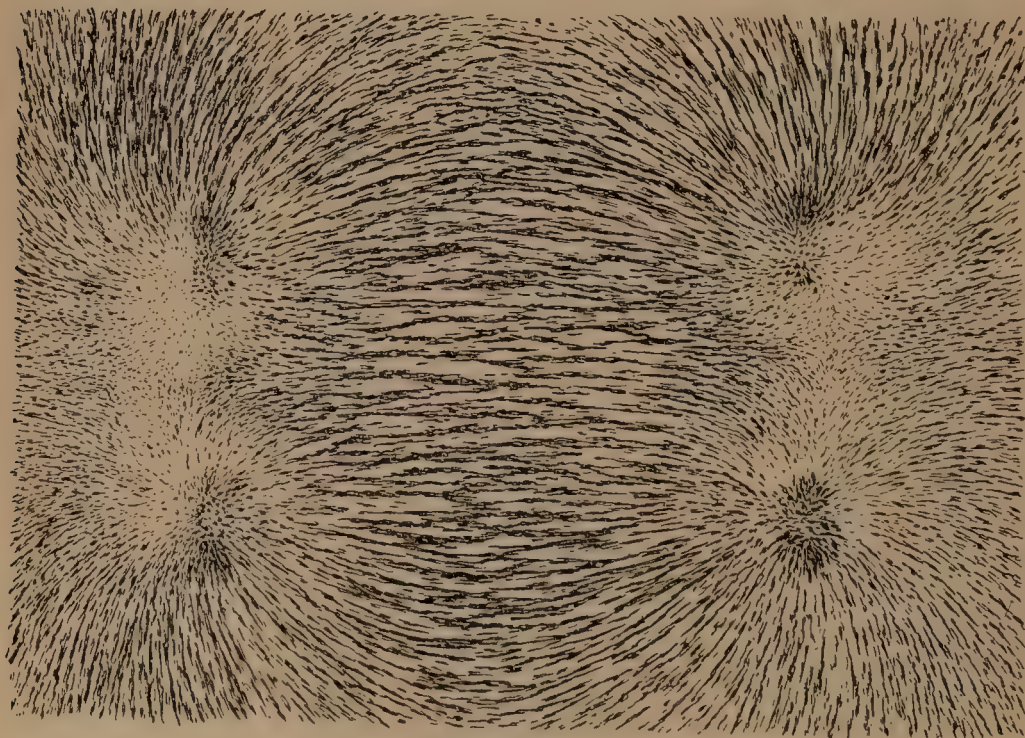


Fig. 76.

et montés sur un axe commun A. L'intensité horizontale η du champ au point O dépend de l'angle α qu'on fait varier par des procédés lents, faciles à imaginer.

La figure 76 montre le spectre dans le plan horizontal où se trouve l'aiguille mobile.

L'expérience consiste à orienter le système des aimants et à modifier α jusqu'à obtenir un champ η de grandeur et de direction telles que $\delta = 90^\circ$. Nous savons qu'alors (§ 58) les champs H et η sont sensiblement égaux et opposés.

Pour établir une table reliant α et η , on détermine la déviation δ pour une série de valeurs de α ; la formule (1) donne, en fonction de α , les valeurs *relatives* de η , les seules qui interviennent dans la comparaison de deux champs.

Nous ne saurions trop recommander aux laboratoires d'enseignement de faire exécuter ces expériences usuelles et très importantes.

63. Méthode de Gauss pour la détermination de MH et de M : H.

Il est impossible de déterminer le moment magnétique d'un barreau en valeur absolue, sans déterminer simultanément l'intensité d'un champ. Soient M le moment magnétique du barreau, H la composante horizontale d'un champ en un point O, par exemple du champ terrestre plus ou moins modifié par des aimants.

Au point O faisons osciller le barreau sous l'influence du champ H, en le suspendant par un fil sans torsion, de manière que son axe magnétique soit horizontal. La durée d'oscillation est (§ 51) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{MH}};$$

d'où MH.

Plaçons en O l'aiguille d'un magnétomètre; son axe magnétique s'oriente suivant OH (fig. 73). Disposons dans la position 1, à une distance r , le barreau de moment M que nous étudions : il crée un champ normal au champ H.

L'aiguille du magnétomètre tourne d'un angle α , tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M f_1(r)}{H}.$$

Comme première approximation, on a :

$$f_1(r) = \frac{2}{r^3};$$

des expériences faites avec plusieurs distances r permettent de calculer A_1 et B_1 .

On a donc M : H avec toute la précision désirable.

Connaissant MH et M : H, on peut calculer M et H.

Quand on place le barreau dans la position 2, la déviation est :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M f_2(r)}{H}.$$

On opère comme ci-dessus.

64. Unité CGS. d'intensité de champ : gauss.

Les formules :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{H} f(r),$$

définissent *par convention* les intensités de champ magnétique et les moments magnétiques en valeur absolue ; par conséquent, elles définissent *conventionnellement* l'unité d'intensité de champ et l'unité de moment magnétique.

On mesure T en secondes, I en grammes masse et en centimètres, r en centimètres ; par convention, M et H sont alors exprimés numériquement en unités absolues CGS. Comme pour arriver à ces formules, nous admettons que deux masses m_1 et m_2 agissent l'une sur l'autre d'après la relation : $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, implicitement nous appelons *unité de masse magnétique* celle qui, agissant à un centimètre sur une masse égale, exerce sur elle la force d'une dyne.

L'unité CGS. d'intensité de champ s'appelle *gauss* ; la composante horizontale du champ terrestre en France est voisine de 0^g,19.

Admettons que l'inclinaison soit égale à 61° : quelle est l'intensité totale F du champ terrestre ?

On a :

$$F \cos 61^\circ = H = 0,19; \quad \text{d'où} \quad F = 0,19 : 0,485 = 0^g,39.$$

La composante verticale V est donnée par la formule :

$$V = H \operatorname{tg} 61^\circ = 0,19 \times 1,804 = 0^g,34.$$

65. Résultats numériques.

Si l'intensité d'aimantation d'un aimant cylindrique est partout parallèle aux génératrices, c'est un solénoïde ; il n'existe de magnétisme libre que sur les sections droites terminales. Le moment M est égal au volume V multiplié par l'intensité d'aimantation :

$$M = JV.$$

Dans la section droite qui passe par le milieu de l'aimant et qui, pour un aimant allongé, est assez éloignée des bouts pour que l'action du magnétisme libre (force démagnétisante) soit sensiblement nulle, l'induction magnétique a pour expression :

$$\mathfrak{B} = 4\pi J.$$

Aucun aimant ne satisfait rigoureusement à la définition du solé-

noïde; mais on convient de définir une intensité d'aimantation et une induction moyennes, comme si l'aimantation était solénoïdale.

Voici quelques nombres pour fixer les idées.

Un aimant en bon acier, bien trempé et bien aimanté, ayant la forme d'un prisme droit d'un centimètre carré de section et de 10 centimètres de longueur, ayant par conséquent un volume $V=10$, a une intensité d'aimantation moyenne *permanente* de l'ordre de 100 unités. Son moment M est de l'ordre de 1000 unités.

L'induction \mathfrak{B} est de l'ordre de $400\pi=1257$.

Pour certains aciers, les nombres peuvent être doubles.

Précisons la signification de ces nombres.

Si le barreau peut tourner seulement dans le plan horizontal (sur un pivot), tout se passe comme s'il n'était soumis qu'à la composante horizontale du champ.

Pour le maintenir normalement aux lignes de force du champ, normalement au méridien magnétique (§ 38), il faut un couple MH de $0,19 \times 1000 = 190$ ergs (dyne centimètre).

Ce couple vaut environ 194 milligrammes appliqués à l'extrémité d'un bras de levier d'un centimètre, soit 0,194 grammes centimètre.

Prenons 8 comme densité de l'acier : le poids du barreau est 80 grammes; son moment d'inertie est 660 environ (*Mécanique rationnelle*, § 18).

Sa durée d'oscillation est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{660}{190}} = 11^s,8.$$

On augmente l'aimantation moyenne résiduelle par un choix convenable des aciers. Ils doivent renfermer, outre le carbone, du chrome ou du tungstène dans la proportion de 2 à 3 %.

Avec des barreaux de ces aciers spéciaux, à section carrée et dont la longueur est 20 fois le côté, on obtient des aimantations moyennes dépassant 500. Nous reviendrons là-dessus dans les *Applications* (seconde partie de ce Cours).

On comprend aisément pourquoi de longs barreaux conservent des aimantations permanentes plus grandes que des barreaux courts. Le magnétisme libre produit un champ *démagnétisant*, qui tend à créer une aimantation de sens contraire à celle du barreau, par conséquent à diminuer celle qu'il possède. La force démagnétisante croît à mesure que le barreau est plus court. Des fils d'acier très longs, où la force démagnétisante est quasiment nulle, conservent des intensités d'aimantation de l'ordre de 800.

CHAPITRE IV

CHAMPS DES COURANTS

La découverte fondamentale d'Ampère est l'assimilation (avec des restrictions que nous énoncerons plus loin, § 78) des actions magnétiques d'une molécule polarisée et d'un petit courant électrique plan, normal à l'axe de la molécule. Comme nous le verrons, cela revient à assimiler (avec les restrictions susdites) les actions magnétiques des courants finis à deux couches minces de matière magnétique, de densités égales et de signes contraires, étendues sur les faces d'une surface *quelconque* limitée au courant.

Nous sommes donc conduits à étudier *in abstracto* les propriétés de ces doubles couches appelées *feuillet*s.

Nous avons le moyen de déterminer en valeurs absolues les champs magnétiques et les moments des aimants. L'assimilation des effets des courants et des aimants nous amène donc à la définition de l'unité d'intensité CGS., telle qu'elle a été adoptée à Chicago (1893).

Le courant unité est celui qui, passant dans un circuit, produit les mêmes effets qu'un feuillet (couche double précédemment définie) limité à ce circuit et dont le moment magnétique par unité de surface (puissance du feuillet) est égal à l'unité.

Par commodité, on prend pour unité pratique le dixième de l'unité CGS. : c'est l'*ampère*.

Pour fixer les idées du lecteur, disons qu'un ampère, passant dans une solution aqueuse d'azotate d'argent pur, libère par seconde 1,118 milligrammes d'argent.

Feuillets.

66. Définition. Potentiel sur un point extérieur.

1°. — La matière polarisée est réduite à une surface mince.

L'intensité de polarisation \mathfrak{J} est partout normale à la surface et en

raison inverse de l'épaisseur e . La puissance Φ du feuillet, par hypothèse constante en tout point, est définie par l'équation :

$$\Phi = e\mathcal{J} = e\tau.$$

Soit dS un élément du feuillet. Menons les normales au feuillet par tous les points du pourtour de l'élément; nous découpons un doublet de moment : ΦdS .

Le potentiel du feuillet en un point extérieur A est (§§ 23 et 40) :

$$V = \iint \frac{dM \cos \theta}{R^2} = \Phi \iint \frac{dS \cos \theta}{R^2} = \Phi \Omega;$$

Ω est l'angle solide sous lequel est vue du point A la face positive du feuillet.

Le potentiel V est donc indépendant de la forme du feuillet : il ne dépend que de sa puissance et du contour qui le limite.

On a une représentation concrète du feuillet (même une réalisation matérielle approchée) en plantant normalement à une surface des aiguilles, aimantées toutes de la même manière (en paquet); on en met le même nombre dans chaque centimètre carré. On prend, par exemple, un carton plan (fig. 77); on colle dessus du papier quadrillé; on aimante des aiguilles (nous verrons plus loin comment); enfin on en plante une, normalement au carton, à chaque sommet du quadrillage.

2°. — Pour fixer le signe du potentiel, prenons comme exemple le feuillet hémisphérique de la figure 78. Sur un demi-ballon, on trace un quadrillage découpant des aires constantes; on plante radialement une aiguille dans chaque élément d'aire. Les pôles sud ou négatifs sont supposés à l'intérieur.

Du point A_1 , nous voyons le pourtour du feuillet sous l'angle solide ω_1 inférieur à 2π ; le potentiel est positif. Nous n'avons pas à tenir compte de l'angle solide ω' , parce que les droites qui le limitent rencontrent deux fois le feuillet; autrement dit, nous voyons la face

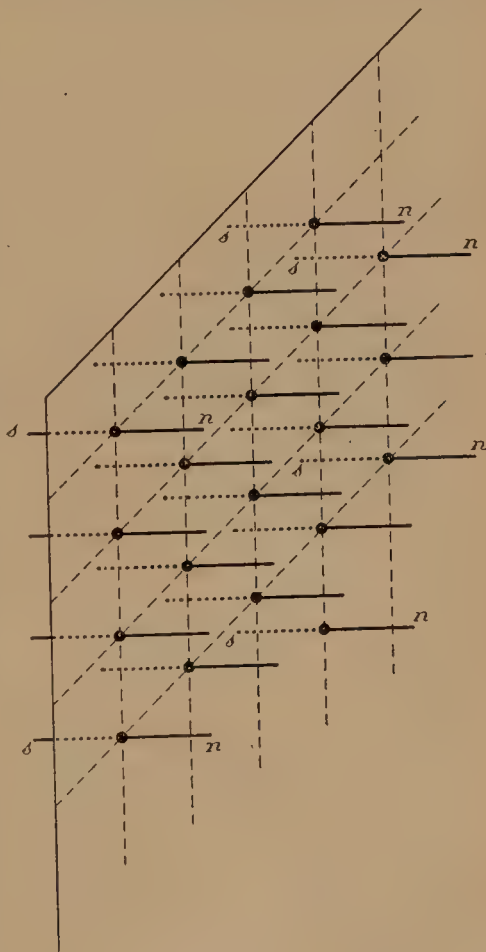


Fig. 77.

positive d'une portion du feuillet sous l'angle ω' , et la face *négative* d'une autre portion du feuillet sous le même angle ω' ; les effets de ces deux portions se détruisent sur tout point.

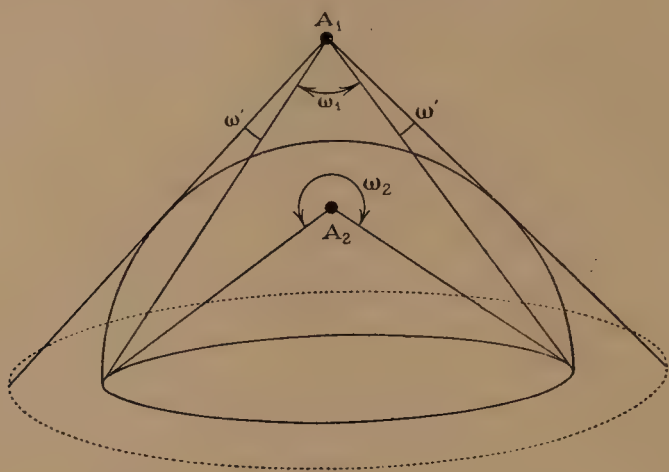


Fig. 78.

Du point A_2 , nous voyons la face *négative* du feuillet sous l'angle ω_2 supérieur à 2π .

Le déplacement d'une masse positive a lieu dans le sens des potentiels décroissants. Si la masse $+m$ passe de A_1 à A_2 sans traverser le feuillet, le travail disponible est le produit par m de la diminution du potentiel :

$$\mathcal{C} = m\Phi [\omega_1 - (-\omega_2)] = m\Phi [\omega_1 + \omega_2].$$

3°. — Rapprochons les deux points de manière qu'ils ne soient séparés que par l'épaisseur du feuillet; les angles solides ω_1 et ω_2 sont tels qu'on ait :

$$\omega_1 + \omega_2 = 4\pi.$$

Le travail disponible quand une masse m passe de A_1 à A_2 sans traverser le feuillet est, quel que soit le chemin :

$$\mathcal{C} = 4\pi m\Phi.$$

Ces résultats *absolument généraux* ne supposent pas le feuillet hémisphérique.

67. Cas particuliers.

1°. — FEUILLET CIRCULAIRE. FORCE EXERCÉE EN UN POINT DE SON AXE. Reprenons les notations du § 23. L'angle solide a pour valeur :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right).$$

Sur un point de l'axe du disque, la force F est par raison de symétrie dirigée suivant l'axe; on a :

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\Phi \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\frac{2\pi\Phi}{R} : \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La force F_0 tout près du feuillet est : $F_0 = 2\pi\Phi : R$. D'où

$$F = F_0 : \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

REMARQUE. — Le résultat précédent peut être obtenu à partir des résultats du § 34. Nous avons montré que l'action d'une couche circulaire de densité σ sur un point de son axe est : $\Omega\sigma$. Or le feuillet est équivalent à deux couches de densité $\pm\sigma$ situées à la distance e . On a donc :

$$F = \Omega\sigma - \left(\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial r} e\right)\sigma = -e\sigma \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\Phi \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

2°. — FEUILLET FORMÉ D'UN DEMI-PLAN P LIMITÉ PAR UNE DROITE INDÉFINIE D .

Reprenons la figure 7 du § 11; son plan est normal à la droite D dont le point D est la trace.

La droite PD est la trace du feuillet sur le plan de la figure.

Cherchons sous quel angle on voit le demi-plan P d'un point quelconque A . Suivant la définition des angles solides, menons par le point A des droites qui s'appuient sur le pourtour du demi-plan. Elles forment un cône qui se réduit ici à deux plans normaux au plan de la figure et dont les traces sont les droites AP' et AD .

Traçons du point A comme centre une sphère de rayon 1; déterminons l'aire découpée sur cette sphère par le cône précédemment obtenu.

C'est l'aire d'un fuseau d'angle $\widehat{P'AD} = \pi - \alpha$.

L'aire de ce fuseau est : $2(\pi - \alpha)$.

COROLLAIRES. — 1° Les surfaces équipotentielles sont des demi-plans s'arrêtant à la droite D .

2° Les lignes de force sont des circonférences admettant comme centres les points de la droite D , et situées dans des plans normaux à cette droite.

3° La force en un point A est en raison inverse de la distance AD .

Ce sont précisément ces corollaires que nous avons rencontrés au § 11.

68. Énergie potentielle d'un feuillet dans un champ.

1°. — Nous avons trouvé pour énergie potentielle d'une molécule polarisée, l'expression :

$$\frac{\partial V}{\partial n} dM.$$

Pour les feuillets : $dM = \Phi dS$. La direction On de l'élément polarisé est la normale à la surface du feuillet.

Donc l'énergie potentielle du feuillet dans le champ est :

$$W = \Phi \iint \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Elle est égale au produit de la puissance par le flux de force qui passe dans le sens $+$ — à travers la surface du feuillet; autrement dit, par le flux qui pénètre dans le feuillet par la face positive. Ce théorème est fondamental.

Comme au § 48, le champ qui a V pour potentiel est dû aux masses agissantes autres que celles qui constituent le feuillet.

En particulier, si le feuillet est soumis à l'action d'une masse $+m$ et si l'observateur placé sur cette masse voit la face positive du feuillet sous l'angle solide Ω , l'énergie potentielle du feuillet dans le champ de la masse $+m$ est : $W = m\Phi\Omega$.

En effet, $m\Omega$ est le flux envoyé par la masse m dans l'angle solide Ω dont elle est le sommet (§ 24).

2°. — MOUVEMENTS DU FEUILLET.

Le feuillet abandonné à lui-même se déplace de manière que son énergie potentielle diminue; c'est-à-dire de manière que le flux qui entre par la face positive devienne minimum, ou que le flux qui entre par la face négative devienne maximum.

Toute l'électrodynamique est comprise dans cet énoncé.

Soient a, b, c, \dots les variables généralisées qui fixent la position d'un feuillet de puissance Φ ; soit $\mathcal{F}(a, b, c, \dots)$ le flux qu'il reçoit à travers sa face négative, flux qui, positif par convention (§ 2), le traverse de la face négative à la face positive.

Les forces suivant les variables a, b, c, \dots sont :

$$F_a = \Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}, \quad F_b = \Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b}, \quad F_c = \Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}, \dots$$

Nous supposons le contour du feuillet invariable. Les mêmes formules donnent les forces qui tendent à modifier le contour; les variables généralisées a, b, c, \dots fixent alors la forme de ce contour.

Champs des courants.

69. Règles générales.

Pour produire les courants, nous utiliserons un électromoteur quelconque défini par deux pôles ($+$ et $-$), auquel nous ne demandons que d'être constant. L'étude des électromoteurs est faite dans la troisième partie de ce Cours (Champ électrique).

Au voisinage d'un circuit traversé par un courant apparaît un champ magnétique.

1°. — Pourvu que l'on tienne à distance tous les corps faciles à aimanter (fer, nickel, cobalt, ...), la forme des lignes de force du champ est indépendante de l'intensité du courant. En particulier, le spectre magnétique formé en un point quelconque d'un plan horizontal reste le même quelle que soit cette intensité.

La règle ne s'applique pas quand, au voisinage du circuit, se trouvent des masses faciles à aimanter (fer, nickel, cobalt, ...), parce que ces corps ne s'aimantent pas proportionnellement à l'intensité du champ. La règle s'appliquerait alors même que les corps seraient faciles à aimanter, si la proportionnalité susdite existait.

De cette première règle résulte que si un système de courants produit en un point un champ *nul* pour une certaine intensité, il produit un champ *nul* pour toutes les intensités; d'où le moyen de compenser en un point l'action d'un circuit au moyen d'un autre circuit traversé par le même courant. Ce moyen n'est pas illusoire parce que, la distance intervenant, la compensation peut avoir lieu en un point sans exister en d'autres points.

2°. — Quand on intervertit le sens de tous les courants, le champ

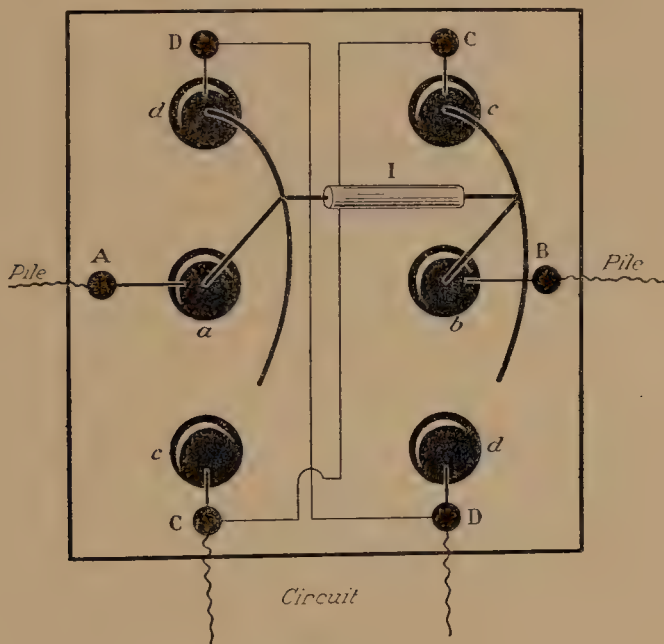


Fig. 79.

conserve sa direction et sa grandeur; il change seulement de sens. Les spectres magnétiques ne sont donc aucunement modifiés, puisqu'ils sont liés à la forme des lignes de force indépendamment de leur sens.

Pour renverser le courant dans un circuit (opération fréquente), on utilise l'appareil simple (représenté dans la figure 79). La partie essentielle est constituée par six godets pleins de mercure (petits

pots de pommade en porcelaine des pharmaciens), qui ont pour ogements des trous creusés dans une planche épaisse.

Un double pont de cuivre, dont les moitiés sont réunies par un cylindre isolant I, bascule autour des tiges médianes qui plongent dans les pots *a* et *b*. On réunit ainsi les pôles A et B de la pile aux extrémités C et D du circuit, soit de la manière (A, D), (B, C) que représente la figure, soit de la manière inverse (A, C), (B, D).

On complétera l'appareil au moyen de six *bornes* vissées sur la planche, communiquant par de gros fils de cuivre avec le mercure des godets. Elles permettent d'établir plus rapidement les connexions.

Bien d'autres appareils se trouvent chez les marchands; ils sont moins simples, plus chers, infiniment moins pratiques que le précédent.

3°. — En un point quelconque du champ d'un circuit, l'intensité est proportionnelle à l'intensité du courant *mesurée par électrolyse*.

La démonstration de cette règle résulte de la mesure des durées des petites oscillations d'une petite aiguille aimantée horizontale, suspendue par un fil de cocon et ayant son centre au point considéré A. On s'arrange de manière qu'au point A, la composante horizontale du champ terrestre soit parallèle à la composante du champ dû au courant. Ce résultat est obtenu quand l'aiguille, immobile, ne dévie pas au moment où l'on ferme le circuit de la pile.

Soit *n* le nombre des oscillations par minute quand le courant ne passe pas. Soit *i* l'intensité du courant, N le nombre des oscillations correspondant. On a (§ 51) en tout point A :

$$i = k(N^2 - n^2),$$

où *k* est un coefficient, constant pour un point A du champ, variable d'un point à l'autre.

70. Hypothèse d'Ampère.

1°. — Les propositions générales précédentes simplifient le problème à résoudre. Dans la recherche des lois d'action du courant, elles nous permettent de faire abstraction de l'intensité qui interviendra comme facteur avec le signe + ou le signe —, suivant le sens du courant.

Voici maintenant l'hypothèse d'Ampère conforme aux expériences.

La force magnétique en tout point du champ créé par un courant est identique à l'INDUCTION due à un feuillet de puissance convenable, limité au conducteur dans lequel passe le courant.

Cette loi n'a de sens que pour un courant *permanent*, dans un conducteur *linéaire, fermé, sans dérivation*.

Nous verrons plus loin comment on généralise.

Le sens du courant est défini par les phénomènes électrolytiques (voir *Thermodynamique*); *par convention*, l'hydrogène et les métaux *descendent* le courant.

Ceci posé, la face positive du feuillet équivalent est à la gauche du bonhomme d'Ampère traversé des pieds à la tête par le courant et tenant le feuillet entre ses bras.

L'unité d'intensité C.G.S. est par définition l'unité de puissance du feuillet équivalent; l'unité pratique, *l'ampère*, est le dixième de l'unité C.G.S.

Le nombre qui mesure l'intensité d'un courant en ampères est donc dix fois plus grand que le nombre qui mesure en unités C.G.S. la puissance du feuillet producteur des mêmes effets magnétiques.

2°. — Le feuillet est quelconque, pourvu qu'il s'applique au contour traversé par le courant. Cela résulte : de la propriété des feuillets de produire en tout point *extérieur* un champ indépendant de leur surface et ne dépendant que du contour qui la limite (§ 66); de la propriété du vecteur induction magnétique d'être continu, non seulement hors du feuillet (où il se confond avec la force magnétique due au feuillet), mais encore dans la traversée du feuillet.

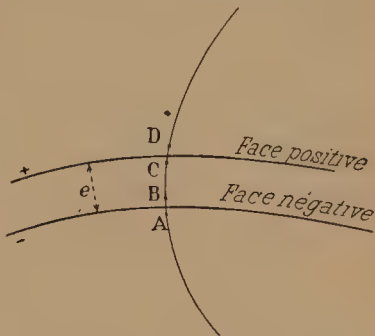


Fig. 80.

Nous avons démontré généralement cette dernière proposition au § 42; mais il est utile de reprendre la démonstration dans le cas particulier.

Supposons que l'unité de magnétisme positif parvienne au point A de sa trajectoire, très voisin de la face négative du feuillet (fig. 80). Assimilons celui-ci à deux couches de densité constante σ placées à une distance e ; sa puissance Φ est :

$$\Phi = \sigma e.$$

Soit F la force en A. Elle subit, quand le point passe en B, une brusque variation. Les parties voisines du point A de la plaque négative exerçaient une force normale, dirigée dans le sens AB, égale à $2\pi\sigma$; elles exercent maintenant une force égale, mais dirigée dans le sens BA : la discontinuité, quand on passe de A à B, est donc représentée par une force $4\pi\sigma$ dirigée de B vers A (§ 36).

L'intensité d'aimantation étant normale à la surface du feuillet, la densité σ est égale à l'intensité (§ 41) : $\mathfrak{J} = \sigma$.

La discontinuité est donc égale à $4\pi\mathfrak{J}$ et dirigée de B vers A.

Évaluons maintenant le vecteur induction. En A à l'extérieur du feuillet il se confond avec la force magnétique; en B il est égal à la résultante de la force et du vecteur $4\pi\mathfrak{J}$ qui est dirigé de B vers C, ou de A vers B.

Or nous venons de montrer que la force subit précisément une discontinuité égale et de signe contraire. En ajoutant à la force le

vecteur $4\pi\delta$ dirigé de A à B, nous supprimons la discontinuité : le vecteur induction est donc continu au passage à travers le feuillet.

Le travail du vecteur induction quand la masse traverse le feuillet fictif est donc infiniment petit (c'est-à-dire négligeable), puisque la force est finie et le chemin (égal à l'épaisseur) infiniment petit. L'hypothèse d'Ampère n'a de sens que parce qu'il en est ainsi, la surface du feuillet équivalent au courant n'existant pas en réalité.

LE LECTEUR S'ÉTONNERA PEUT-ÊTRE DE CES PRÉCISIONS QU'IL JUGERA OISEUSES ; JE NE TROUVE PAS OISEUX DE NE PAS ÊTRE ABSURDE. NE PAS EXPLIQUER DANS SON DÉTAIL UNE THÉORIE FONDAMENTALE ET D'APPLICATION JOURNALIÈRE, C'EST PRENDRE SON LECTEUR POUR UN IMBÉCILE.

71. Assimilation d'une molécule polarisée et d'un courant fermé élémentaire.

1°. — Les actions de deux courants de même intensité, passant

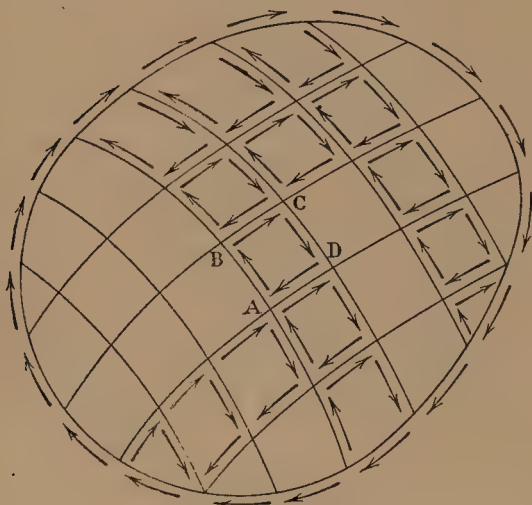


Fig. 81.

dans des conducteurs extrêmement voisins, se compensent en tous les points ; elles sont égales et de sens contraires : cela résulte de l'hypothèse fondamentale.

Ceci posé, soit un circuit quelconque fini, traversé par un courant d'intensité I . Faisons passer par lui une surface quelconque à laquelle il sert de limite. Traçons sur cette surface un quadrillage quelconque ; enfin envoyons simultanément dans les lignes de ce quadrillage deux courants

égaux à I et de sens contraires. Les actions extérieures ne sont modifiées en rien d'après la conséquence ci-dessus rappelée de l'hypothèse fondamentale.

Nous formons ainsi une infinité de petits circuits fermés.

Donc un petit courant fermé ABCD, limitant une aire infiniment petite dS , assimilable à un élément plan, est équivalent à une molécule polarisée dont l'axe est normal à son plan et dont le moment Φ par unité de surface est numériquement égal à l'intensité du courant.

On peut raisonner en sens inverse, partir de l'assimilation de la molécule polarisée et du courant fermé élémentaire ; on aboutira pour un circuit fini à un *théorème* qui est précisément notre postulat.

2°. — Les expériences extrêmement précises de Weber ont mis hors de doute l'identité des champs créés par un courant et un aimant, à une distance relativement grande par rapport aux dimensions du courant et de l'aimant (§ 40). Toutes choses égales d'ailleurs, le champ dû au courant varie en raison inverse du cube de la distance. Le courant, quelle que soit la forme du circuit, est caractérisé par un moment magnétique parfaitement déterminé.

72. Existence de dérivations.

L'assimilation d'un courant à un feuillet est encore possible quand il y a des dérivations grâce à l'hypothèse suivante : *les courants sont toujours fermés*, il n'y a jamais accumulation de ce qui constitue le courant. Même quand on charge un condensateur, le courant se ferme à travers les isolants suivant un mécanisme spécial (courants de déplacement), mais de manière que nous puissions toujours retrouver les éléments constitutifs d'un certain nombre de courants linéaires fermés, assimilables chacun à un feuillet.

Montrons sur une dérivation comment il faut entendre cette proposition.

Dans le circuit principal circule un courant I ; dans les circuits formant la dérivation circulent les courants i_1, i_2, i_3 , tels qu'on ait :

$$I = i_1 + i_2 + i_3.$$

Faisons d'abord abstraction de la pile : remplaçons-la par un conducteur linéaire.

Le système est équivalent à trois feuillets :

le premier, de puissance	i_1 ,	est limité au contour :	ACBPA ;	
le second,	—	i_2 ,	—	ADBPA ;
le troisième,	—	i_3 ,	—	AEBPA.

Les trois feuillets s'appliquent au contour ouvert ABP; mais on a :

$$I = i_1 + i_2 + i_3.$$

Les courants se ferment à l'intérieur de la pile; nous pouvons la considérer comme une dérivation plus ou moins complexe et appliquer le raisonnement précédent.

Dans bien des cas où le circuit est ouvert, on peut le fermer par l'adjonction d'un conducteur parcouru par deux courants égaux et de signes contraires : on fait apparaître ainsi deux feuillets distincts sur lesquels on raisonnera. Nous verrons une application de ce procédé quand nous parlerons des bobines.

Grâce à l'hypothèse posée dans les paragraphes précédents, l'étude des champs des courants n'est plus qu'une affaire de calcul.

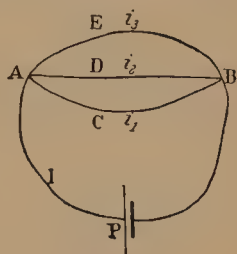


Fig. 82.

73. Loi de Biot et Savart. Force électromagnétique.

1°. — Le circuit 1 est traversé par un courant.

Nous voulons calculer le champ au point A (fig. 83).

Dans la direction A_1A_2 , la force est égale au taux de diminution du potentiel créé par le courant. Si Ω_1 est l'angle solide sous lequel on voit du point A_1 la face positive du feuillet, Ω_2 l'angle solide sous lequel on voit la même face du point A_2 , la force suivant A_1A_2 est (§ 68) :

$$\frac{\Phi}{A_1A_2} (\Omega_1 - \Omega_2).$$

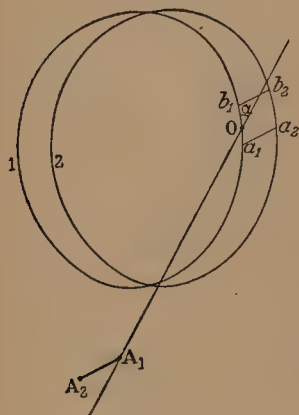


Fig. 83.

Comme seul le déplacement relatif intervient, laissons le point A_1 immobile et donnons au circuit 1 une translation égale et de sens contraire à A_1A_2 . Le circuit vient en 2; un élément a_1b_1 occupe après la translation la position a_2b_2 .

La force en A_1 suivant la direction A_1A_2 a pour expression :

$$\frac{\Phi}{b_1b_2} (\Omega_1 - \Omega_2),$$

Ω_1 étant toujours l'angle solide sous lequel nous voyons la face positive du circuit 1 du point A_1 , Ω_2 étant maintenant l'angle solide sous lequel nous voyons du même point A_1 la face positive du circuit 2.

La variation $\Omega_1 - \Omega_2$ dépend du déplacement de tous les éléments du circuit.

2°. — Posons que la force créée au point A_1 par l'élément $ds = \overline{a_1b_1}$, peut être calculée, INDÉPENDAMMENT DU RESTE DU CIRCUIT, par la diminution élémentaire d'angle solide due au déplacement de cet élément.

Cette diminution est évidemment, au signe près, l'angle ω sous lequel on voit du point A_1 l'aire $a_1b_1b_2a_2$. Si cette aire présente au point A_1 sa face négative, l'angle solide diminue : la force due à l'élément est dirigée suivant A_1A_2 . Si elle présente sa face positive, l'angle solide augmente : la force est dirigée suivant A_2A_1 .

3°. — DIRECTION DE LA FORCE.

La force varie évidemment avec la direction A_1A_2 ; cherchons pour quelle direction elle est maxima.

Il faut que l'aire $a_1b_1b_2a_2$ soit maxima pour une longueur donnée b_1b_2 ; donc b_1b_2 est alors normal à l'élément ds .

Il faut que l'aire soit le plus possible normale au rayon visuel A_1O , afin que, pour une aire donnée, l'angle ω soit le plus grand possible : donc b_1b_2 est alors normal à A_1O .

En définitive, la force au point A_1 est maxima pour un déplacement A_1A_2 perpendiculaire au plan formé par l'élément ds et par la droite qui le joint au point A.

4°. — SENS DE LA FORCE.

La force est dirigée suivant A_1A_2 si l'élément de feuillet tourne vers A_1 sa face négative.

Le bonhomme d'Ampère a donc les pieds en b_1 ou b_2 , la tête en a_1 ou a_2 : la direction A_1A_2 est vers sa gauche. *Donc la force créée en un point par un élément de courant est vers la gauche du bonhomme d'Ampère convenablement placé sur le courant et regardant le point.*

5°. — GRANDEUR DE LA FORCE.

L'aire $a_1b_1b_2a_2$ est égale à $\overline{a_1b_1} \cdot \overline{b_1b_2}$ quand la force est maxima, puisque alors le parallélogramme est un rectangle. Soit α l'angle de la direction A_1O avec l'élément ds . L'angle solide est :

$$\frac{\overline{a_1b_1} \cdot \overline{b_1b_2} \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{ds \sin \alpha}{r^2} \cdot \overline{b_1b_2},$$

en posant : $\overline{A_1O} = r$. Pour obtenir la force, il faut multiplier par la puissance Φ du feuillet et diviser par le déplacement qui est $\overline{b_1b_2}$. Elle a donc pour expression :

$$\Phi \frac{ds \sin \alpha}{r^2}.$$

En définitive, l'hypothèse du § 70 est, *pour un circuit fermé quelconque*, rigoureusement équivalente à la loi suivante découverte par Biot et Savart :

Chaque élément de courant ds exerce en un point A une force normale au plan formé par l'élément et la droite qui le joint au point A; elle est dirigée vers la gauche du bonhomme d'Ampère placé sur l'élément et traversé par le courant des pieds à la tête; elle a pour expression :

$$\Phi \frac{ds \sin \alpha}{r^2}.$$

Si l'intensité du courant est exprimée en ampères, la grandeur de la force exercée sur l'unité de masse magnétique a pour expression en

dynes :

$$\frac{1}{10} \frac{ds \sin \alpha}{r^2}.$$

6°. — Bien entendu, si l'équivalence est absolue pour un circuit fermé, rien ne dit que, la première loi étant expérimentalement vérifiée, il en sera de même pour la seconde; car nous n'avons pu déduire la seconde de la première que grâce à une hypothèse supplémentaire.

L'expérience confirme-t-elle la loi de Laplace, par conséquent l'hypothèse?

Pour réaliser l'expérience, il faudrait disposer d'un élément ouvert de courant; on ne sait comment l'obtenir : les théories modernes admettent même que les courants sont toujours fermés. On ne sait pas davantage isoler l'action magnétique d'un élément déterminé

d'un courant fermé. S'il en est ainsi, la question posée est insoluble ; toute loi donnant la même résultante pour un circuit fermé est également admissible : elle doit être considérée seulement comme un outil de calcul.

Nous verrons plus loin (§ 93) à quelles singulières conséquences conduit la loi de Biot et Savart.

Nous appliquerons dans chaque cas celle des deux lois qui donne lieu aux calculs les plus simples. Nous montrerons sur quelques exemples leur équivalence.

74. Expression analytique de la loi de Biot et Savart.

1°. — La force électromagnétique est le produit vectoriel du vecteur ds de composantes dx , dy , dz (élément de courant) et du vecteur $1/r^2$ dirigé de l'élément vers le point considéré.

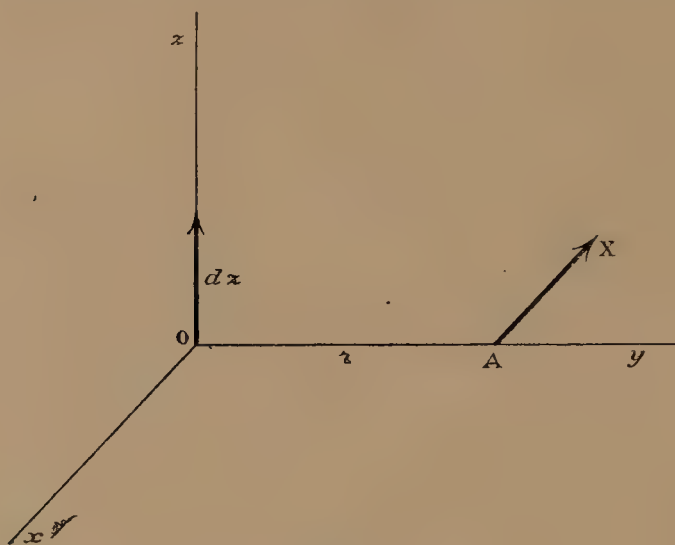


Fig. 84.

Soient λ , μ , ν , les cosinus directeurs de ce dernier vecteur.

On vérifiera immédiatement que, pour des axes à droite, les composantes X , Y , Z , de la force ont pour expressions (§ 3) :

$$X = \frac{\Phi}{r^2} (\nu dy - \mu dz), \quad Y = \frac{\Phi}{r^2} (\lambda dz - \nu dx), \quad Z = \frac{\Phi}{r^2} (\mu dx - \lambda dy).$$

Par exemple, dans la figure 84 on a :

$$dx = dy = 0, \quad \lambda = \nu = 0, \quad \mu = 1; \quad X = -\Phi dz : r^2,$$

ce qui est conforme à la règle du bonhomme d'Ampère.

2°. — PRINCIPES DES COURANTS SINUEUX.

La force due à un élément ds de courant est la résultante des forces dues aux composantes dx , dy , dz , de cet élément, agissant isolément.

Cette règle résulte immédiatement du fait que la force électromagnétique est un produit vectoriel.

Vérifions-la dans un cas particulier.

Au point A, les actions d'un élément quelconque de courant passant par O sont :

$$X = -\frac{\Phi dz}{r^2}, \quad Y = 0, \quad Z = \frac{\Phi dx}{r^2},$$

précisément ce qu'indique le principe des courants sinueux.

75. Champ d'un courant rectiligne fini ou indéfini.

1^o. — Pour trouver le champ du courant, il faut calculer l'induction due à un feuillet formé par un demi-plan limité au courant. Nous avons étudié complètement ce cas aux §§ 11 et 67.

Les lignes de force sont des cercles dont le plan est perpendiculaire au courant.

Le centre des cercles est la trace du courant sur leur plan. La force est en raison inverse de la distance r du point au courant; elle a pour expression : $2\Phi : r$. Si l'intensité est exprimée en ampères, la force sur l'unité de masse magnétique a pour valeur en dynes :

$$H = \frac{0.2 \cdot I}{r}.$$

2^o. — SPECTRE MAGNÉTIQUE.

L'étude des précautions à prendre pour réaliser le spectre magné-

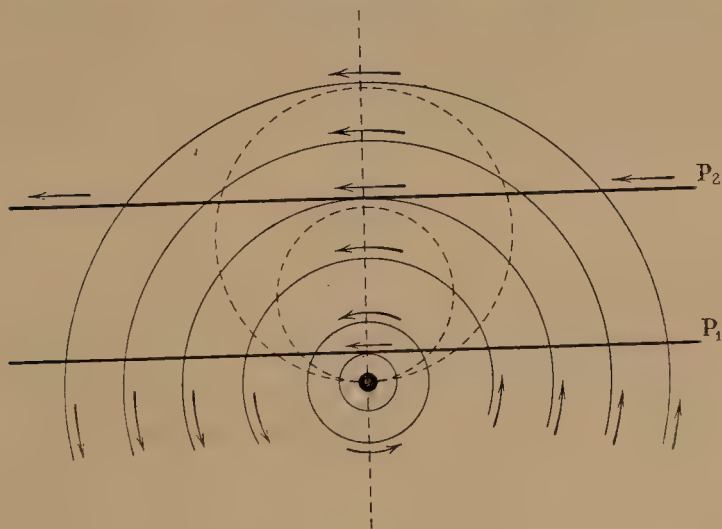


Fig. 85.

tique dans un plan parallèle au courant est un excellent commentaire des remarques du § 54.

La figure 85 représente une coupe perpendiculaire au courant.

Si le courant est très rapproché du plan P_1 où l'on forme spectre,

les lignes de limaille (qui sont évidemment rectilignes, parallèles et dans des plans normaux au courant) ne peuvent être distinguées que sur quelques millimètres, *si intense que soit le courant*.

En effet, les lignes de force coupent la plaque à *peu près normalement* dès qu'on se trouve à quelque distance du courant.

Corrélativement loin du courant, on voit les grains de limaille se hérissier normalement à la plaque quand passe le courant, et retomber quand il cesse; mais ils ne tendent pas à s'agréger en lignes continues.

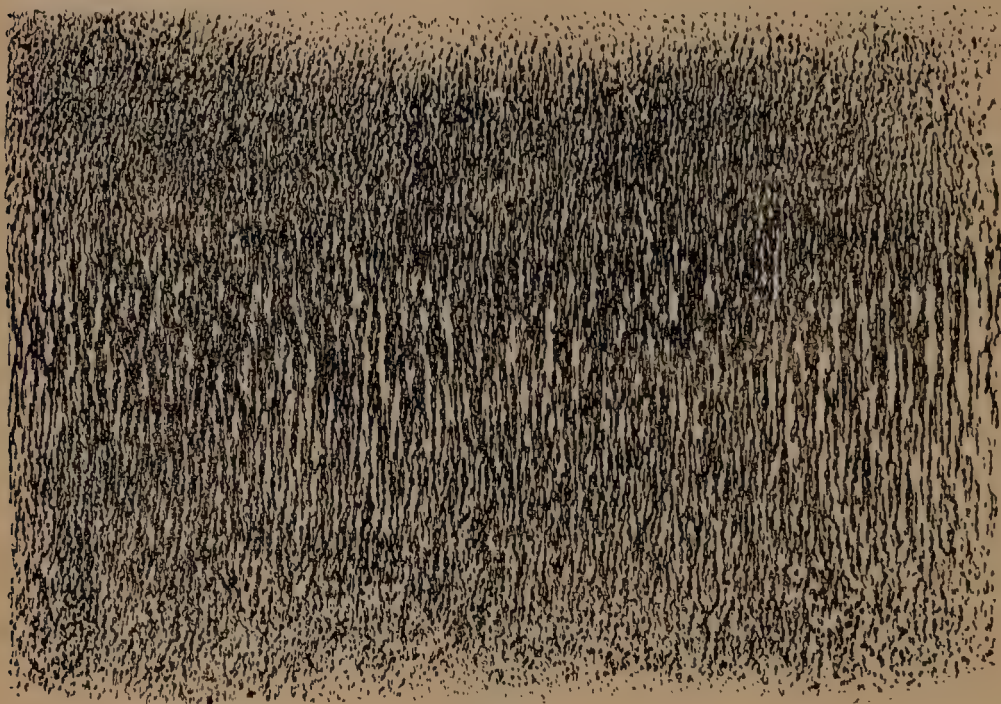


Fig. 86.

Pour obtenir les lignes de limaille assez longues, il faut donc éloigner la plaque du courant, la placer en P_2 par exemple (fig. 85).

Au surplus, des courants énormes sont nécessaires. La figure 86 a été obtenue avec 500 ampères (25 ampères traversant les 20 spires d'un cadre mince de grande surface dont on utilise un des grands côtés).

Comme exercice, le lecteur cherchera le lieu des points pour lesquels la composante du champ parallèle au plan P est constante.

Il trouvera un faisceau de cercles; la figure 85 en représente deux en traits interrompus.

3°. — Appliquons la loi de Biot et Savart à un courant rectiligne limité AB allant de bas en haut (fig. 87). Cherchons son action au point O . Prenons le plan OAB pour tableau; abaïssons la perpendiculaire OD sur le prolongement de AB , soit $\overline{OD} = r$.

Appelons ρ la distance du point O à l'élément $\overline{DC} = ds$.

D'après la loi de Biot et Savart, la force due à l'élément CD est dirigée normalement au plan du tableau et vers l'avant de ce plan. Pour avoir l'action du courant entier AB, il faut additionner algébriquement les actions de tous les éléments, puisqu'elles sont parallèles.

Menons du point O un arc de cercle CE. On a :

$$\overline{CE} = \rho d\theta = ds \sin \alpha, \quad \rho \cos \theta = r;$$

$$\frac{ds}{\rho^2} \sin \alpha = \frac{1}{r} \cos \theta \cdot d\theta.$$

Soit θ_1 et θ_2 les valeurs de l'angle θ pour les points A et B.

L'action en O est :

$$\Phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta d\theta}{r} = \frac{\Phi}{r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1),$$

en exprimant Φ avec l'unité C. G. S. d'intensité.

Si le courant est donné en ampères, le champ au point O est :

$$H = \frac{I}{10r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1).$$

Pour le courant rectiligne et indéfini :

$$\sin \theta_1 = -1, \quad \sin \theta_2 = 1; \quad H = I : 5r,$$

formule déjà trouvée par la considération du feuillet équivalent.

4°. — TRAVAIL DES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE DÉPLACEMENT D'UN PÔLE AUTOUR DU COURANT RECTILIGNE ET INDÉFINI.

Le pôle décrit une trajectoire gauche quelconque. Le champ étant toujours dans un plan normal au courant, le travail est le même pour la trajectoire ou pour sa projection sur un plan normal au courant : il suffit donc de considérer cette projection (fig. 88).

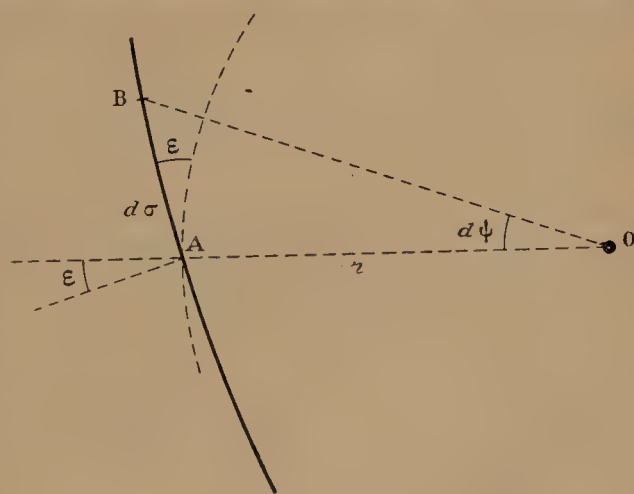


Fig. 88.

Soit $\overline{AB} = d\sigma$ un élément de cette projection ; soit ϵ l'angle que fait sa normale avec le rayon vecteur mené de la trace O du courant sur le plan de projection.

Le travail du champ sur le pôle positif unité est :

$$d\sigma \cos \varepsilon \frac{2I}{r} = 2I d\psi;$$

$d\psi = d\sigma \cos \varepsilon$; r est l'angle sous lequel est vu du point O l'élément de trajectoire projetée.

Si la trajectoire supposée fermée n'entoure pas le courant :

$$\int d\psi = 0,$$

le travail est nul.

Si la trajectoire supposée fermée fait n tours autour du courant, le travail est en C.G.S. : $2I \cdot n \cdot 2\pi = 4\pi I \cdot n$.

Au § 11, nous avons trouvé ce résultat par un procédé très différent.

76. Action d'un courant rectiligne indéfini sur un aimant mobile dans un plan normal au courant.

Nous engageons le lecteur à discuter ce problème avec soin; nous en indiquons la marche. Il est en soi très remarquable et bien propre à fixer les idées. Historiquement, il a servi de test expérimental à la théorie. Certes, on ne procédait pas, il y a soixante-dix ans, avec l'élégance que nous permet la vulgarisation de la notion d'énergie potentielle; mais c'est le propre d'un bon enseignement de reprendre les vieux problèmes en leur donnant un vêtement moderne.

Nous réduirons l'aimant à ses pôles.

1°. — ÉNERGIE POTENTIELLE DE L'AIMANT.

En partant de l'expression générale de l'énergie potentielle d'un aimant dans un champ (§ 43), et de l'expression du potentiel autour d'un courant rectiligne et indéfini (§ 67), on démontre aisément (fig. 89) que l'énergie potentielle du système *aimant courant* (disposé comme l'exige le titre de ce paragraphe) est :

$$W = -2I m\omega,$$

si l'observateur, placé au point O (où le courant normal au tableau passe de l'avant à l'arrière) et regardant l'aimant NS (fig. 89), voit le pôle nord à sa droite.

L'énergie potentielle est :

$$W' = 2I m\omega',$$

si l'observateur, placé au point O' (où le courant normal au tableau passe de l'avant à l'arrière) et regardant l'aimant, voit le pôle nord à sa gauche.

m est la masse de chacun des pôles; I est l'intensité du courant en C.G.S.; ω et ω' sont les angles plans sous lesquels on voit l'aimant dans les deux expériences.

De là résulte que les lignes de même énergie potentielle sont des

cercles passant par les pôles, lieux des points desquels on voit un segment invariable sous un angle donné. La figure 90, construite

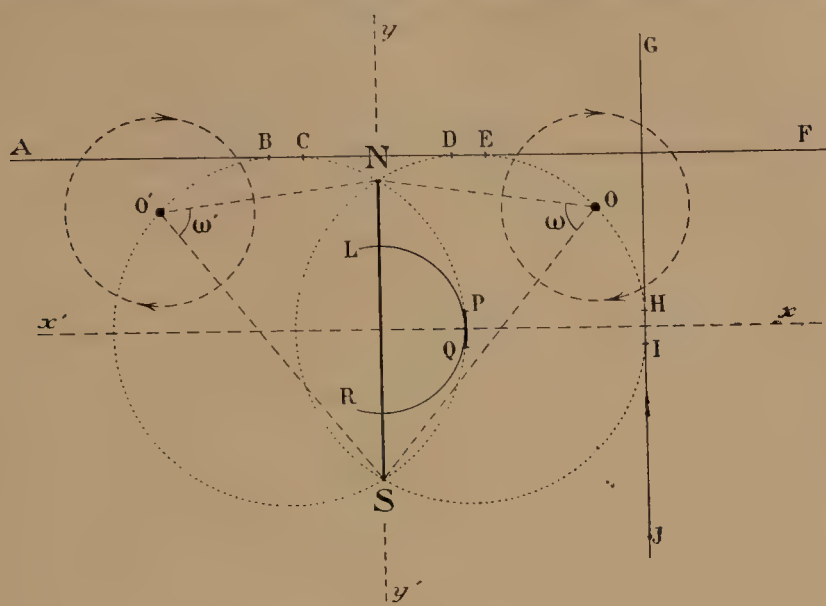


Fig. 89.

dans les hypothèses de la figure 89, montre une série de ces cercles numérotés dans le sens des énergies potentielles croissantes.

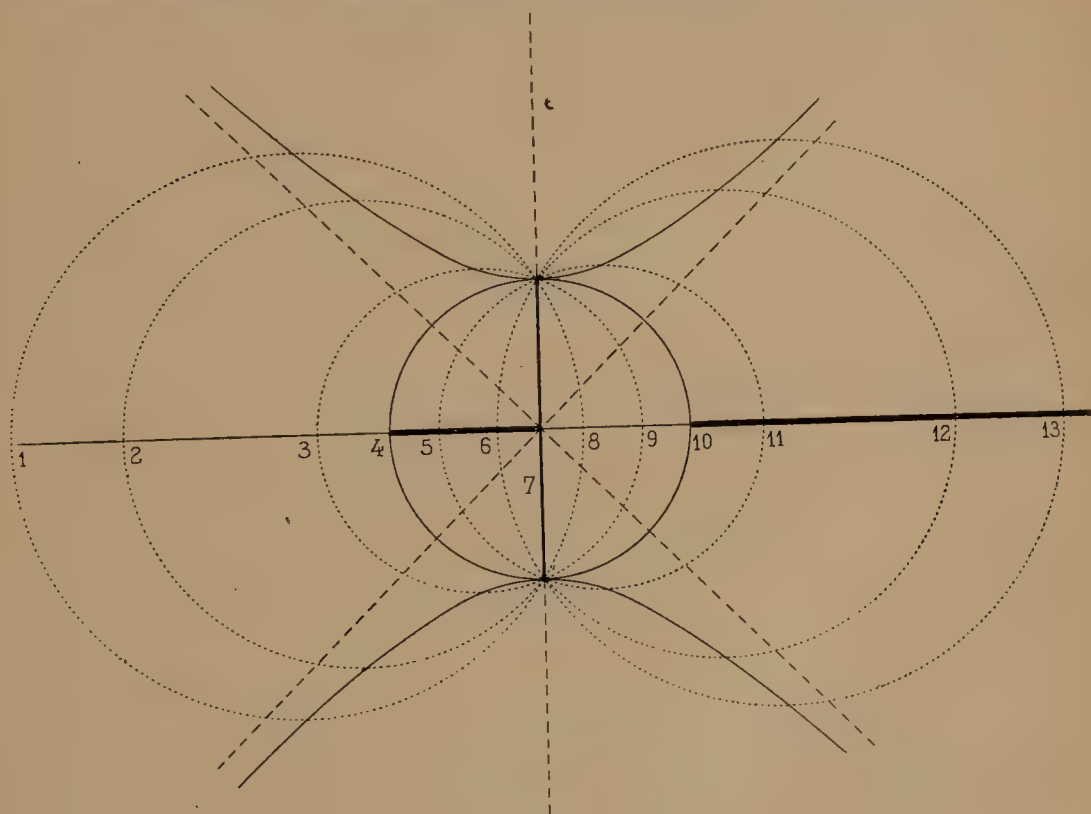


Fig. 90.

La discussion repose sur les principes suivants.

Au lieu d'étudier les déplacements de l'aimant pour le courant immobile, il est plus simple d'étudier les translations du courant pour l'aimant immobile.

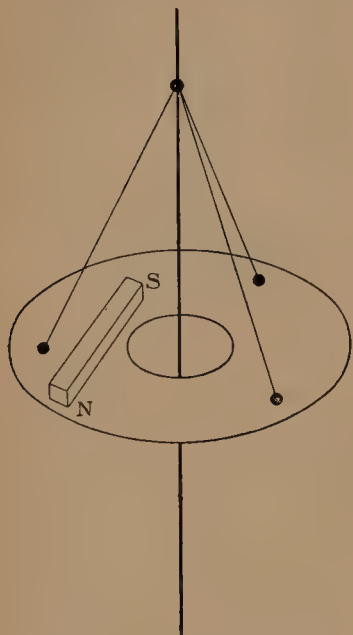


Fig. 91.

L'aimant est placé sur un support horizontal (fig. 91), attaché au fil vertical de manière que sa rotation soit aussi peu gênée que possible. Dans le mouvement de rotation que seules permettent les liaisons, l'angle ω reste constant; donc l'équilibre est indifférent. Autrement dit, le couple est identiquement nul : ce que, du reste, rend évident le raisonnement direct.

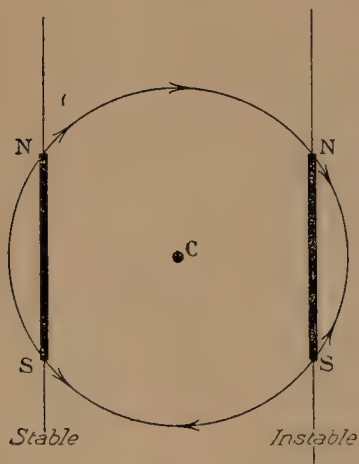


Fig. 92.

Dans la figure 90, la trace du courant occupe un point *quelconque* fixe.

3°. — AIMANT MOBILE DANS SA PROPRE DIRECTION.

Dans le problème inverse équivalent, on impose à la trace du courant des trajectoires rectilignes verticales GJ (fig. 89 et 90).

Suivant GH, l'énergie potentielle décroît; elle croît suivant IJ : donc il existe une position d'équilibre *stable* (le travail est nul suivant l'élément HI) sur la partie droite de l'axe $x'x$. On vérifiera que l'autre moitié de l'axe correspond à l'équilibre *instable* (fig. 92).

4°. — AIMANT MOBILE NORMALEMENT A SA PROPRE DIRECTION.

L'aimant vertical est suspendu à un fil très long par l'une de ses extrémités; il est ainsi rendu mobile parallèlement à lui-même, normalement à sa propre direction.

Le courant rectiligne et indéfini est horizontal (fig. 93).

Dans le problème inverse équivalent, on impose à la trace du courant des trajectoires rectilignes horizontales AF.

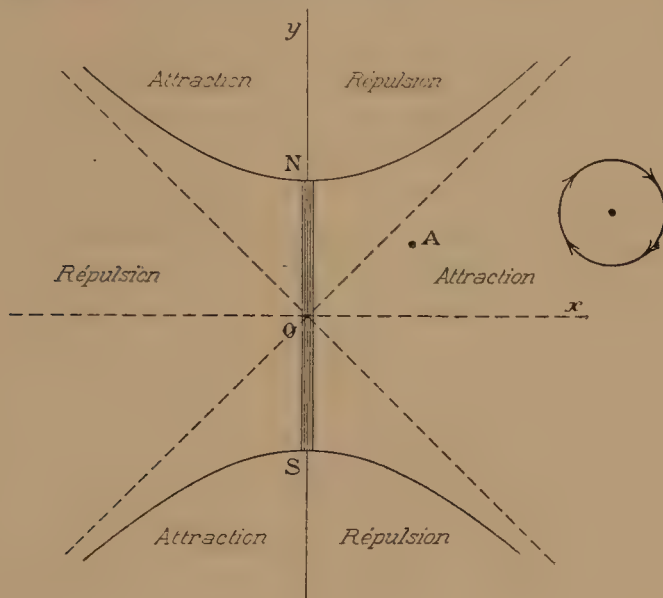


Fig. 93.

La figure 93 montre le résultat de la discussion; le plan est séparé en régions d'attraction et de répulsion par la verticale de l'aimant et par une hyperbole équilatère (lieu des points de tangence des cercles pointillés de la figure 90 avec les droites horizontales).

5°. — AIMANT MOBILE AUTOUR D'UN AXE PARALLÈLE AU COURANT ET PASSANT PAR SON CENTRE DE FIGURE.

Le courant est vertical; l'aimant peut tourner autour d'un pivot vertical, dans un plan horizontal, par conséquent.

Dans le problème inverse équivalent, on impose à la trace du courant des trajectoires circulaires ayant pour centre le centre de l'aimant.

Il existe un cercle entier d'équilibre indifférent, celui qui passe par les pôles de l'aimant: il est tracé en trait plein dans la figure 90. L'axe xx' est d'équilibre: stable dans la portion en gros trait, instable dans la portion en trait fin.

Le cercle susdit et l'axe xx' découpent le plan en quatre régions. Les flèches de la figure 94 montrent dans quel sens l'aimant tend à tourner quand la trace du courant est dans l'une ou l'autre de ces régions. On discutera la stabilité et l'instabilité de l'équilibre en partant de ces rotations.

REMARQUE ESSENTIELLE.

Alors même que le lecteur mettrait huit jours à discuter ce problème et à réaliser les expériences correspondantes, il ne perdrait pas son temps. Au bout de la semaine, il aurait acquis la notion concrète d'énergie potentielle, avec la manière de s'en servir. En posant qu'actuellement un professeur d'enseignement secondaire sur

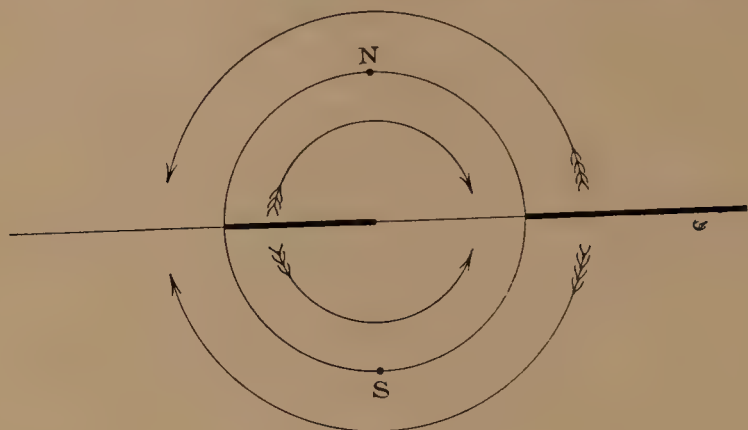


Fig. 94.

cent puisse par ses propres moyens mener à bout cette discussion, je suis ridiculement optimiste. Il est sûr que ceux qui les dirigent en sont parfaitement incapables : j'espère qu'ils mettront un point d'honneur à me contredire... après m'avoir étudié.

Savoir discuter un problème aussi simple et aussi classique, vaudrait mieux que de bafouiller sur les ions gros et petits, sans parler des inventions burlesques dont on encombre la physique.

77. Expérience de Biot et Savart.

Le courant rectiligne n'est indéfini que dans un sens ; le point B étant très éloigné, le champ est en C.G.S. (fig. 87, § 75) :

$$I(1 - \sin \theta_1) : r.$$

Donnons à cette expression une autre forme.

Soit α_1 et ρ_1 les valeurs des variables α et ρ au point A. On a :

$$\rho_1 \cos \theta_1 = r, \quad \alpha_1 + \theta_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$H = \frac{I}{\rho_1} \frac{1 - \sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{I}{\rho_1} \frac{1 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = \frac{I}{\rho_1} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}.$$

D'où la célèbre expérience de Biot et Savart, d'après laquelle Laplace trouva l'expression analytique de la loi.

Un petit barreau aimanté oscille sous l'action d'un courant formé de deux demi-droites indéfinies AB et AB'.

L'angle $\widehat{BAB'} = 2\alpha$; la distance $\overline{OA} = \rho$.

Le champ en O est en raison inverse de ρ et proportionnel à :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

La formule précédente donne pour le courant angulaire $\widehat{BAB'}$ évalué en ampères :

$$H = \frac{0,2 \cdot I}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Biot et Savart croyaient déterminer l'action d'un fil indéfini; en réalité, ils mesuraient l'action d'un *circuit fermé* dont une des parties est très éloignée, ce qui ne modifie en rien le caractère *fermé* du circuit agissant. La remarque s'applique aux expériences des paragraphes précédents.

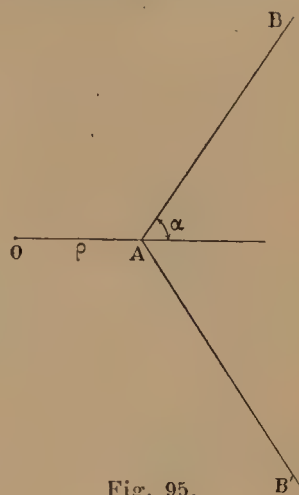


Fig. 95.

78. Expression générale du travail dans le déplacement autour d'un courant de forme quelconque.

1°. — Menons une surface quelconque par le contour fermé traversé par le courant : cette surface sera, *si l'on veut*, la surface du feuillet équivalent.

Si la trajectoire fermée traverse n_1 fois le feuillet dans le sens de l'intensité d'aimantation du feuillet fictif équivalent et n_2 fois dans le sens inverse, le travail accompli par les forces électromagnétiques est :

$$4\pi(n_1 - n_2)\Phi.$$

Il suffit de démontrer le théorème pour un tour.

Soit F le feuillet. Évaluons le travail de la *force magnétique* le long d'une trajectoire fermée ACDBA, qui comprend nécessairement la traversée BA du feuillet. Il est nul, puisque pour les forces magnétiques qui proviennent du magnétisme libre il y a un potentiel au sens strict du mot.

Mais nous savons que la traversée du feuillet amène une discontinuité de la force; la force accomplit *pendant la traversée* un travail négatif égal à $-4\pi\Phi = -4\pi\delta \cdot e$, où δ est l'intensité

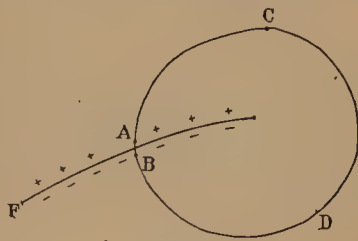


Fig. 96.

d'aimantation et e l'épaisseur du feuillet. Le long de la trajectoire ACDB, le travail est positif et égal à $4\pi\Phi$, puisqu'en ajoutant le travail $-4\pi\Phi$ dû à la traversée, on doit avoir une somme nulle.

D'ailleurs, on montre aisément (§ 66) que le travail effectué par les forces magnétiques le long de la courbe ACDB est égal à $4\pi\Phi$

En A l'angle solide sous lequel on voit le feuillet est $+2\pi$; en B, il est -2π ; la diminution est 4π , le travail est donc $4\pi\Phi$.

Or le vecteur induction est continu; donc les travaux pour la trajectoire ouverte ACDB et la trajectoire fermée ACDBA diffèrent infiniment peu. Comme *hors du feuillet* l'induction et la force magnétique sont identiques, le travail de l'induction pour la trajectoire fermée ACDBA est égal à : $4\pi\Phi = \frac{4\pi I}{10}$. C. Q. F. D.

2°. — Il est impossible par un arrangement de matière magnétique de réaliser *en tous les points* le champ d'un courant : le potentiel du système magnétique n'a qu'une valeur en chaque point; le potentiel du système électrique en a une infinité qui diffèrent les unes des autres d'un nombre entier de fois $4\pi I$.

Au contraire, il est toujours possible (§ 71) de disposer des circuits électriques infiniment petits de manière à former un système équivalent à un système magnétique donné, *pourvu qu'on reste en dehors des molécules magnétiques ainsi constituées*. C'est l'hypothèse fondamentale d'Ampère, sur laquelle nous reviendrons dans la troisième partie de ce Cours.

79. Expression analytique du théorème précédent.

Considérons une trajectoire fermée que parcourt un pôle magnétique unité positif, soumis à un champ dont les composantes sont X, Y, Z. Faisons passer par cette trajectoire une surface et considérons le flux, à travers la portion de la surface limitée par la trajectoire, d'un vecteur dont les composantes sont : u, v, w . Appelons l, m, n , les cosinus directeurs de la normale en tout point de la surface.

Écrivons que le travail du pôle pour un parcours complet de la trajectoire est égal à 4π fois le flux du vecteur :

$$4\pi \iint (ul + vm + wn) dS = \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Le théorème de Stokes (§ 20) nous apprend qu'il existe entre les composantes des vecteurs u, v, w , et X, Y, Z, les relations :

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Nous pouvons les énoncer sous la forme :

$$4\pi(u, v, w) = \text{curl}(X, Y, Z).$$

Ces équations entraînent la conservation du flux du vecteur u, v, w ; car on a évidemment :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Pour retrouver la règle du paragraphe précédent, il suffit de supposer que le courant, au lieu d'être disséminé dans l'espace d'une manière continue, est localisé dans un circuit. Les composantes u, v, w , représentent *les intensités par unité de surface*; ce sont les vitesses d'écoulement du fluide incompressible auquel l'équation (2) permet d'assimiler l'agent qui se déplace. Ce que nous avons appelé *intensité* dans les paragraphes précédents, est le flux du vecteur u, v, w , à travers la section droite du conducteur.

X, Y, Z , sont les composantes de la *force magnétique*.

Nous ne supposons rien sur la nature du milieu, qui est le vide ou un corps aimanté. En effet, pour un circuit fermé, le travail des forces dues à des aimants est toujours nul, puisqu'il dépend d'un potentiel qui n'a qu'une seule détermination en chaque point.

Le travail d'un pôle d'aimant, se déplaçant par exemple autour d'un conducteur *en fer* traversé par un courant, est exactement le même *pour un tour complet* que si le conducteur était en cuivre. La disposition des lignes de force dans le champ peut être modifiée par l'introduction d'un métal magnétique; le travail total ne l'est pas.

CHAPITRE V

ACTION DES CHAMPS SUR LES COURANTS

80. Hypothèse fondamentale.

Un courant placé dans un champ est soumis aux mêmes forces qu'un feuillet de même contour et de puissance numériquement égale à l'intensité. Le champ peut être dû à une cause quelconque (aimants ou courants).

Cherchons l'expression analytique de cette hypothèse.

Nous savons (§ 68) que l'énergie potentielle d'un feuillet est égale au produit de sa puissance par le flux qui pénètre par sa face positive. Si le flux pénètre par la face négative, il intervient négativement dans l'énergie potentielle; il ne faut compter que les flux provenant de causes extérieures au feuillet lui-même.

Soit a la variable qui repère le déplacement actuellement considéré. Soit \mathcal{F} le flux positif; par convention (§ 2), il entre par la face négative du feuillet, il le traverse dans le sens de la normale positive. L'énergie potentielle est donc :

$$W = -\Phi \mathcal{F}.$$

Le travail $d\mathcal{C}$ des forces du système, pour un déplacement quelconque, est égal à la diminution de l'énergie potentielle. D'où ici :

$$d\mathcal{C} = -dW = \Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} da.$$

Par définition, la force suivant la variable a est telle qu'on ait :

$$d\mathcal{C} = F da; \quad \text{d'où : } F = \Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

Le feuillet tend à se déplacer de manière que le flux qui entre par sa face négative croisse.

L'hypothèse fondamentale est que cette règle s'applique aux courants.

Soit I l'intensité en ampères; on a :

$$F = \frac{I}{10} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

Quand a est une longueur, F est une force évaluée en dynes.

Quand a est un angle, F est un couple évalué en ergs.

81. Circuit rigide quelconque dans un champ magnétique.

1°. — En vertu de l'hypothèse fondamentale, un circuit quelconque rigide siège d'un courant est un aimant dont le moment magnétique est de direction et de grandeur parfaitement déterminées. En effet, faisons passer une surface quelconque par le circuit : chaque élément de cette surface peut être remplacé par un aimant infiniment petit, normal à l'élément et de moment proportionnel à son aire. Transportons tous ces moments en un point ; composons-les : nous obtenons un vecteur M de direction et de grandeur bien déterminées. Il résulte des théorèmes précédents que le résultat est le même quelle que soit la surface choisie.

Plaçons le circuit dans un champ uniforme H . Soit φ l'angle que fait le champ avec le vecteur M qui vient d'être défini.

Le circuit est soumis à un couple :

$$C = MH \sin \varphi,$$

dont le moment est normal aux vecteurs M et H .

2°. — Nous pouvons obtenir autrement la proposition précédente.

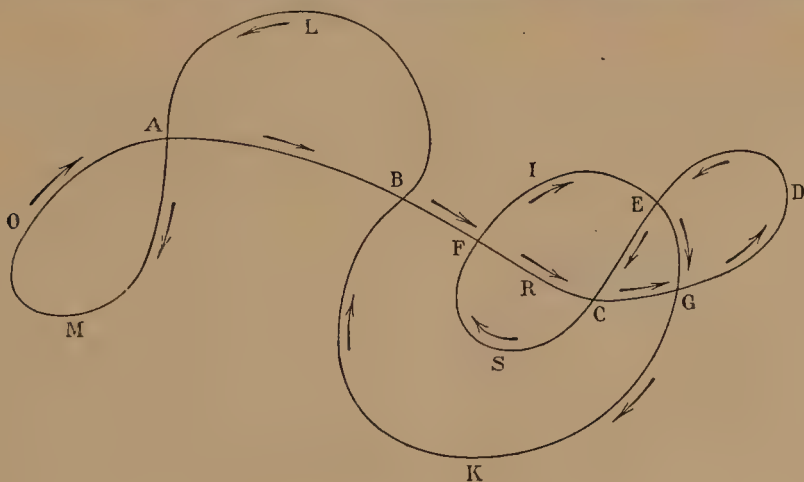


Fig. 97.

Projetons orthogonalement le circuit (qui est un contour fermé quelconque, mais sans dérivation) sur un plan P . La projection limite une portion du plan qu'il s'agit d'évaluer.

Le circuit que nous projetons étant fermé et ayant un sens de circulation, il en est de même de la projection. Montrons que nous pouvons décomposer l'aire projetée en portions qui sont à droite ou à gauche du contour qui les limite, quand on parcourt celui-ci dans le sens de circulation.

Comptons positivement les aires que le promeneur trouve à sa gauche :

Aires positives : CGDE, ABL;

Aires négatives : FRCS, FIEGKB, AMO.

Je laisse au lecteur le soin de voir comment il faut procéder pour obtenir systématiquement le découpage précédent.

Nous appellerons aire projetée σ la somme algébrique de toutes ces aires.

Pour une certaine direction II du plan, σ est maximum et prend la valeur Σ .

On démontre aisément que pour tout plan P dont la normale fait un angle φ avec la normale au plan II, la projection orthogonale du contour limite une aire :

$$\sigma = \Sigma \cos \varphi.$$

Plaçons le circuit dans un champ uniforme. Le flux qui le traverse est :

$$H\sigma = H\Sigma \cos \varphi;$$

σ est l'aire projetée sur un plan normal au champ; φ est l'angle du champ avec la normale au plan II.

$\Phi H \Sigma \cos \varphi$ est donc (au signe près) l'énergie potentielle du feuillet rigide de puissance Φ , dans le champ uniforme d'intensité H . D'où le couple précédemment obtenu, à la condition de poser :

$$M = \Phi \Sigma.$$

Par exemple, le moment d'un feuillet hémisphérique de rayon R est :

$$M = \Phi \cdot \pi R^2,$$

identique au moment du feuillet plan limité au même grand cercle.

3°. — CIRCUITS ASTATIQUES.

Quand l'aire Σ est nulle, on dit que le circuit est *astatique*. Le flux uniforme qui le traverse est identiquement nul.

Par exemple, le moment d'un feuillet sphérique est nul.

Généralement σ est nulle pour une série de plans parallèles à une certaine direction ($\cos \varphi = 0$, $\varphi = \pi : 2$). Le circuit est donc *astatique* si l'aire σ est nulle pour un plan ne faisant pas partie de cette série.

Par exemple, un circuit plan en 8 de chiffre est *astatique*. Il cesse de l'être si le 8 est appliqué sur une sphère, disposition qu'on obtient en fléchissant un cercle construit en fil élastique et homogène.

82. Loi de Laplace.

1°. — La variation du flux, quand le feuillet se déplace, est due aux déplacements des éléments qui forment son pourtour.

Ainsi l'élément $a_1 b_1$ venant en $a_2 b_2$ coupe un certain nombre de lignes de force; d'où une certaine variation de flux.

Posons que le travail qui provient de cette variation est précisément dû à la force qui agit sur l'élément a_1b_1 , quels que soient la forme et le déplacement du reste du circuit.

Cette hypothèse correspond à celle du § 73.

Pour que le travail dû au déplacement b_1b_2 donné soit maximum, c'est-à-dire pour que la variation du flux soit maxima, il faut que b_1b_2 soit normal à l'élément. L'aire du parallélogramme $a_1b_1b_2a_2$ est alors égale à : $ds \cdot \overline{b_1b_2}$, puisqu'il devient un rectangle.

Il faut encore que cette aire soit le plus près possible d'être normale au champ H ; b_1b_2 est donc aussi normal au champ, par conséquent normal au plan qui passe par l'élément de courant et par le champ. La variation du flux est alors :

$$ds \cdot \sin \alpha \cdot H \cdot \overline{b_1b_2}.$$

La force en jeu est égale au travail divisé par le déplacement, soit

$$H\Phi ds \cdot \sin \alpha.$$

La force est donc définie en grandeur et en direction.

Il ne reste plus qu'à connaître son sens.

2^o. — Je dis qu'elle est dirigée vers la gauche du bonhomme d'Amperè, placé sur le courant de manière à être traversé des pieds à la tête et regardant dans le sens des lignes de force.

Supposons le champ dirigé vers l'arrière du tableau; quatre hypothèses sont possibles au sujet du déplacement de l'élément.

Dans les hypothèses I et II, le feuillet présente sa face +.

En I le déplacement augmente le flux total négatif, il amène une diminution du flux : la force s'oppose au déplacement. En II le déplacement de l'élément diminue le flux négatif : la force aide le déplacement.

On voit que la force est dirigée vers la gauche du bonhomme qui, convenablement placé sur le circuit, nous tourne le dos et regarde dans le sens des lignes de force.

Même démonstration pour les cas III et IV.

En définitive, un champ H exerce sur un élément de courant ds , dont l'intensité évaluée en C. G. S. est I , une force :

$$HI \sin \alpha ds,$$

normale au plan du champ et de l'élément; elle est dirigée vers la gauche du bonhomme convenablement placé sur le courant et regardant dans le sens des lignes de force.

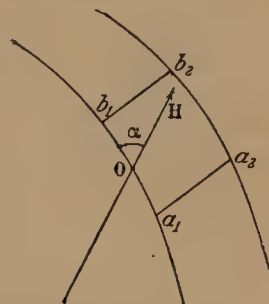


Fig. 98.

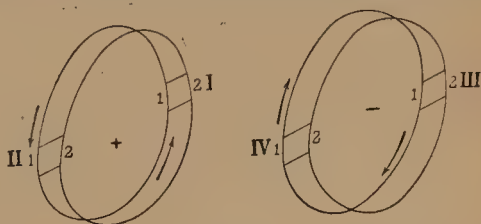


Fig. 99.

Si le courant est évalué en ampères, la force est :

$$0,4 HI \sin \alpha ds.$$

Suivant les cas, nous utiliserons la loi de Laplace ou la loi du § 80. Elles sont strictement équivalentes pour un circuit fermé.

La seconde implique une hypothèse supplémentaire.

83. Réalité de la loi de Laplace.

1°. — En spécifiant qu'il pouvait ne s'agir que d'un outil de calcul, nous avons trouvé (§ 73) pour la force F exercée par un élément de courant C (fig. 100) d'intensité unité, sur le pôle unité P :

$$F = ds \cdot \sin \alpha : r^2; \quad (1)$$

elle est dirigée comme l'indique la figure 100, I (loi de Biot et Savart); C et P sont supposés dans le tableau; F est normale au tableau.

Nous venons de trouver pour la force F' exercée par un champ H sur un élément de courant C d'intensité unité :

$$F' = Hds \cdot \sin \alpha; \quad (2)$$

elle est dirigée comme l'indique la figure 100, II (loi de Laplace).

Si le champ H est produit par un pôle unité situé en P , F' devient :

$$F' = ds \cdot \sin \alpha : r^2, \quad (2')$$

identique à F en grandeur, dirigée en sens inverse, *mais non appliquée au même point*.

Par conséquent, en admettant que la force exercée par un élément

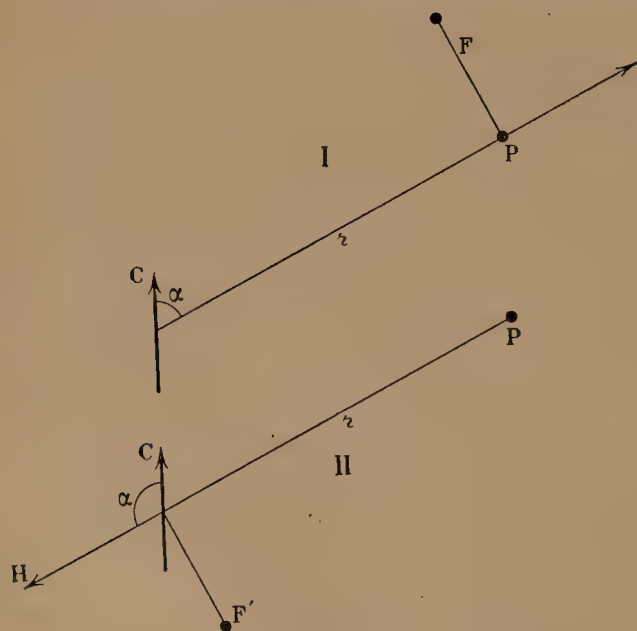


Fig. 100.

de courant sur un pôle est appliquée sur ce pôle, que la force exercée par un pôle sur l'élément de courant est appliquée sur cet élément, le principe de l'égalité et de l'équilibre de l'action et de la réaction n'est pas satisfait. Comme transporter une force parallèlement à elle-même revient à lui ajouter un couple, l'action et la réaction diffèrent précisément d'un couple.

S'il était possible d'isoler ce pôle et cet élément, le système

prendrait un mouvement de rotation en vertu de leurs actions

mutuelles; ce qui est directement contraire aux principes de la mécanique, suivant lesquels l'action mutuelle des parties d'un système *rigide* ne peut jamais lui imprimer de mouvement.

2°. — L'incertitude sur le véritable point d'application des forces provient de ce qu'on ne peut isoler un pareil système; corrélativement la difficulté disparaît.

En effet, considérons le champ créé par un circuit fermé, ou l'action d'un champ sur un tel circuit; il résulte de la manière même dont nous avons obtenu les lois connexes de Biot et Savart et de Laplace, que la résultante de ces couples est nulle, ce qui est nécessaire pour que le principe de l'action et de réaction soit satisfait.

Du reste, Ampère a démontré directement ce théorème.

L'énergie potentielle du système *courant-champ* est parfaitement déterminée; la force suivant une variable quelconque l'est donc aussi sans ambiguïté. Peu nous importe dans ces conditions où est au vrai le point d'application de cette force, puisque nous en pouvons calculer le travail dans tous les cas.

Nous avons dit qu'il est actuellement considéré comme impossible de réaliser un circuit ouvert. La formule (1) n'est donc pas vérifiable.

La formule (2) se présente d'une manière très différente.

Si, en effet, nous ne pouvons ni créer un courant ouvert, ni isoler l'action magnétique d'une portion de courant fermé, nous pouvons isoler *mécaniquement* une portion d'un tel courant au moyen de contacts liquides ou de pivots qui ne gênent en rien le passage du courant. Rien n'empêche donc la mesure de l'action d'un champ *sur un élément* de courant : nous en donnons ci-dessous plusieurs exemples.

Il semble bien que la loi de Laplace représente les phénomènes :

C'est dire que *la force (2) qu'exerce un champ sur un élément de courant doit être considérée comme s'appliquant à cet élément.*

Du reste, il n'y aura jamais contradiction à supposer que la force (1) qu'exerce un élément de courant sur un pôle est appliquée sur ce pôle, puisque dans ce cas le courant fermé interviendra tout entier et que le résultat sera le même quelle que soit l'hypothèse adoptée.

84. Expériences de démonstration.

1°. — L'expérience suivante permet d'appliquer très simplement la loi de Laplace.

A 1 ou 2 mètres au-dessus d'une table, attachons l'une des extrémités d'un câble souple MN (galon métallique); l'autre plonge dans un cristalliseur contenant du mercure.

Établissons un champ *horizontal* avec un aimant en fer à cheval, disposé horizontalement de manière que le galon soit dans son plan de symétrie. Faisons passer un courant de i ampères dans le fil; il est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est horizontale

par raison de symétrie, dirigée dans un sens ou dans l'autre, suivant le sens du courant.

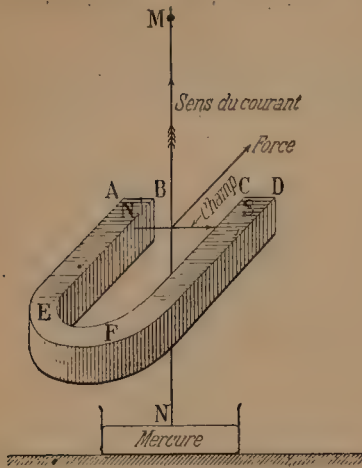


Fig. 101.

Soit H l'intensité de la composante horizontale du champ en un point du fil distant de s d'une origine prise sur le fil.

La force totale a pour expression (en dynes) :

$$F = 0,1 \cdot i \int H ds = 0,1 \cdot i \cdot H_m l.$$

Pour préciser, posons que l'intégrale équivaut à un champ moyen de $H_m = 100$ gauss sur $l = 10$ centimètres; soit $i = 10$ ampères.

On trouve : $F = 1000$ dynes, soit 1 gramme environ.

2°. — Il n'est pas difficile de transformer cette expérience en une bonne manipulation de mesure, donnant le champ entre les branches

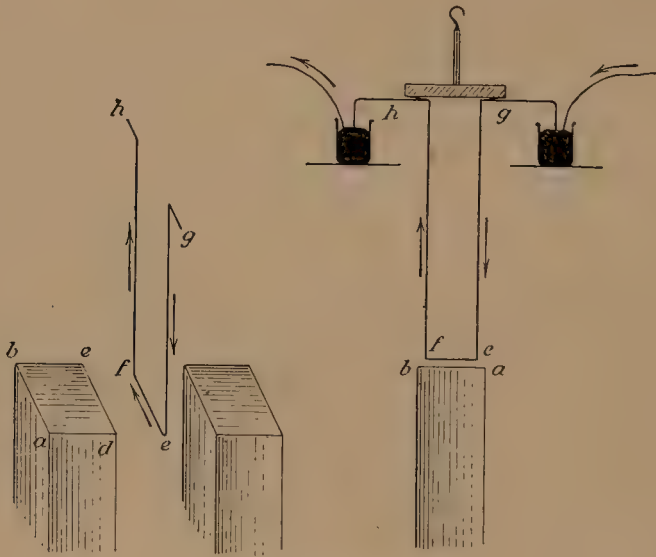


Fig. 102.

d'un aimant en fer à cheval. La figure 102 montre le cadre $gef h$ qui est supporté par une balance et dont les extrémités (formées de deux fils fins de platine) plongent dans des godets à mercure.

On vérifiera que les actions sur les parties verticales du cadre se compensent.

3°. — ROUE DE BARLOW.

Un disque de cuivre (fig. 103) peut tourner autour d'un axe horizontal O . Son pourtour pénètre d'une fraction de millimètre dans le

mercure d'une cuve AB. Le courant (radial) entre par le point C et sort par l'axe de rotation. On place la roue entre les branches d'un aimant en fer à cheval, de manière que les lignes de force soient normales au plan de la roue aux points où elles la traversent.

La roue se met à tourner; la rotation dure tant que passe le courant.

La loi de Laplace donne le sens f de rotation, si les lignes de force vont de l'avant à l'arrière du tableau.

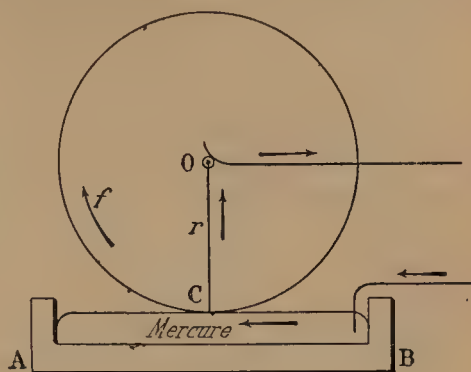


Fig. 103.

Pour que l'expérience réussisse avec de faibles courants, il faut platiniser le pourtour du disque (autrement le mercure fait la queue), ou simplement denteler le pourtour (ce qui diminue beaucoup le frottement).

4°. — GALVANOMÈTRE LIPPMANN.

On doit à M. Lippmann une jolie expérience de cours pompeusement décorée du titre de galvanomètre.

Un manomètre à mercure est étranglé dans sa partie horizontale $abcd$, de sorte que le mercure y forme un prisme de base $\beta = \overline{ad}$, de hauteur $\eta = \overline{ab}$, et d'épaisseur antéro-postérieure ε . Pour cela les parois sont formées de deux lames de verre verticales et parallèles au tableau. Des électrodes A et B permettent de faire circuler dans ce prisme un courant vertical d'intensité i .

On dispose le prisme de mercure dans un champ horizontal, normal à la face $abcd$ et d'intensité H . Supposons qu'il aille de l'avant à l'arrière du tableau. Il crée une force totale (vers la gauche) égale (en C.G.S.) à $Hi\eta$ dynes, force qui, se répartissant sur l'aire $\varepsilon\eta$, est équilibrée par une pression :

$$p = \frac{Hi\eta}{\eta\varepsilon} = \frac{Hi}{\varepsilon}.$$

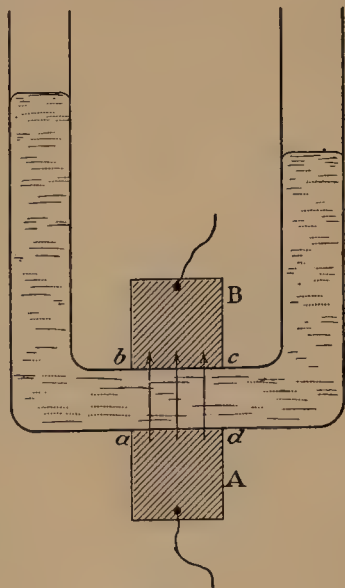


Fig. 104.

Si i est évalué en ampères, H en gauss, ε en millimètres, p est évalué en dynes, c'est-à-dire sensiblement en milligrammes par centimètre carré. Une pression d'un millimètre de mercure vaut environ 1360 milligrammes par centimètre carré.

D'où la formule : p (en mm. de mercure) $= \frac{Hi}{1360 \cdot \epsilon}$.

On s'arrange pour que ϵ vaille quelques dixièmes de millimètre.

85. Balance de Cotton.

L'appareil de M. Cotton permet de mesurer l'intensité absolue d'un champ comme conséquence de la mesure (plus facile) de l'intensité d'un courant. D'après la loi de Laplace, la force électromagnétique qui s'exerce sur un élément de courant est normale à celui-ci.

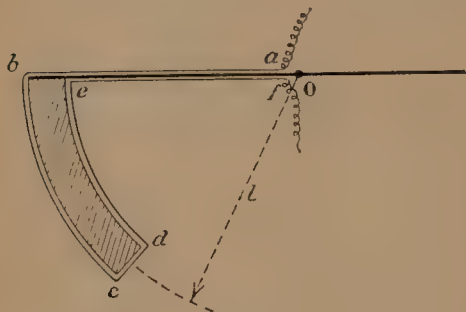


Fig. 105.

Imaginons un circuit astreint à tourner autour d'un axe O.

Tout élément de courant normal à un plan passant par l'axe ne peut fournir de couple par rapport à cet axe, quel que soit le champ dans lequel il se trouve.

Ceci posé, une palette d'ivoire peut tourner autour de l'axe horizontal O. Elle est située dans un plan normal à l'axe; elle est limitée latéralement par deux circonférences bc , de , ayant leur centre sur l'axe. L'une de ses extrémités est un rayon cd ; elle est entourée d'un conducteur $abcdef$, dont les portions ba , ef (très rapprochées l'une de l'autre) rejoignent l'axe le long du fléau de la balance que constitue l'appareil.

Un courant d'intensité connue peut être envoyé dans ce conducteur par des fils souples voisins de l'axe, qui gênent très peu les petits mouvements autour de cet axe (Voir § 165).

La palette est placée dans un champ que nous supposons concentré au voisinage de l'extrémité cd . On oriente l'appareil de manière à amener la palette normalement au champ qui agit sur cd . Quand un courant passe dans le conducteur, seule la force électromagnétique qui agit sur cd fournit un couple autour de l'axe O. Les conducteurs ed , bc satisfont à la condition ci-dessus énoncée; outre que les conducteurs très rapprochés ab , ef , sont parcourus par des courants égaux et de signes contraires, l'intensité du champ décroît vite par hypothèse hors du volume voisin de cd .

Posons $\overline{cd} = \lambda$; soit l la distance du milieu de cd à l'axe de rotation.

La mesure du couple : $C = l\lambda Hi$, détermine H quand i est connu en valeur absolue.

86. Expression analytique de la loi de Laplace.

Nous n'avons qu'à appliquer les formules du § 3.

Les composantes de l'élément sont dx, dy, dz ; les composantes de la force magnétique sont X, Y, Z ; les composantes de la force électromagnétique sont en C.G.S. :

$$I(Zdy - Ydz), \quad I(Xdz - Zdx), \quad I(Ydx - Xdy).$$

CAS PARTICULIER.

Le champ est créé par un pôle unique unité situé à la distance r de l'élément; ses cosinus directeurs, là où se trouve l'élément, sont λ, μ, ν .

La force électromagnétique a pour composantes :

$$\frac{I}{r^2} (\nu dy - \mu dz), \quad \frac{I}{r^2} (\lambda dz - \nu dx), \quad \frac{I}{r^2} (\mu dx - \lambda dy).$$

Ce sont les expressions du § 74; l'action d'un élément sur un pôle est par conséquent égale et de sens contraire à l'action du pôle sur l'élément. Le sens est bien contraire; car, au § 74, λ, μ, ν , se rapportent à la direction *élément-pôle*; ils se rapportent ici à la direction *pôle-élément*.

Nous retrouvons la difficulté déjà signalée : nous admettons, au § 74, que l'action d'un élément de courant sur un pôle est appliquée au pôle; nous admettons ci-dessus que l'action d'un pôle sur un élément de courant est appliquée à l'élément. *Les forces, égales et de sens contraires, ne sont donc pas opposées; l'une ne peut être équilibrée par l'autre que grâce à l'adjonction d'un couple.*

Nous avons déjà fait observer (§ 83), que *seul* le champ d'un circuit fermé intervient dans les expériences. Peu importe dès lors le point d'application *réel* des forces dues à chaque élément, pourvu que la résultante de tous les couples provenant des différents choix pour la position de ces points, soit nulle quand il s'agit d'un circuit fermé.

Récrivons les propositions admises.

1° *On peut calculer les actions des courants sur les aimants et réciproquement par les deux lois dites de Biot et Savart et de Laplace.*

2° *Le point d'application réel de l'action d'un champ sur un élément de courant est sur l'élément lui-même.*

3° *Le point d'application de l'action d'un élément sur un pôle peut être mis sur le pôle, pourvu que le calcul porte sur un circuit fermé, seul cas expérimentalement réalisable.*

Cette dernière proposition ne préjuge en rien la position réelle du point d'application : il est possible que le problème de sa détermination soit un non-sens.

87. Déformation d'un circuit non rigide.

1°. — EXPÉRIENCE D'AMPÈRE.

Quand le circuit est rigide, le flux qu'il s'envoie dans lui-même

n'intervient pas dans le calcul des forces auxquelles il est soumis, parce qu'il demeure invariable pendant le déplacement. Mais supposons que certaines parties du circuit soient mobiles ou déformables. Comme le flux qu'un circuit s'envoie dans lui-même est positif, les actions électromagnétiques tendent à produire les déformations qui augmentent la grandeur du flux.

Une expérience célèbre d'Ampère confirme ces prévisions.

Une boîte d'acajou ABCD est divisée en deux compartiments par une cloison EF : elle est remplie de mercure.

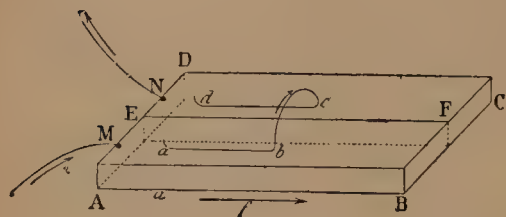


Fig. 106.

Le courant arrive en M, sort en N; il passe d'une cuve à l'autre grâce au petit pont de platine *abcd* (fig. 106).

Si le mercure est bien propre, le pont est repoussé dans le sens de la flèche *f* : l'aire du circuit croît.

Peu importe le sens dans lequel sont disposés les fils *ab*, *cd* : le phénomène reste le même, si on fait tourner le pont de 180° autour d'un axe vertical.

2°. — RESSORT A BOUDIN.



Fig. 107.

Un ressort assez long et à spires rapprochées est constitué par du fil de laiton. Son extrémité inférieure libre plonge de quelques millimètres dans un godet à mercure. Quand on envoie un courant (fig. 107), le ressort se raccourcit. L'extrémité inférieure sort du mercure, le courant est coupé : le ressort s'allonge ; ... et ainsi de suite. D'où un mouvement périodique indéfini. Pour expliquer le phénomène, on invoquera la tendance de toutes les spires, moins une, à envoyer dans cette dernière le flux le plus grand possible. Ou encore on comparera chaque spire à un feuillet plan dont les faces attirent les faces en regard (de noms contraires) des spires voisines.

88. Actions réciproques de deux courants parallèles.

Comme application de la loi de Laplace, calculons l'action d'un

courant rectiligne indéfini AB, d'intensité I, sur un élément fini de courant rectiligne et parallèle A'B', d'intensité I' (fig. 108).

Le sens des courants est indiqué par les flèches.

1°. — Le champ H que produit le courant AB en un point quelconque de la droite A'B', est normal au plan du tableau, dirigé vers

l'arrière et égal à :

$$H = \frac{0,2 \cdot I}{r},$$

en rappelant r la distance $\overline{OO'}$ des deux courants.

Ce champ H produit, d'après la loi de Laplace, une force :

$$\frac{I' ds \sin \alpha \cdot H}{10},$$

normale au plan passant par l'élément et le champ. Or ici :

$$\alpha = \pi : 2.$$

Soit L la longueur $\overline{A'B'}$. La résultante de toutes les actions

est :

$$0,1 \cdot LI' \times \frac{0,2 \cdot I}{r} = 0,02 \frac{LII'}{r}.$$

D'après la règle du bonhomme d'Ampère, cette résultante est une attraction F. Si l'on renverse le sens de l'un des courants, elle devient une répulsion.

Deux courants parallèles s'attirent s'ils sont de même sens; ils se repoussent s'ils sont de sens contraires.

Le courant A'B' se ferme par deux conducteurs B₁B' et A₁A' parallèles entre eux et normaux à AB.

D'après la loi de Laplace, le courant rectiligne indéfini exerce sur B'B₁ des forces situées dans le tableau, qui décroissent en raison inverse de la distance et qui sont dirigées vers le haut.

Il exerce sur A₁A' des forces symétriques des précédentes par rapport à OO'; elles sont dirigées vers le bas.

Quand le circuit n'est pas rigide, ces forces tendent à augmenter sa surface.

Quand le circuit est rigide, elles se font équilibre.

2°. — Le déplacement tend à se faire de manière que le flux qui entre par la face négative soit maximum.

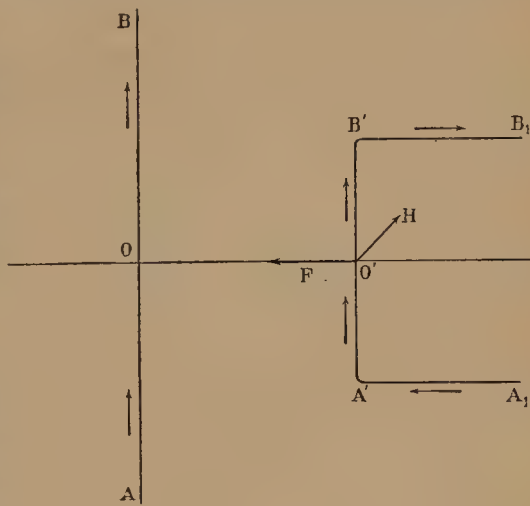


Fig. 108.

Déplaçons le circuit $A_1A'B'B_1$ de manière que $A'B'$ se rapproche de AB de la quantité dr .

L'aire croît du rectangle Ldr ; le flux gagné est :

$$LdrH = \frac{Ldr \cdot 0,2 \cdot I}{r}.$$

Le travail effectué est :

$$\frac{Ldr \cdot 0,2 \cdot I}{r} \cdot 0,1 \cdot I'.$$

La force, quotient du travail par le déplacement, est :

$$0,02 \cdot \frac{LI'I'}{r},$$

qui a bien l'expression ci-dessus trouvée.

89. Nécessité d'introduire le flux d'induction dans l'énoncé des lois fondamentales.

Quand la surface qui s'appuie sur le circuit et à travers laquelle nous calculons le flux ne traverse pas de masses aimantées, il revient au même d'utiliser le flux de force ou le flux d'induction. Mais, dans le cas contraire, l'emploi du flux de force amène des contradictions.

La loi générale a l'énoncé suivant :

Quand un circuit traversé par un courant se déplace dans un champ magnétique d'une position 1 à une position 2, le travail effectué par le champ est égal au produit de la puissance du feuillet équivalent ($0,1 \cdot I$, si l'intensité I est exprimée en ampères) par l'augmentation $\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ du flux d'induction à travers une surface quelconque limitée à ce circuit et entraînée par lui.

La force suivant une variable a quelconque est égale à :

$$\Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = 0,1 \cdot I \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

2°. — L'exemple suivant montre l'importance de ces considérations : nous en verrons tout l'intérêt à propos des phénomènes d'induction.

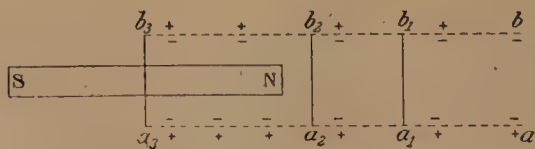


Fig. 109.

Soit à calculer l'action sur une bobine (que nous pouvons réduire à une spire unique) d'un aimant SN symétrique par rapport à son

plan équatorial; les axes de l'aimant et de la bobine coïncident. La bobine tourne vers la gauche sa face négative (pôle sud de l'aimant équivalent). Elle est d'abord placée très loin à droite : elle est attirée par l'aimant. On déduit la grandeur de cette attraction de l'assimilation de la bobine à un aimant, ou de la règle du flux de force.

Pour appliquer cette règle, il faut choisir une surface particulière, limitée par la bobine et entraînée par elle dans son mouvement; nous pouvons prendre un cylindre indéfini vers la droite dont les génératrices sont parallèles à l'axe de l'aimant et qui s'arrête à la bobine. La face négative de ce cylindre est à l'intérieur; la face positive à l'extérieur. Du seul fait que l'aimant est symétrique par rapport à son plan équatorial, résulte que le flux croît à mesure que la bobine se rapproche de la position équatoriale a_3b_3 , qui, par suite, est une position d'équilibre stable; le flux est alors maximum.

En effet, les lignes de force de l'aimant coupent normalement le plan équatorial de cet aimant.

Tout se calcule alors par le flux de force, puisque la surface d'intégration ne traverse jamais de masses magnétiques.

Mais prenons pour surface d'intégration le plan même de la bobine; pour que les règles aient un sens, nous devons retrouver les mêmes résultats. C'est évidemment impossible si nous utilisons le flux de force; en particulier, pour un aimant très allongé, la bobine dans la position a_3b_3 est traversée par un flux de force quasiment nul, puisque par hypothèse les masses libres sont très éloignées de tous les points de la surface d'intégration.

Considérons au contraire le flux d'induction.

Soient \mathfrak{J} l'intensité d'aimantation sur la surface équatoriale de l'aimant, s l'aire de sa section droite; le flux du vecteur $4\pi\mathfrak{J}$ à travers une spire de la bobine est $4\pi\mathfrak{J}s$. Quant au flux de force, il est dirigé en sens contraire, c'est-à-dire vers la gauche; soit φ sa valeur absolue à travers une spire. Le flux d'induction est : $4\pi\mathfrak{J}s - \varphi$.

Il est précisément égal au flux de force à travers la surface cylindrique b_3baa_3 , d'après la propriété générale du flux d'induction.

90. Flux envoyé par un système d'aimants dans un système de courants qui produisent un champ uniforme.

1°. — Le très curieux théorème qui suit facilite bien des discussions.

Un circuit traversé par un courant i crée par hypothèse un champ uniforme dans un certain espace dans lequel des aimants permanents formant un système rigide tournent autour d'un axe A .

Appelons $H = Gi$, la composante du champ normale à l'axe A .

Appelons M la composante du moment magnétique des aimants normale à l'axe A .

Soit φ l'angle des vecteurs H et M .

THÉOREME : Le flux envoyé par le système des aimants dans le circuit a pour expression :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 - MG \cos \varphi. \quad (1)$$

En effet, le système d'aimants est soumis à un couple :

$$C = MH \cdot \sin \varphi = MG i \cdot \sin \varphi. \quad (2)$$

Or, d'après la loi générale de l'électromagnétisme, le travail $Cd\varphi$

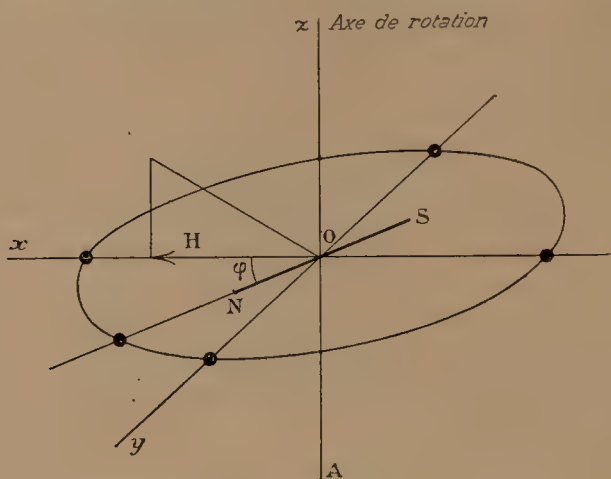


Fig. 110.

de ce couple est égal à l'augmentation $d\mathcal{F}$ du flux de force envoyé dans le circuit, multipliée par l'intensité du courant :

$$id\mathcal{F} = Cd\varphi; \quad (3)$$

équation qui redonne (1) par intégration.

\mathcal{F}_0 est un flux qui ne dépend pas de l'azimut φ du système mobile constitué par les aimants.

2°. — Le théorème s'applique rigoureusement à un solénoïde assez long (§ 139), à une nappe sphérique (§ 145), même à une bobine plate (§ 135), pourvu que l'aimant soit assez court.

Voici le paradoxe. Tout champ peut être considéré comme uniforme dans un petit espace. D'où la conséquence : un petit aimant tournant autour d'un axe passant par lui envoie dans un circuit *quelconque* le flux (au signe près)

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 - MG \cos \varphi.$$

G est l'intensité du champ créé normalement à l'axe de rotation par un ampère passant dans le circuit; M est le moment de l'aimant normalement à l'axe de rotation; φ est l'angle des deux vecteurs.

Le lecteur démontrera directement le théorème en partant de l'expression du potentiel d'une molécule polarisée (§ 40) ou encore en s'appuyant sur le § 82.

91. Champs produits par des circuits semblables.

1°. — De la forme même de la loi de Laplace donnant le champ d'un élément de courant en un point, résulte que *deux circuits semblables produisent, en des points semblablement placés, des champs de même direction et dont les intensités, pour la même intensité du courant, sont en raison inverse du rapport de similitude.*

Il revient au même de dire qu'en multipliant toutes les dimensions du circuit par le même facteur α , on transforme les surfaces équipotentielles de la force magnétique en surfaces semblables. *Ces surfaces conservent leurs cotes*; les longueurs des lignes orthogonales étant multipliées par α , l'intensité du champ magnétique est divisé par α .

Par exemple, tous les cercles sont semblables; ils produisent donc en des points semblablement placés des champs qui sont en raison inverse des rayons (§ 67).

Le solénoïde ne fait exception à la règle qu'en apparence (§ 139).

Partons d'un certain solénoïde contenant n spires par centimètre de génératrice. Multiplions toutes les dimensions par α ; d'après la règle, le champ (uniforme) à l'intérieur du solénoïde devient α fois plus petit. Mais les spires sont écartées par l'opération; il n'en existe plus que $n : \alpha$ par centimètre de génératrice.

Rétablissons les n spires; le nouveau champ, multiplié par α , redevient égal au champ pour le premier solénoïde.

2°. — Étudions la variation de l'action d'un circuit 1 sur un autre circuit 2 quand on multiplie toutes les dimensions du système par α . En chaque point de 2, la force est divisée par α ; mais la longueur des éléments de 2 est multipliée par α : donc la résultante des forces suivant un déplacement *linéaire* quelconque reste la même.

Le couple autour d'un axe qui fait partie du système transformé est multiplié par α , puisque, les forces restant les mêmes, les bras de levier sont multipliés par α .

92. Flux dans les circuits semblables.

1°. — Soit F le flux envoyé par un circuit fermé 1 dans un circuit fermé 2. Multiplions par α toutes les dimensions du système.

Le champ produit par 1 en tous les points d'une surface limitée au circuit 2 (surface que l'opération transforme en une surface semblable) est divisé par α ; mais l'aire d'intégration du flux est multipliée par α^2 .

Donc le flux est multiplié par α .

Nous démontrerons plus loin (§ 99) que le flux envoyé par 1 dans 2 et le flux envoyé par 2 dans 1 ont même expression :

$$Mi_1i_2;$$

M s'appelle le coefficient d'induction mutuelle. Il résulte de la proposition précédente que M a les dimensions d'une longueur.

2°. — Posons que \mathcal{F} et $\mathcal{F} + d\mathcal{F}$ sont dans le premier état les flux envoyés par le circuit 1 dans le circuit 2 occupant successivement deux positions voisines P et P'.

Multiplions par α toutes les dimensions du système.

Les flux pour les deux positions transformées du circuit 2 sont :

$$\alpha\mathcal{F} \text{ et } \alpha(\mathcal{F} + d\mathcal{F}).$$

Soit dx le déplacement linéaire qui permet de passer de la position P à la position P' dans le premier état.

La force suivant la variable x est proportionnelle à $d\mathcal{F} : dx$.

Dans le second état, le déplacement dx sera devenu αdx .

La force suivant le déplacement sera donc $\alpha d\mathcal{F} : \alpha dx = d\mathcal{F} : dx$.

D'où le théorème fondamental autrement démontré au paragraphe précédent : *La force qui s'exerce entre deux circuits reste la même quand toutes les dimensions sont multipliées par le même facteur.*

D'où suit que *les couples, par rapport à des axes qui subissent eux-mêmes la transformation, sont entre eux comme les dimensions homologues des systèmes semblables.*

Les résultats du § 88 illustrent la première de ces propositions. Pour obtenir deux systèmes semblables, il faut modifier L et r dans le même rapport : la force ne change pas.

Transformons par homothétie un courant rectiligne indéfini et un point quelconque O à la distance 1 du courant, en prenant pour origine de la transformation un point D du courant. Nous obtenons le même courant et un point O' à la distance α : le champ est devenu α fois plus petit.

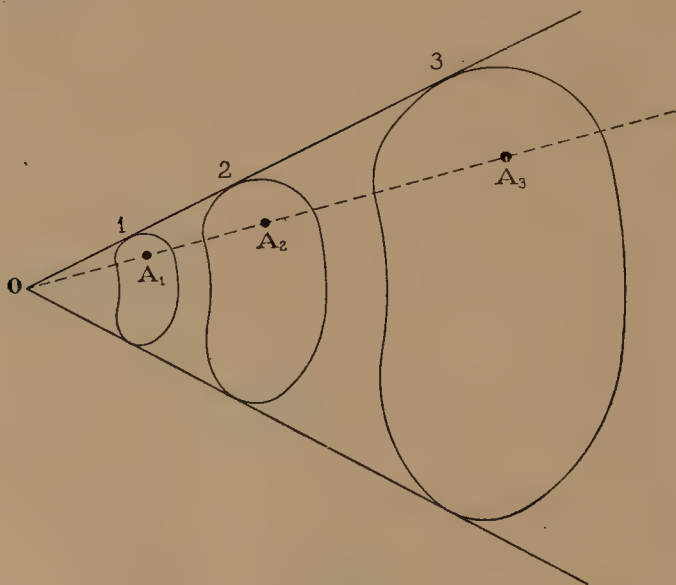


Fig. 111.

Donc le champ d'un courant rectiligne indéfini est en raison inverse de la distance au courant : c'est la loi fondamentale du § 75.

3°. — THÉOREME D'AMPÈRE.

Trois circuits, plans ou gauches, homothétiques, ont leurs dimensions comme 1, α , α^2 (dans la figure 111, $\alpha=2$).

On envoie les mêmes courants dans les circuits 1 et 3, un courant quelconque dans le circuit 2 : l'action résultante subie par 2 dans une direction quelconque est nulle.

Nous pouvons considérer le système comme formé de deux systèmes homothétiques (1, 2) et (2, 3); le rapport d'homothétie est α . Nous savons que l'action exercée par 1 sur 2 est égale et de sens contraire à l'action exercée par 2 sur 1 : c'est la proposition énoncée ci-dessus et démontrée au § 99. La proposition à démontrer résulte immédiatement de là et du fait que les forces exercées suivant une direction quelconque entre les parties correspondantes de deux systèmes semblables sont indépendantes des dimensions.

Les propositions précédentes, en particulier le théorème d'Ampère, n'impliquent pas l'exactitude des lois d'où nous partons. Il suffit que le champ produit par un élément de courant contienne $ds : r^2$, que la force exercée sur un élément de courant par un autre élément contienne $ds ds : r^2$, comme facteur d'une fonction *quelconque* des directions.

93. Actions réciproques de deux éléments de courants. Formules diverses.

Les lois réciproques de Biot et Savart et de Laplace permettent

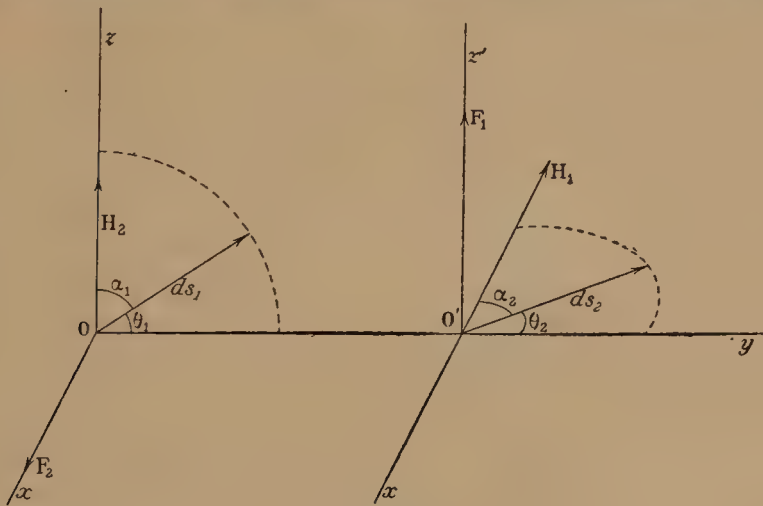


Fig. 112.

de calculer l'action d'un élément de courant ds_1 sur un autre élément de courant ds_2 . Elles conduisent à des conséquences bizarres.

Montrons sur un cas particulier que la force exercée par ds_1 sur ds_2 n'est ni égale, ni opposée à la force exercée par ds_2 sur ds_1 .

Soit O et O' (fig. 112) deux points des éléments ds_1 et ds_2 ; faisons

passer des plans par OO' et par les éléments. Pour faciliter la représentation, posons que ces plans, qui font généralement l'angle ψ , sont normaux entre eux.

Choisissant convenablement les axes de coordonnées, nous pouvons situer ds_1 dans le plan yOz , ds_2 dans le plan yOx .

H_1 est le champ créé au point O' par ds_1 ; F_1 est la force électromagnétique qui en résulte sur ds_2 . On a :

$$H_1 = i_1 ds_1 \frac{\sin \theta_1}{r^2}, \quad F_1 = i_2 ds_2 H_1 \sin \alpha_2 = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{r^2}.$$

H_2 est le champ créé au point O par ds_2 ; F_2 est la force électromagnétique qui en résulte sur ds_1 . On a :

$$H_2 = i_2 ds_2 \frac{\sin \theta_2}{r^2}, \quad F_2 = i_1 ds_1 H_2 \sin \alpha_1 = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1}{r^2}.$$

F_1 et F_2 sont rectangulaires et n'ont pas la même valeur.

ds_1 peut agir sur ds_2 ($F_1 > 0$) sans que ds_2 agisse sur ds_1 ($F_2 = 0$); il suffit de faire : $\theta_1 = \pi/2$.

Ces résultats n'ont rien de surprenant si nous nous rappelons que la loi de Biot et Savart est absolument arbitraire. Elle donne le résultat exact pour un courant fermé, mais une infinité de lois élémentaires sont dans le même cas.

94. Formule d'Ampère.

On peut donc se proposer de trouver une loi élémentaire d'action

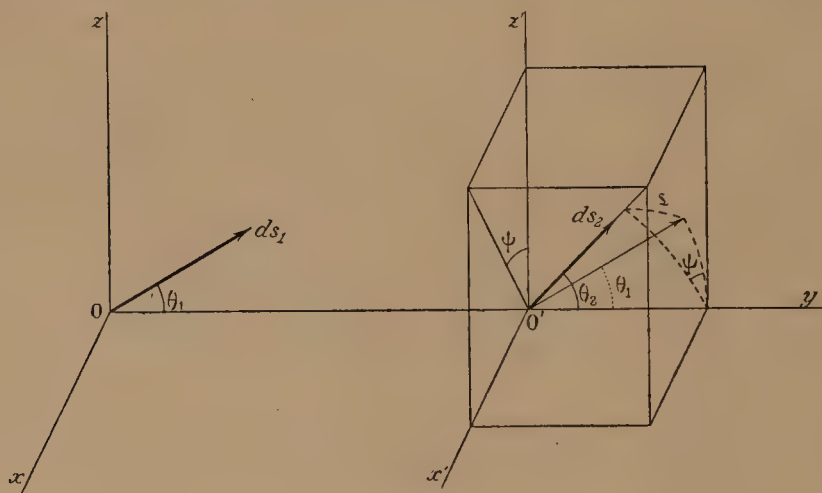


Fig. 113.

entre deux éléments de courants qui satisfasse à une condition imposée d'avance. Par exemple Ampère, l'illustre savant qui le premier aborda l'étude du problème, voulait que les actions réciproques de deux éléments ds_1 , ds_2 , fussent égales, de sens opposés et dirigées suivant la droite qui joint les éléments, de manière que le principe de

l'action et de la réaction fût satisfait pour tout système de deux éléments.

Voici la formule qui résout le problème.

Plaçons ds_1 dans le plan yOz (fig. 113). Par OO' et ds_2 menons un plan; il fait avec yOz l'angle ψ ; ψ est l'angle plan du dièdre formé par les plans passant par OO' et par l'un ou l'autre des éléments. (Le cas particulier traité plus haut correspond à l'hypothèse: $\psi = \pi$; 2.) Soit θ_1 et θ_2 les angles des éléments avec la droite OO' .

La formule d'Ampère est :

$$d^2F = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \psi - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2}.$$

Elle prend une autre forme en introduisant l'angle ε que font les deux éléments; on a :

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \psi, \\ d^2F &= i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{2 \cos \varepsilon - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2}. \end{aligned}$$

Comme exercice, nous conseillons au lecteur de reprendre le calcul (§ 75) de l'action d'un courant rectiligne indéfini sur une portion de courant rectiligne, en appliquant la formule d'Ampère.

La formule d'Ampère ne présente plus qu'un intérêt historique. C'est perdre son temps que de discuter les hypothèses sur lesquelles Ampère s'appuie pour l'établir, ou les conséquences qu'elle indique pour les actions de deux éléments dans des positions particulières. Si un sentiment bien naturel amène à prononcer le nom d'Ampère, il est plus à propos de rappeler qu'il a démontré le premier l'identité d'un petit circuit fermé traversé par un courant et d'un petit aimant normal à la surface limitée par le courant, identité d'où découle immédiatement la notion de feuillet.

Ce n'est donc pas faire tort à sa mémoire que de partir de cette notion dont il est l'inventeur.

Potentiel vecteur ¹.

95. Potentiel vecteur.

Le vecteur induction \mathfrak{B} (de composantes a , b , c) est la résultante du vecteur force F (de composantes X , Y , Z) et du vecteur $4\pi\mathfrak{A}$, intensité de polarisation multiplié par 4π (de composantes $4\pi A$, $4\pi B$, $4\pi C$).

Le flux du vecteur induction est conservatif :

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

¹ Dans une première lecture, le lecteur passera la fin du chapitre.

Par conséquent, à travers une surface S limitée par une courbe fermée C , le flux dépend de cette courbe et non de la forme de la surface qu'elle limite. On peut donc déterminer le flux d'induction à travers la courbe fermée C par un procédé qui ne met en jeu que la courbe et qui n'implique pas la construction d'une surface passant par la courbe.

C'est ce que nous apprend à faire le théorème de Stokes (§ 20).

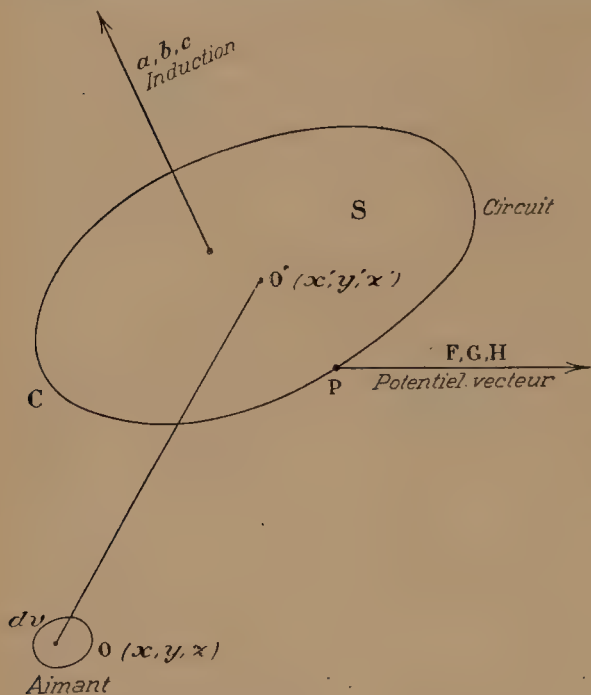


Fig. 114.

Le vecteur F, G, H , appelé *potentiel vecteur* (on verra plus loin pourquoi), et défini par les équations :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

est tel que sa circulation le long d'un contour fermé C égale le flux du vecteur a, b, c , à travers une surface S quelconque limitée à ce contour (fig. 114).

Nous pouvons écrire :

$$(a, b, c) = \text{curl}(F, G, H).$$

Partout où l'intensité de polarisation est nulle, les vecteurs force et induction se confondent. Enfin il peut arriver que le vecteur \mathfrak{J} soit proportionnel à la force. Nous avons alors :

$$a = \mu X, \quad b = \mu Y, \quad c = \mu Z.$$

Le flux du vecteur force est conservatif et le potentiel vecteur est défini, au coefficient μ près, par les mêmes équations (1) en fonction des composantes de la force.

96. Potentiel vecteur en fonction de l'intensité d'aimantation de l'aimant producteur du champ.

Cherchons l'expression du potentiel vecteur quand le champ est dû à un aimant dont on donne en tous les points les composantes A, B, C , de l'aimantation.

1°. — Posons $1/r = p$. Désignons par r la distance du point $O(x, y, z)$ de l'aimant, au point $O'(x', y', z')$ extérieur à l'aimant où nous voulons calculer l'induction (a, b, c) ; elle est identique à la force, puisque en O' l'aimantation est nulle.

Soit A , B , C , les composantes de l'aimantation dans l'élément de volume dv , dont le centre est en O . Le potentiel δV créé au point O' par l'élément de volume dv est (§ 41) :

$$\delta V = \left(A \frac{\partial p}{\partial x} + B \frac{\partial p}{\partial y} + C \frac{\partial p}{\partial z} \right) dv.$$

Évaluons la composante dc de l'induction (de la force par conséquent) due au volume dv .

Pour simplifier l'écriture, nous le représenterons par $dc : dv$.

On a, d'après l'expression générale de la force en fonction du potentiel :

$$dc : dv = - \frac{\partial \cdot \delta V}{\partial z'} = - \frac{\partial \cdot \delta V}{\partial z} = A \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + B \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + C \frac{\partial^2 p}{\partial z^2},$$

$$dc : dv = \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial p}{\partial z} - C \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial p}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

en vertu de l'identité :

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Pour démontrer sans calcul cette dernière identité, il suffit de remarquer que p est le potentiel en O' de la masse unité placée en O et agissant en raison inverse du carré de la distance.

Bien que A , B , C , soient des fonctions de x , y , z , la dérivation par rapport à z ne porte pas sur ces quantités, parce qu'en réalité (§ 40) nous dérivons par rapport à z' et nous changeons de signe.

On a en effet :

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{x' - x}{r} = - \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Or A , B , C , ne sont pas fonction de x' , y' , z' .

Nous pouvons écrire c sous une forme équivalente, du fait que les dérivées de p par rapport à x , y , z , et par rapport à x' , y' , z' , sont égales et de signes contraires :

$$dc : dv = - \frac{\partial}{\partial y'} \left(B \frac{\partial p}{\partial z} - C \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \left(C \frac{\partial p}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

On a des expressions analogues pour a et b .

2°. — Il s'agit de trouver le flux du vecteur a , b , c , à travers un parcours dont les points ont pour coordonnées générales x' , y' , z' .

D'après le théorème de Stokes, on peut remplacer ce flux par la circulation du vecteur F , G , H , défini par la relation :

$$c = \frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial y'},$$

et deux relations analogues. Comparant cette expression à celle que

nous venons de trouver, nous voyons que les composantes F , G , H , sont données par les intégrales suivantes, étendues aux volumes occupés par l'aimant :

$$F = \iiint \left(B \frac{\partial p}{\partial z} - C \frac{\partial p}{\partial y} \right) dv,$$

$$G = \iiint \left(C \frac{\partial p}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial z} \right) dv,$$

$$H = \iiint \left(A \frac{\partial p}{\partial y} - B \frac{\partial p}{\partial x} \right) dv.$$

Il revient au même de calculer le flux du vecteur a , b , c , à travers un contour, ou de calculer la circulation du vecteur F , G , H , le long de ce contour.

A , B , C , sont les composantes de l'aimantation dans l'élément de volume dv , $p = 1/r$ est l'inverse de la distance de l'élément de volume au point P considéré du circuit. Les intégrations donnent la valeur du vecteur F , G , H , au point P , sous forme d'une fonction des coordonnées x' , y' , z' , qui fixent la position de ce point P .

97. Cas d'un feuillet.

1°. — Soit l , m , n les cosinus directeurs de la normale dirigée dans le sens ordinaire $-+$.

Soit Φ la puissance du feuillet; on a par définition :

$$\int dv = \Phi dS; \quad Adv = l\Phi dS, \quad Bdv = m\Phi dS, \quad Cdv = n\Phi dS.$$

La composante F prend la forme :

$$F = \Phi \iint \left(m \frac{\partial p}{\partial z} - n \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS.$$

F est donc, au facteur Φ près, le flux, à travers le contour du feuillet, d'un vecteur dont les composantes sont :

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \zeta = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

D'après le théorème de Stokes, F est donc, au facteur Φ près, la circulation d'un vecteur de composantes X , Y , Z , définies par les équations :

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y};$$

elles sont satisfaites pour :

$$X = p, \quad Y = Z = 0.$$

La conclusion est symétrique pour les composantes G et H .

En définitive on a :

$$F = \Phi \int \frac{dx}{r}, \quad G = \Phi \int \frac{dy}{r}, \quad H = \Phi \int \frac{dz}{r};$$

les intégrales doivent être étendues à tout le pourtour du feuillet ou du fil traversé par le courant, puisque nous savons que les actions d'un courant sont identiques à celles d'un feuillet de même contour et de puissance convenable.

Ainsi le calcul du potentiel vecteur en un point du circuit à travers lequel nous voulons le flux de force (*circuit induit*), revient à celui du potentiel d'une matière fictive, agissant en raison inverse du carré de la distance et distribuée suivant une loi convenable sur le contour du feuillet qui crée le champ (*circuit inducteur*).

La densité linéaire λ de la matière fictive est proportionnelle à la projection de l'élément du circuit inducteur sur un des axes de coordonnées. D'où le nom de *potentiel vecteur*.

2°. — GÉNÉRALISATION.

Le courant, au lieu de passer dans un fil, est défini en tout point de l'espace par ses composantes u, v, w .

Un courant d'intensité totale Φ passe dans un conducteur dont l'aire de la section droite est dS .

Soit ds la longueur de l'élément dont la projection est dx .

$\Phi dx : ds$ est la quantité qui passe parallèlement à l'axe des x , d'où :

$$\Phi \frac{dx}{ds} = u dS, \quad \Phi dx = u ds dS = u d\omega,$$

$d\omega$ est l'élément de volume.

Si donc le courant est réparti dans tout un espace, il vient :

$$F = \iiint \frac{u d\omega}{r}, \quad G = \iiint \frac{v d\omega}{r}, \quad H = \iiint \frac{w d\omega}{r}.$$

F, G, H , sont les potentiels de trois matières fictives agissant en raison inverse du carré de la distance et dont les densités sont u, v, w .

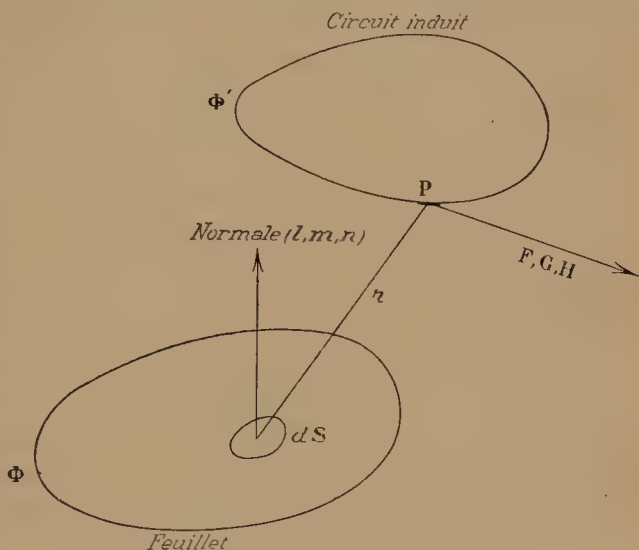


Fig. 115.

98. Flux d'induction à travers un feuillet. Énergie potentielle d'un feuillet.

Soit un feuillet Φ' . Nous désignons par x', y', z' , les coordonnées des points de la courbe qui le limite; ds' est un élément de cette courbe. Par définition, le flux à travers ce feuillet est égal à la circulation du potentiel vecteur :

$$\mathcal{F} = \int \left(F \frac{dx'}{ds'} + G \frac{dy'}{ds'} + H \frac{dz'}{ds'} \right) ds';$$

l'intégrale est étendue au pourtour entier.

Le feuillet tend à se déplacer de manière que \mathcal{F} augmente.

La force suivant une variable a est :

$$\Phi' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

D'après la définition même de l'énergie potentielle W , cette force est égale à :

$$-\frac{\partial W}{\partial a}.$$

D'où l'expression de W :

$$W = -\Phi' \int \left(F \frac{dx'}{ds'} + G \frac{dy'}{ds'} + H \frac{dz'}{ds'} \right) ds'.$$

99. Énergie potentielle d'un feuillet dans le champ d'un autre feuillet; formule de Neumann.

1°. — Dans la formule précédente, substituons les valeurs de F, G, H , calculées au § 97 :

$$W = -\Phi\Phi' \iint \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right) ds ds'.$$

Or la parenthèse est le cosinus de l'angle ε des éléments ds et ds' considérés. D'où la formule de Neumann :

$$W = -\Phi\Phi' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'.$$

Elle est symétrique par rapport aux deux contours : deux feuillets de même puissance s'envoient l'un dans l'autre le même flux.

Le plus petit crée un champ moindre dans un espace plus grand.

Proposition fondamentale qui explique l'existence d'un coefficient d'induction mutuelle (§ 92).

Si le flux envoyé par le feuillet 1 dans le contour du feuillet 2 est $M\Phi$, le flux envoyé par le feuillet 2 dans le contour du feuillet 1 est $M\Phi'$.

La seconde intégrale du second membre est nulle, à la seule condition que l'un des contours d'intégration soit fermé.

Considérons, en effet, un élément ds et le contour fermé dont ds' fait partie; intégrons d'un point A jusqu'au même point A :

$$ds \int \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} ds' = ds \left[\frac{\partial r}{\partial s'} \right]_A^A = 0.$$

La nouvelle expression de l'énergie potentielle est :

$$W = -\Phi\Phi' \iint \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} ds ds'.$$

On trouve encore W sous la forme évidemment équivalente :

$$W = \Phi\Phi' \iint \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} ds ds' = 4\Phi\Phi' \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} ds ds'.$$

100. Énergie potentielle de deux courants en présence.

1^o. — L'expression précédente s'applique à deux circuits *fermés* parcourus par des courants :

$$W = -i_1 i_2 \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 = -i_1 i_2 \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2.$$

On peut écrire plus généralement :

$$W = -i_1 i_2 \iint \left(\frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2} \right) ds_1 ds_2,$$

φ étant une fonction de la distance seule des deux éléments, condition nécessaire et suffisante pour que φ disparaisse dans l'action de deux circuits *fermés*.

L'énergie mutuelle de deux portions *ouvertes* de circuits, d'extrémité A, B, et C, D, peut donc se mettre sous la forme :

$$W = -i_1 i_2 \left[\iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 + \varphi_{AC} + \varphi_{BD} - \varphi_{AD} - \varphi_{BC} \right];$$

φ_{AC} est la valeur que prend la fonction φ relativement aux extrémités A et C; et ainsi des autres symboles. Nous reviendrons là-dessus en traitant de l'induction électromagnétique.

2^o. — Pour légitimer la formule d'Ampère, montrons qu'elle conduit à la même expression de l'énergie *pour des circuits fermés*.

Utilisant les relations démontrées au § 99, on peut écrire (en négligeant le facteur $i_1 i_2$) :

$$d^2 F = \frac{ds_1 ds_2}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} - 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} \right] = -4 \frac{ds_1 ds_2}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2}.$$

Considérons un élément ds_1 du circuit 1 (fig. 117); donnons au circuit 2 un petit déplacement de 2 en 2'; calculons le travail effectué correspondant à ce déplacement.

La force d^2F étant considérée comme positive quand elle est attractive, le travail est en grandeur et en signe :

$$\delta dT = 4ds_1 \int \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_2 = 8ds_1 \int \delta \sqrt{r} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_2.$$

L'intégrale doit être étendue à tout le contour 2; le symbole δ représente la variation de la distance r ou d'une fonction quelconque de r pendant le déplacement.

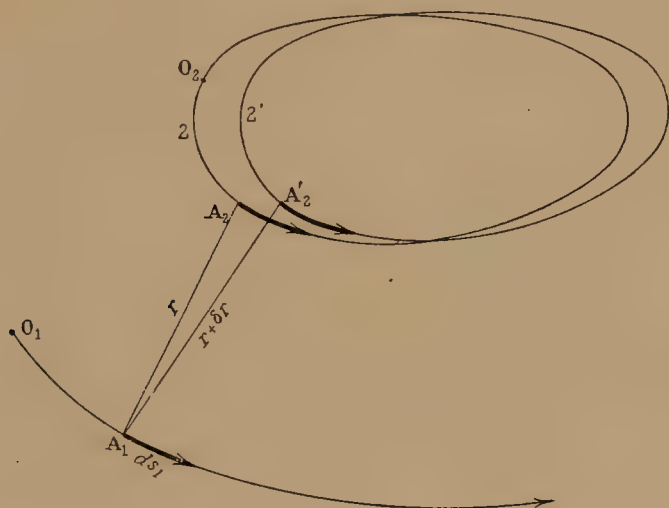


Fig. 117.

La simplicité de l'expression obtenue tient à ce que la force calculée par Ampère est dirigée suivant la droite qui joint les éléments. Son travail est par conséquent le produit de sa valeur par la variation δr de la distance.

Intégrant par parties et remarquant qu'on peut intervertir les signes δ et ∂ , on trouve :

$$\int \delta \sqrt{r} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_2 = \left[\delta \sqrt{r} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \right]_{O_2}^{O_2} - \int \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} ds_2.$$

Le terme entre crochets est nul pour un circuit 2 fermé.

Le travail correspondant au déplacement de 2 en 2' est pour le circuit 1 fermé tout entier :

$$\delta T = -8 \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \cdot \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} ds_1 ds_2.$$

Le mouvement relatif intervenant seul, les deux circuits doivent

entrer de la même manière dans l'expression du travail; on peut écrire :

$$\begin{aligned}\delta T &= -8 \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \cdot \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \cdot ds_1 ds_2 \\ &= -4 \iint \left[\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} + \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \right] ds_1 ds_2, \\ \delta T &= -4 \delta \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} ds_1 ds_2.\end{aligned}$$

Nous retrouvons donc bien l'expression de l'énergie potentielle du § 99, puisqu'on doit avoir :

$$\delta T + \delta W = 0.$$

L'expression de l'énergie potentielle que nous venons d'obtenir n'a de sens que si le milieu indéfini dans lequel les circuits sont plongés est homogène. Elle n'est numériquement exacte que pour le vide et les diélectriques non aimantables. Dans un milieu homogène indéfini *aimantable*, elle doit être multipliée par un facteur constant la *perméabilité μ du milieu*. Ainsi des circuits plongés dans une dissolution de perchlorure de fer agissent l'un sur l'autre avec des forces plus grandes que dans l'air (Voir tome II).

Si le milieu n'est pas homogène, si par exemple on introduit entre les circuits des pièces de fer de formes quelconques, il devient impossible d'exprimer *a priori* l'énergie potentielle par une formule. L'énergie reste bien égale au flux *d'induction* envoyé par un des circuits dans l'autre; mais l'expression de ce flux dépend de la définition complète du milieu.

Nous retrouverons les mêmes questions à propos de l'induction et des écrans magnétiques.

101. Application à des circuits circulaires de même axe.

Appliquons la formule fondamentale :

$$M = \iint \cos \varepsilon \frac{ds ds'}{r},$$

à deux circuits circulaires de même axe, dont A et a sont les rayons et dont la distance est x . Le résultat est d'une importance pratique capitale, puisqu'il permet de calculer l'attraction de deux tels circuits.

1°. — Repérons les points des circuits au moyen des angles Ψ et ψ .

On a : $ds = A d\Psi$, $ds' = a d\psi$; $\varepsilon = \Psi - \psi$;

$$r^2 = x^2 + (A \cos \Psi - a \cos \psi)^2 + (A \sin \Psi - a \sin \psi)^2,$$

$$r^2 = x^2 + A^2 + a^2 - 2Aa \cos \varepsilon = x^2 + (A + a)^2 - 4Aa \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tous les éléments de l'un des circuits sont placés identiquement de la même manière par rapport à l'autre circuit. On a donc :

$$M = \int ds \int \frac{ds' \cos \varepsilon}{r} = 2\pi A \int \frac{ds' \cos \varepsilon}{r}.$$

Posons : $\varepsilon = \pi + 2\varphi$, $ds = 2a \cdot d\varphi$. Il vient :

$$M = 4\pi Aa \int \frac{(2 \sin^2 \varphi - 1) d\varphi}{\sqrt{r_1^2 - 4Aa \sin^2 \varphi}}, \quad [r_1^2 = x^2 + (A + a)^2].$$

Les limites de l'intégrale sont : $-\pi : 2$ et $+\pi : 2$.

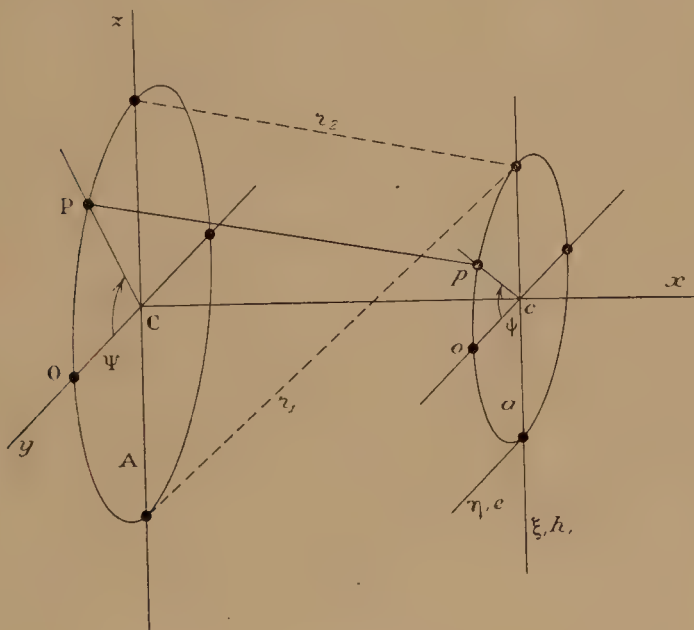


Fig. 118.

Rappelons maintenant les définitions des intégrales elliptiques complètes dont nous donnons des tables abrégées au § 187 de notre *Cours de Mathématiques générales* :

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

Posons : $kr_1 = 2\sqrt{Aa}$. Il vient :

$$M = 4\pi\sqrt{Aa} \left[\left(k - \frac{2}{k}\right) F + \frac{2E}{k} \right],$$

qui donne très simplement W en fonction de quantités dont (depuis Legendre) on possède des tables extrêmement étendues.

2°. — Passons à l'attraction suivant l'axe commun.

On vérifiera d'abord les formules suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k(1-k^2)} [E - (1-k^2)F],$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k}(E-F).$$

On se souviendra que, pour obtenir la dérivée d'une intégrale définie par rapport à un paramètre, on dérive par rapport à ce paramètre la quantité qui multiplie la différentielle (*Mathématiques générales*, § 301).

$$\text{D'où : } \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\pi}{\sqrt{Aa}} \frac{xk}{1-k^2} [(2-k^2)E - (2-2k^2)F].$$

On donne à cette expression une autre forme.

Soit r_1 et r_2 la plus grande et la plus petite valeur de r . On a :

$$r_1^2 = x^2 + (A+a)^2, \quad r_2^2 = x^2 + (A-a)^2.$$

$$\text{Posons : } \cos \alpha = r_2 : r_1, \quad k = \sin \alpha.$$

On trouve :

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\pi}{\sqrt{Aa}} x \sin \alpha \left[2F - \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) E \right];$$

dans ce cas, les intégrales elliptiques sont exprimées au moyen du module $\sin \alpha$.

$$\text{Pour } A=a, \quad \text{tg } \alpha = 2a : x;$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -2\pi \cos \alpha \left[2F - \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) E \right].$$

Maxwell, à qui sont dus ces calculs, a donné des tables étendues de

$$\log (M : 4\pi \sqrt{Aa}),$$

qui est une fonction de k ou de α .

102. Cas de deux bobines.

Les bobines étant constituées par un nombre *fini* de spires, le problème de leurs actions mutuelles est complètement résolu par ce qui précède : il suffit de prendre les spires deux à deux.

On a des formules plus rapides basées sur l'hypothèse qu'on peut substituer aux courants passant dans les fils un courant de densité uniforme passant dans toute la section droite de la gorge *qu'on suppose rectangulaire*.

1°. — INTERPOLATION.

On use d'une formule générale d'interpolation que voici.

Soit N et n le nombre des spires des deux bobines ;

$2E$, $2e$, les épaisseurs des bobines parallèlement à leur axe commun ;

$2H$, $2h$, leurs hauteurs radiales.

Soit $f(A, a, x)$ une fonction quelconque, ici la force qu'exercent l'une sur l'autre les spires qui sont au centre des gorges.

On a pour valeur totale :

$$\begin{aligned} \frac{Nn}{6} [& f(A+H, a, x) + f(A-H, a, x) \\ & + f(A, a+h, x) + f(A, a-h, x) \\ & + f(A, a, x+E) + f(A, a, x-E) \\ & + f(A, a, x+e) + f(A, a, x-e) - 2f(A, a, x)]. \end{aligned}$$

Cette formule suppose que les rapports $H:A$, $h:a$, $E:x$, $e:x$, ne sont pas trop grands.

2°. — REMPLACEMENT PAR UNE SPIRE UNIQUE.

On démontre qu'à la seule condition de ne pas être très près des bobines, on peut substituer à chacune d'elles deux spires dont les dimensions et positions sont les suivantes.

Supposons, comme précédemment, la gorge rectangulaire.

Soit $E > H$.

Les spires équivalentes sont parcourues par la moitié du courant total; elles ont pour rayon :

$$A \left(1 + \frac{H^2}{6A^2} \right);$$

elles sont de part et d'autre du plan médian, à une distance δ telle qu'on ait :

$$3\delta^2 = E^2 - H^2.$$

Elles se confondent si $E = H$.

Soit $H > E$.

Les spires équivalentes, concentriques et dans le plan médian, ont pour rayon :

$$A \left(1 + \frac{E^2}{6A^2} \right) \pm \sqrt{\frac{H^2 - E^2}{3}}.$$

Pour calculer l'action de deux bobines, on est ramené au calcul de l'action de chacune des spires équivalentes à chaque bobine, sur les deux spires équivalentes à l'autre.

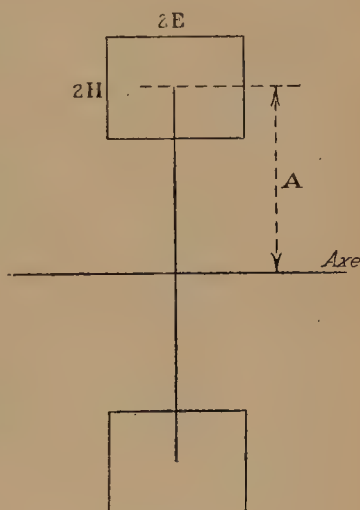


Fig. 119.

CHAPITRE VI

LOI D'OHM

103. Introduction du potentiel électrique. Équation indéfinie.

Jusqu'à présent nous avons considéré le courant électrique comme donné; la seule hypothèse introduite est son assimilation à un véritable courant de matière *incompressible*. Il s'agit de faire un pas de plus; *sans aborder encore le mécanisme de la production des courants*, il s'agit de ramener leur étude à des notions mathématiques simples, dont au surplus nous rejetterons la théorie *physique* dans la troisième partie de ce cours.

Nous poserons qu'à l'intérieur de tout corps conducteur, il est possible de définir une certaine fonction des coordonnées et du temps $V(x, y, z, t)$, que nous appellerons *potentiel électrique*.

Si le phénomène est permanent, le potentiel n'est fonction que des coordonnées.

Les surfaces équipotentiellles sont le lieu des points où le potentiel électrique a la même valeur :

$$V(x, y, z) = V_0.$$

Supposons connu le potentiel en tous les points à l'intérieur d'un conducteur homogène : la loi d'Ohm relie l'intensité du courant aux variations de ce potentiel. Elle s'énonce très simplement : *à un facteur près, la vitesse du courant se déduit du potentiel électrique comme la force magnétique se déduit du potentiel magnétique*.

Nous poserons donc :

$$u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z};$$

u, v, w , sont les composantes de la vitesse de la matière qui est censée constituer le courant (*électricité*); ρ est la résistivité; $1/\rho$ est la conductivité.

Nous ne pouvons recommencer pour la quatrième fois l'étude de ce système d'équations. Nous l'avons rencontré en Hydrodynamique

où V est (à un facteur près) le potentiel des vitesses; en Conductivité thermique où V est la température; en Magnétisme où V est le potentiel magnétique. Nous conseillons au lecteur de relire le chapitre sur la Conductibilité thermique dans le *Cours de Thermodynamique*; c'est évidemment là qu'il comprendra mieux la nature de la question, les notions y étant usuelles et concrètes.

L'intensité du courant est le flux du vecteur u, v, w , à travers la surface considérée.

A travers l'élément dS dont la normale est définie par les cosinus directeurs α, β, γ , passe dans l'unité de temps une quantité d'électricité :

$$di = (u\alpha + v\beta + w\gamma)dS;$$

i s'appelle l'intensité du courant.

Nous admettons que la matière qui est censée constituer le courant, se conduit comme un fluide incompressible; d'où la condition :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \Delta V = 0. \quad (1)$$

Telle est l'équation indéfinie à laquelle doit satisfaire la fonction V à l'intérieur de tous les corps conducteurs homogènes, lorsque l'état permanent est établi.

On appelle *ligne de courant* une ligne dont la tangente est, en chacun de ses points, parallèle à la direction du courant en ce point; la ligne de courant correspond à la ligne de force dans la théorie des forces magnétiques. Le faisceau des lignes de courant est orthogonal au faisceau des lignes équipotentielles.

Un *tube de courant* est constitué par des lignes de courant passant par tous les points d'une courbe (plane ou gauche) fermée.

104. Condition à la surface du conducteur.

1°. — Le corps conducteur peut être limité par un *isolant* : par définition, le courant ne peut y pénétrer. Sa vitesse en un point A , très voisin de la surface de séparation S , est donc parallèle au plan tangent à celle-ci. Cela revient à dire que la normale à la surface équipotentielle V , qui passe par le point A , est dans le plan tangent à S ; ou encore que S et V sont normales entre elles tout le long de leur intersection.

Soit n une variable qui repère la normale à l'intersurface S ; on a en tout point :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

2°. — Le corps conducteur peut être limité par un autre corps conducteur; les milieux 1 et 2 ont les résistivités ρ_1 et ρ_2 .

Il faut écrire que l'électricité ne s'accumule pas sur l'intersurface;

autrement dit, que ce qui arrive de l'un des milieux passe en totalité dans l'autre.

Or, dans une direction quelconque définie par une variable n , la composante de la vitesse est par hypothèse :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Au point A de l'intersurface, menons la normale. Comptons les distances sur cette normale vers le milieu 1, quand il s'agit du milieu 1; vers le milieu 2, quand il s'agit du milieu 2.

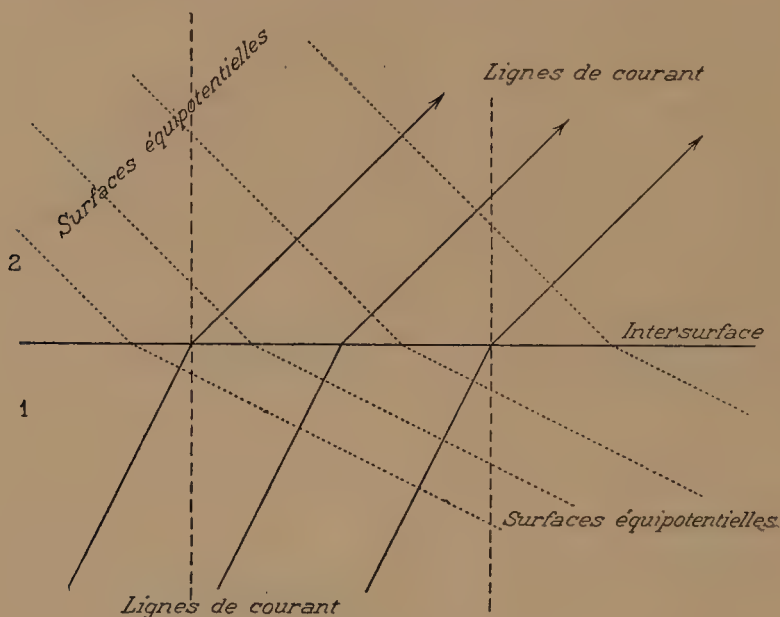


Fig. 120.

Le milieu 2 est plus conducteur que le milieu 1.
Le milieu 1 est plus résistant que le milieu 2.

La condition que l'électricité ne s'accumule pas sur l'intersurface est :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0. \quad (3)$$

Vérifions sur deux milieux identiques. La condition devient :

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0;$$

elle exprime (avec notre convention de signes) que le taux de variation du potentiel le long de la normale est continu. Dans le cas où la résistivité n'est pas la même dans les deux milieux, la continuité pour le courant implique un brusque changement du taux de variation du potentiel suivant la normale à l'intersurface; près de l'intersurface, les surfaces équipotentiellles sont plus serrées dans le milieu de plus forte résistance ou de moindre conductivité (fig. 120).

3°. — Dans un milieu homogène, le potentiel électrique varie d'une manière continue. Sur l'intersurface de deux milieux différents, il subit généralement une discontinuité qu'on appelle *force électromotrice*. Nous poserons :

$$V_2 - V_1 = E_{12}; \quad (4)$$

E_{12} est la brusque élévation du potentiel quand on passe du milieu 1 au milieu 2; c'est par définition la *force électromotrice* dans le sens 12 à travers l'intersurface.

Si les milieux sont homogènes et à la même température, E_{12} est une constante qui ne dépend pas de la forme de l'intersurface.

4°. — Il résulte de ce qui précède que les traces, sur l'intersurface, des surfaces équipotentiellles qui correspondent aux deux milieux, forment un faisceau *unique*. La même courbe de l'intersurface correspond à la surface équipotentielle V_2 dans le milieu 2, à la surface

$$V_1 = V_2 - E_{12},$$

dans le milieu 1.

Nous reviendrons là-dessus au § 118.

105. Conducteurs de faible section (fils).

1°. — CONDUCTEURS CYLINDRIQUES.

Dans un conducteur *cylindrique* et de faible section s , le courant a la direction même du conducteur : les surfaces équipotentiellles sont des sections droites.

Soit l la longueur comptée sur le fil à partir d'une origine quelconque; l'intensité du courant a pour expression :

$$i = -\frac{s}{\rho} \frac{dV}{dl}. \quad (1)$$

L'intensité restant nécessairement constante tout le long du conducteur, $dV : dl$ est constant : la petitesse de la section du conducteur impose la loi de variation du potentiel.

Soit V_1 et V_2 les potentiels en deux points A et B entre lesquels la longueur du fil est l . La section s étant invariable par hypothèse, on a :

$$\frac{dV}{dl} = \frac{V_2 - V_1}{l}, \quad i = \frac{s}{\rho l} (V_2 - V_1) = \frac{V_2 - V_1}{R}, \quad R = \rho \frac{l}{s};$$

$$iR = V_2 - V_1.$$

R est *par définition* la résistance du conducteur entre les points A et B.

Nous supposons le conducteur cylindrique; mais rien dans le raisonnement n'empêche de le courber : la distribution des potentiels est indépendante de la forme qu'on donne au circuit. Le potentiel doit varier linéairement en fonction de la longueur, de manière que

la différence des potentiels entre deux points quelconques soit égale au produit de l'intensité par la résistance entre ces points.

Il n'est pas inutile de rappeler ici la définition géométrique des fils : la surface qui les limite est l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe gauche quelconque (voir *Math. gén.*, § 398).

2°. — GÉNÉRALISATION POUR LES CONDUCTEURS LINÉAIRES.

Le fil est toujours de faible section; mais la section du fil ou la matière qui le constitue, varient d'un point à l'autre.

Pour chaque élément du fil, l'équation (1) subsiste :

$$i \frac{\rho dl}{s} = i dR = -dV, \quad i \int dR = V_2 - V_1.$$

Ainsi d'une manière générale, *en vertu de nos hypothèses*, la différence des potentiels entre deux points d'un circuit *linéaire* est mesurée par le produit de l'intensité du courant et de la résistance totale (*somme des résistances des éléments du fil*). Cette différence ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont disposés ces éléments; le rapport qui existe entre la différence de potentiel et l'intensité, dépend des fils qui relient les points extrêmes du circuit; *mais on peut intervertir ces fils comme on voudra sans rien changer*.

Ils sont séparément caractérisés par le paramètre :

$$\text{résistance} = \int \frac{\rho dl}{s} = R;$$

seule intervient la somme arithmétique de ces paramètres.

106. Dérivations; conducteur équivalent.

L'avantage du potentiel est d'être une *quantité scalaire*, définie en chaque point par un nombre (naturellement unique). L'hypothèse de son existence (due à Ohm) fournit une théorie extrêmement simple.

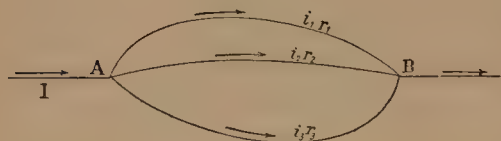


Fig. 121.

Traisons le cas des dériva-
tions.

1°. — DÉRIVATIONS.

Quand deux points A et B d'un conducteur sont réunis par plusieurs conducteurs, on dit qu'il y a *dérivation*.

Cherchons comment le courant I total se distribue entre ces conducteurs *supposés linéaires*.

Écrivons que les produits de l'intensité par la résistance pour les divers conducteurs sont égaux entre eux et à la différence des potentiels extrêmes :

$$A - B = i_1 r_1 = i_2 r_2 = i_3 r_3 = \dots \quad (1)$$

Les intensités sont en raison inverse des résistances correspondantes.

2°. — CONDUCTEUR ÉQUIVALENT A LA DÉRIVATION.

L'incompressibilité de ce qui est censé constituer le courant fournit la relation :

$$I = i_1 + i_2 + \dots = (A - B) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots \right).$$

La résistance du conducteur équivalent est par définition :

$$RI = A - B;$$

c'est la résistance du conducteur unique qui transmet le même courant I pour la même différence de potentiel $A - B$. On peut le substituer à la dérivation sans que rien ne soit modifié.

D'où :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots = \sum \frac{1}{r}. \quad (2)$$

L'inverse de la résistance du conducteur équivalent est égale à la somme des inverses des résistances des branches de la dérivation.

3°. — COURT-CIRCUIT.

La résistance équivalente est toujours plus petite que celle de la branche la moins résistante. Cela résulte de la formule (2) où les r sont tous positifs. *Court-circuiter*, c'est installer entre deux points à des potentiels différents un conducteur de très faible résistance.

Nous verrons l'emploi des courts-circuits dans la construction des boîtes de résistances.

107. Phénomènes dans un circuit unique.

1°. — Avant de passer aux lois générales de répartition des cou-

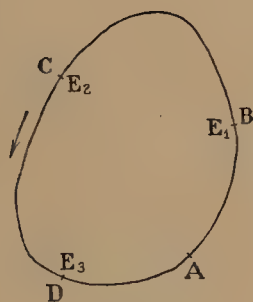


Fig. 122.

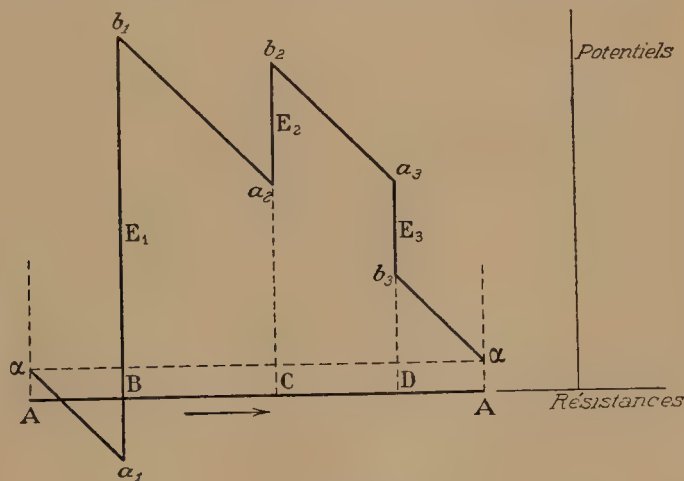


Fig. 123.

rants, fixons les idées du lecteur par l'étude des phénomènes dans

un circuit unique, contenant un nombre quelconque de forces électromotrices, c'est-à-dire de discontinuités pour le potentiel.

Nous représentons en abscisses les résistances, en ordonnées les potentiels (fig. 123).

Puisque l'intensité du courant, constant d'un bout à l'autre du circuit, est le quotient de la diminution du potentiel le long d'un conducteur par la résistance de ce conducteur, *la courbe est formée de morceaux de droites PARALLÈLES.*

De A jusqu'en B, un peu avant la discontinuité qui existe en E_1 , le potentiel décroît suivant αa_1 . Il croît alors brusquement (nous supposons la force électromotrice en E_1 dans le sens du courant), et remonte en b_1 . Il décroît de B en C suivant $b_1 a_2$; il croît alors brusquement suivant $a_2 b_2$ (nous supposons la force électromotrice en E_2 dirigée suivant le sens du courant). Il décroît de C en D suivant $b_2 a_3$; il décroît alors brusquement suivant $a_3 b_3$ (nous supposons la force électromotrice en E_3 dirigée en sens inverse du courant).

Enfin le potentiel revient en A avec sa valeur initiale $A\alpha$.

Soit R la résistance totale figurée par la longueur \overline{AA} ; le courant a pour intensité :

$$i = (E_1 + E_2 - E_3) : R, \quad iR = \sum E. \quad (1)$$

Les E sont comptés positivement lorsque l'observateur, allant dans le sens du courant, voit le potentiel remonter brusquement au

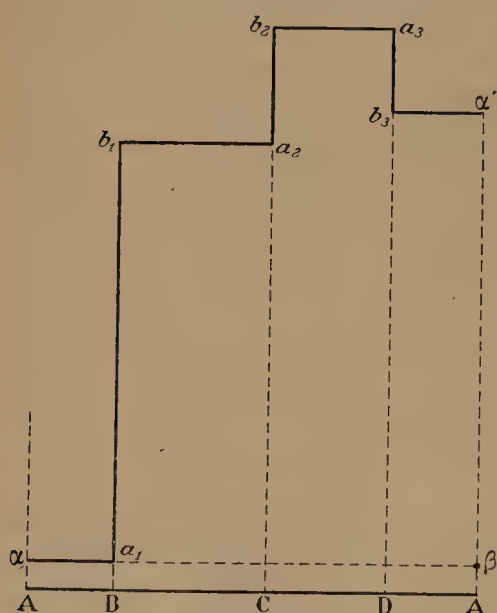


Fig. 124.

passage par la discontinuité; ils sont comptés négativement dans le cas contraire.

La formule (1) donne immédiatement l'inclinaison des droites formant le graphique. Elle prouve aussi que *les valeurs absolues du potentiel n'interviennent pas; seules interviennent les variations brusques, ou forces électromotrices.*

2°. — PILES.

Les forces électromotrices peuvent être produites par des *pile*s. Nous devons nous représenter une pile comme introduisant dans le circuit plusieurs (généralement trois) discontinuités du potentiel, de même

sens ou de sens variés. Ainsi, dans une pile Daniell, existent une discontinuité au passage du zinc à la solution de sulfate de zinc, une discontinuité au passage de l'une des solutions à l'autre, enfin

une discontinuité au passage de la solution de sulfate de cuivre au cuivre. Les circuits ne sont pas linéaires entre les discontinuités; mais nous verrons que tout conducteur peut être remplacé par un conducteur linéaire, équivalent au point de vue de la résistance.

Généralement même le nombre des discontinuités est plus grand; en effet, il faut relier les pôles de la pile par un circuit métallique extérieur : d'où ordinairement deux discontinuités nouvelles au passage des pôles à ce circuit.

3°. — CIRCUIT OUVERT.

Coupons le circuit en A, c'est-à-dire introduisons en A une résistance énorme, *infinie* : le courant est nul; les droites représentatives du potentiel sont horizontales (fig. 124).

La différence des potentiels aux points précédemment réunis en A est :

$$\overline{\beta\alpha'} = \Sigma E.$$

Le potentiel est constant tout le long de la portion du circuit comprise entre deux discontinuités consécutives.

108. Unités; ohm, volt.

Les phénomènes électromagnétiques fournissent l'unité d'intensité C.G.S., et l'unité pratique (*l'ampère*) qui est dix fois moindre. Puisque nous posons la relation :

$$iR = E = V_1 - V_2,$$

entre la résistance et la force électromotrice (différence de potentiel), il suffit de définir l'unité de l'une de ces grandeurs pour que l'unité de l'autre en résulte.

C'est l'unité de force électromotrice qu'on préfère définir *a priori* (§ 191). Pour l'instant, il nous est plus commode de POSER l'unité de résistance, en prévenant qu'elle résulte d'une unité *rationnelle* de force électromotrice.

L'*ohm*, unité *pratique* de résistance, est égal à 10^9 unités C.G.S.

C'est la résistance d'une colonne de mercure à 0°, pesant 149^r,4521, de section constante et de 106^{cm},3 de longueur (*ohm international*).

C'est aussi bien la résistance d'une colonne de mercure d'un millimètre carré de section et de 106^{cm},3 de longueur, à la condition d'admettre 13,596 pour densité du mercure à 0°.

Avant 1893 (Congrès de Chicago), on définissait l'ohm comme la résistance d'une colonne de mercure d'un millimètre carré de section et de 106^{cm},0 (ohm légal de 1884) ou de 106^{cm},3 de longueur. On préfère, depuis 1893, expliciter la masse totale plutôt que la section.

L'unité *pratique* de force électromotrice qui se trouve maintenant définie, est le *volt*; elle vaut 10^8 C.G.S.

109. Quantité d'électricité. Coulomb.

Nous assimilons le courant au transport d'une matière incompressible, que nous appelons *électricité*, sans préjuger sa nature. L'intensité est la *quantité* totale de cette matière qui passe, dans l'unité de temps, à travers une section quelconque du corps considéré (flux conservatif).

Jusqu'à présent nous supposons toujours l'intensité constante. Mais rien n'empêche qu'elle soit variable : i est alors une fonction du temps. Le débit total dans le temps t est :

$$Q = \int_0^t i dt.$$

Nous apprendrons à mesurer Q lorsque le temps t est très court (galvanomètre balistique, § 221). Lorsque le courant est lentement variable, il suffit de tracer la courbe des intensités en fonction du temps et de l'intégrer mécaniquement.

La quantité transportée par un *ampère* en une seconde est appelée *coulomb*; c'est l'unité *pratique* de *quantité d'électricité*; elle vaut un dixième de l'unité C.G.S. électromagnétique.

Nous savons déjà (*Thermodynamique*, seconde partie, § 213) qu'elle a une représentation concrète dans la quantité d'électrolyte décomposée.

Une valence-gramme rompue correspond au passage de 96 600 coulombs, soit un ampère pendant un peu plus d'un jour (le jour vaut 86 400 secondes de temps moyen).

110. Pont de Wheatstone.

1°. — L'expérience consiste à régler les résistances r_1, r_2, r_3, r_4 , de manière qu'il ne passe rien dans le galvanomètre reliant les points B et D.

Écrivons donc que les potentiels en B et D sont égaux :

$$B = D.$$

Appliquons la loi d'Ohm :

$$A - B = A - D = i_1 r_1 = i_3 r_3,$$

$$B - C = D - C = i_2 r_2 = i_4 r_4;$$

$$i_1 = i_2, \quad i_3 = i_4; \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}.$$

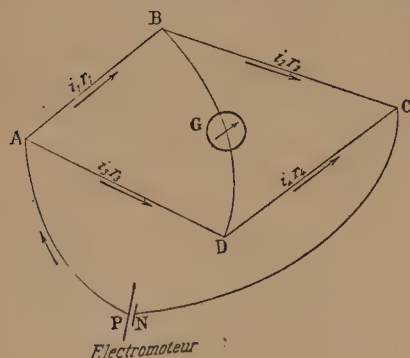


Fig. 125.

2°. — DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE.

Représentons (fig. 126) les potentiels le long des conducteurs ABC et ADC, en fonction des résistances portées en abscisses. Pour que les potentiels en B et D soient égaux, il faut que les points corres-

pondants des droites représentatives soient sur la même horizontale $\beta\delta$; d'où la relation ci-dessus démontrée.

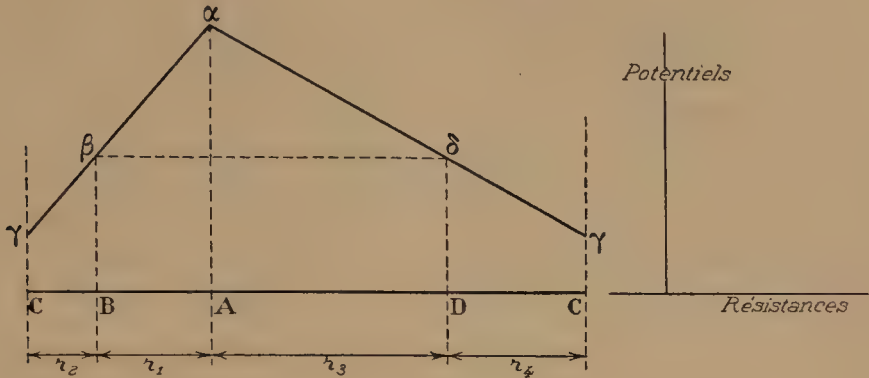


Fig. 126.

111. Lois de Kirchhoff.

Chaque point d'un réseau de fils est caractérisé par un potentiel, excepté les points sièges d'une force électromotrice où le potentiel subit une discontinuité mesurée par la force électromotrice.

Tout point F d'un fil est un *point double* : il y aboutit deux tronçons de fil AF et BF.

M est un point *multiple triple* : il y aboutit trois tronçons de fil, AM, DM, CM. Et ainsi de suite.

Traçons *arbitrairement* des flèches sur tous les circuits; elles indiquent des sens *géométriques* de circulation. Un courant i circulant dans AB est positif quand il est dirigé dans le sens de circulation AB arbitrairement choisi.

Numérotons les parcours.

1°. — *Exprimons que nulle part il n'y a accumulation de ce que transporte le courant.*

Le courant est constant sur tout parcours ne contenant pas de point multiple, c'est-à-dire de point triple, quadruple,...

Aux points multiples, la condition : $\sum i = 0$ est satisfaite.

Nous devons prendre positivement tous les courants qui d'après le sens de circulation choisi vont vers le point multiple considéré, négativement tous ceux qui d'après le sens de circulation choisi s'en éloignent; ou inversement. Ainsi nous écrirons :

$$i_2 + i_1 - i_3 = 0, \quad i_5 - i_6 - i_2 = 0, \quad i_4 - i_1 - i_5 = 0, \dots \quad (1)$$

Toutes ces équations ne sont pas distinctes.

REMARQUE. — Rien ne suppose que les courants passent dans les sens de circulation choisis. La résolution du groupe d'équations (1) combiné avec le groupe (2) que nous allons écrire, donne les cou-

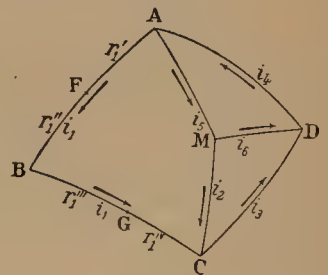


Fig. 127.

rants i avec des signes; nous saurons alors, d'après la convention faite plus haut, comment ils sont dirigés par rapport aux sens de circulation purement conventionnels.

2°. — Soit un circuit simple quelconque ABC : supposons en F et en G des forces électromotrices E_F et E_G .

Représentons par A, B, C, les potentiels en A, en B, en C.

Au point F il y a deux potentiels. Déplaçons-nous dans le sens de circulation; nous arrivons d'abord au potentiel F_a ($a = \text{ante}$) immédiatement avant le point F; puis brusquement nous passons au potentiel F_p ($p = \text{post}$) immédiatement après le point F.

Écrivons la loi d'Ohm (§ 105).

$$\begin{aligned} \text{Dans le fil } AF, \quad i_1 r_1' &= A - F_a; \\ FB, \quad i_1 r_1'' &= F_p - B; \\ BG, \quad i_1 r_1''' &= B - G_a; \\ GC, \quad i_1 r_1^{iv} &= G_p - C. \end{aligned}$$

Appelons r_1 la résistance du fil ABC entier; additionnons les équations :

$$i_1 r_1 = A - C + (F_p - F_a) + (G_p - G_a).$$

Posons : $E_F = F_p - F_a, \quad E_G = G_p - G_a;$

il vient la seconde loi de Kirchhoff :

$$i_1 r_1 = A - C + \sum E.$$

Le produit de l'intensité par la résistance est égal à la différence des potentiels au début et à la fin du fil considéré parcouru dans le sens de circulation, plus la somme des forces électromotrices.

Ces forces sont comptées positivement si, parcourant le fil dans le sens de circulation, le potentiel croît brusquement; elles sont comptées négativement, quand le potentiel décroît brusquement.

3°. — Soit enfin un circuit fermé quelconque, ABCMDA, par exemple.

Suivant ABC, on a : $i_1 r_1 = A - C + \sum E_1;$

CM, $-i_2 r_2 = C - M - \sum E_2;$

MD, $i_3 r_3 = M - D + \sum E_3;$

DA, $i_4 r_4 = D - A + \sum E_4.$

Additionnons, il vient : $\sum i r = \sum E. \quad (2)$

Les i doivent être pris positivement quand, *parcourant dans un sens unique le parcours fermé*, on se trouve justement marcher dans le sens primitivement choisi comme sens de circulation; les i sont pris négativement dans le cas contraire.

Les E sont pris positivement quand, *parcourant dans un sens unique le parcours fermé*, le potentiel croît brusquement; ils sont pris négativement dans le cas où le potentiel décroît brusquement.

Les groupes (1) et (2) d'équations résolvent complètement le problème posé.

En particulier si on se donne, comme d'habitude, les résistances et les forces électromotrices, on peut calculer les intensités dans tous les circuits.

112. Résolution des équations de Kirchhoff.

1°. — POTENTIELS ABSOLUS.

Dans les équations :

$$\sum ir = 0, \quad \sum ir = \sum E, \quad (1) \quad (2)$$

n'interviennent que les forces électromotrices et non les potentiels absolus. Nous apprendrons plus tard à élever ou abaisser tous les potentiels de la même quantité; il suffit de placer le réseau entier (piles comprises) sur un plateau isolant et de le mettre en communication par l'un de ses points avec l'un des conducteurs d'une machine électrique *statique* (voir Troisième Partie). Tandis que les forces électromotrices se chiffrent en volts (dizaines ou centaines au maximum), nous pouvons élever ou abaisser tous les potentiels de 100 000 volts, par exemple; rien n'est changé dans la grandeur des courants, si petits qu'ils soient. Les galvanomètres ne sont pas influencés.

2°. — RÉSEAUX INDÉPENDANTS.

Quand l'intensité est nulle dans un conducteur AB, sa résistance r n'intervient pas dans les équations. On ne change donc pas les intensités dans les autres conducteurs en modifiant r , *que le conducteur AB contienne ou non des forces électromotrices*.

En particulier, on peut couper le conducteur AB, ce qui rend r infini.

En effet, si AB contient des forces électromotrices de somme E , dire qu'il n'y passe pas de courant, c'est dire que la force électromotrice totale E équilibre la différence de potentiel entre les extrémités A et B. Or cet équilibre ne dépend pas de la résistance r .

Il résulte de là que deux réseaux sont indépendants s'ils sont reliés par un conducteur *unique*. En effet, l'électricité ne pouvant s'accumuler nulle part et l'état *permanent* existant par hypothèse, aucun courant ne peut circuler dans ce conducteur. Donc on peut le couper : *les réseaux sont indépendants*.

3°. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE KIRCHHOFF.

Le réseau contient n conducteurs. On donne les résistances et les forces électromotrices; il y a donc n intensités inconnues.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que s'il existe m points multiples, $m-1$ équations (1) sont distinctes; si p est le nombre minimum des conducteurs à enlever pour qu'il ne reste plus de circuit fermé, p équations (2) sont distinctes.

Comme nous sommes sûrs *à priori* que le problème algébrique est soluble et n'est pas indéterminé, il faut qu'on ait :

$$n = m + p - 1.$$

Par exemple, dans les figures 125 et 127, on a :

$$m = 4, \quad n = 6.$$

On vérifiera qu'il faut enlever au minimum 3 conducteurs pour qu'il ne reste plus aucun circuit fermé. On résoudra complètement le problème du pont de Wheatstone, en écrivant 3 équations (1) et 3 équations (2) (voir § 115).

113. Superposition des états d'équilibre. Généralisation de la notion d'électromoteurs.

1°. — SUPERPOSITION DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE.

Il résulte immédiatement de la forme linéaire des lois de Kirchhoff *par rapport aux intensités et aux forces électromotrices*, que la superposition de plusieurs états d'équilibre est un état d'équilibre.

En particulier, dans un circuit quelconque, avec des forces électromotrices quelconques, l'intensité dans une branche quelconque est la somme des intensités qui seraient dues aux forces électromotrices existant séparément.

On suppose bien entendu qu'en supprimant ou installant une force électromotrice, on ramène la résistance du conducteur correspondant à sa valeur initiale.

Quand on superpose des états d'équilibre, on doit donc additionner *pour chaque conducteur* les intensités et les forces électromotrices; on doit addi-

tionner *en chaque point de chaque conducteur* les potentiels qui correspondent à ces états.

Voici une très intéressante application.

2°. — GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ÉLECTROMOTEUR.

Deux points A et B d'un réseau possèdent actuellement des potentiels A et B. Réunissons-les par un conducteur de résistance R (fig. 128); les potentiels en A et B deviennent A' et B'.

Cependant l'intensité dans le conducteur AB se calcule par la formule :

$$i = \frac{A - B}{R + r};$$

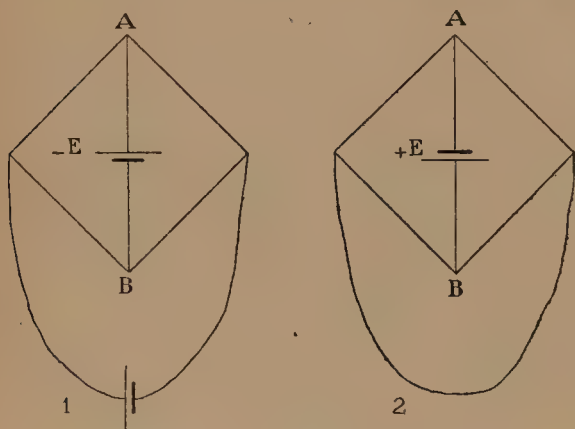


Fig. 128.

où r est la résistance du réseau primitif calculée entre les points A et B. La figure 128 suppose qu'on veut déterminer l'intensité i dans l'une des diagonales d'un pont de Wheatstone non réglé.

Le théorème revient à dire que la formule d'Ohm est applicable, non seulement aux électromoteurs simples et possédant des pôles bien définis, mais à un réseau quelconque considéré comme un électromoteur à pôles arbitraires : la force électromotrice de l'électromoteur est égale à la différence des potentiels *préexistants* aux points choisis comme pôles et qu'on réunit par la résistance R .

Voici la démonstration de cet important théorème.

Relions A et B par un fil de résistance R , mais simultanément compensons la force électromotrice $A - B$ par une force électromotrice E égale et contraire. Il ne passe rien dans AB : nous ne changeons rien à l'état préexistant (fig. 128, 1).

Supprimons toutes les forces électromotrices et installons seulement sur AB une force électromotrice égale à $A - B$ et de même sens (fig. 128, 2). Nous obtenons un courant :

$$i = \frac{A - B}{R + r},$$

où r a évidemment la définition précédente.

Superposons les deux états d'équilibre ; nous avons un nouvel état d'équilibre. Dans le circuit AB existent maintenant deux forces électromotrices de sens contraires, égales en valeur absolue à $A - B$; c'est comme s'il n'en existait aucune. Dans le premier état d'équilibre, le courant dans AB est nul ; il est i dans le second : il est donc encore i dans l'état d'équilibre somme des deux états. C.Q.F.D.

Pour vérifier ce théorème, il suffit de faire varier R et de mesurer les valeurs correspondantes i .

Si le théorème est vrai, il existe une constante r telle qu'on ait :

$$i(R + r) = \text{constante.}$$

114. Loi de réciprocité.

1°. — Nous admettrons la proposition suivante trop longue à démontrer.

Une force électromotrice E , supposée seule dans un réseau, placée sur la branche AB d'un système de conducteurs linéaires et agissant de A vers B, produit un courant i de α vers β dans la branche $\alpha\beta$.

La même force électromotrice, introduite entre α et β et agissant de α vers β , produit le même courant i de sens AB dans le conducteur AB.

Bien entendu, les résistances des conducteurs $\alpha\beta$ et AB sont ramenées à leurs valeurs initiales après l'introduction ou la suppression de la pile.

Nous supposons que la force électromotrice E est seule dans le

réseau. Le théorème de la superposition des états d'équilibre permet de généraliser. Il peut exister des forces électromotrices quelconques ;

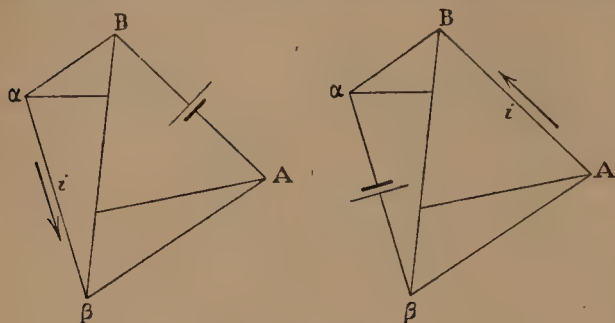


Fig. 129.

i est alors la variation du courant due à l'introduction (sans variation de résistance) de la force électromotrice E .

2°. — D'où le corollaire suivant.

Si une force électromotrice placée sur AB n'envoie rien dans le conducteur $\alpha\beta$, on ne change pas le courant

envoyé dans $\alpha\beta$, par un système quelconque de forces électromotrices, en modifiant n'importe comment la résistance du conducteur AB .

Par exemple, supposons un pont de Wheatstone équilibré (fig. 130), c'est-à-dire tel qu'on ait (§ 110) $ac = bd$.

Il résulte du théorème qu'une force électromotrice, placée sur NT , envoie dans le galvanomètre un courant qui ne dépend pas de la

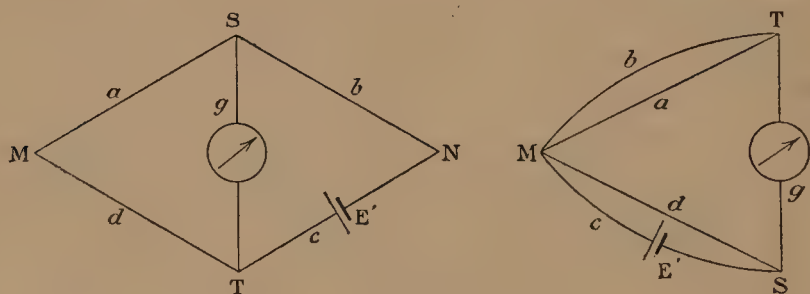


Fig. 130.

résistance du conducteur sur lequel se trouve la pile PN (fig. 125) ; en particulier, le courant reste le même quand on supprime ce conducteur (fig. 130 à gauche) ou quand on met les points M et N en court-circuit (fig. 130 à droite).

115. Étude générale du pont de Wheatstone.

1°. — Nous savons (§ 110) que si rien ne passe dans le galvanomètre, la condition : $ac = bd$, est satisfaite (fig. 131).

Les petites lettres représentent les résistances, les grandes représentent les courants correspondants.

Supposons le pont non équilibré ; cherchons l'intensité G dans le galvanomètre.

Les équations de Kirchhoff sont :

$$A = B + G, \quad D + G = C, \quad P = A + D;$$

$$aA + gG - dD = 0, \quad bB - cC - gG = 0, \quad pP + aA + bB = E.$$

Ces six équations du premier degré à six inconnues résolvent le problème (§ 112).

On trouve :
$$G = \frac{E}{\Delta} (bd - ac)$$

$$\Delta = pg(a + b + c + d) + p(a + d)(b + c) + g(a + b)(c + d) + ab(d + c) + dc(a + b).$$

On peut chercher la meilleure disposition pour la pile et le galvanomètre. On arrive à la règle suivante, du reste sans grand intérêt pratique : *Si le galvanomètre est plus résistant que la pile, faire en sorte qu'il relie le point de jonction des deux plus grandes résistances qui sont alors a et b , au point de jonction des deux plus petites qui sont alors c et d .*

Avec un galvanomètre à cadre mobile dont la résistance est toujours grande, c'est ainsi qu'il faut procéder.

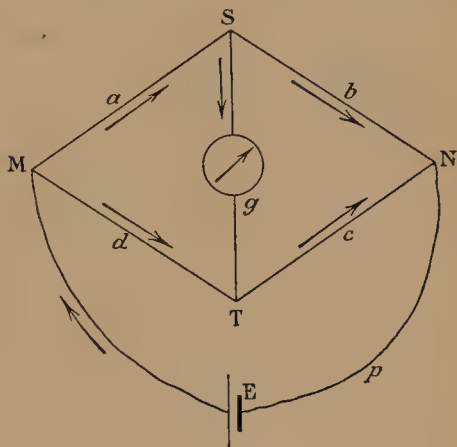


Fig. 131.

2°. — RÉSISTANCE COMPRISE ENTRE LES POINTS M ET N.

Le calcul de la résistance r entre les points M et N du système de conducteurs a, b, c, d, g revient au calcul de l'intensité P , puisqu'on a :

$$P(p + r) = E.$$

On trouve :
$$r = \frac{g(a + b)(c + d) + ab(c + d) + cd(a + b)}{g(a + b + c + d) + (a + d)(b + c)}.$$

Comme vérification, coupons le circuit du galvanomètre; on a évidemment :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a + b} + \frac{1}{c + d}, \quad r = \frac{(a + b)(c + d)}{a + b + c + d},$$

résultat qu'on obtient à partir de l'expression générale en divisant haut et bas par g et posant $g = \infty$.

On traitera directement les cas suivants :

$$g = 0, \quad r = \frac{ab(c + d) + cd(a + b)}{(a + d)(b + c)};$$

$$g = \infty, \quad r = \frac{(a + b)(c + d)}{a + b + c + d}.$$

On vérifiera que ces valeurs sont identiques si le pont est équilibré : $ac = bd$.

La possibilité de faire alors $g = 0$, sans rien changer, résulte du corollaire général suivant : quand l'intensité est nulle dans un conducteur ST qui ne contient pas de force électromotrice, le potentiel est le même en tout point du conducteur, en particulier aux extrémités S et T. On peut donc les réunir directement (rendre nulle la résistance ST) sans que les courants soient modifiés dans les autres conducteurs.

116. Obtention d'un courant alternatif.

On utilise parfois le pont de Wheatstone pour obtenir un courant alternatif lent. Sur un conducteur circulaire dont la résistance par unité de longueur est constante, s'appuie un conducteur diamétral dont on fait varier l'azimut.

Posons : $b = d = \beta$, $a = c = R - \beta$;

$$K = 2pg + R(p + g).$$

Suivant que β est $<$ ou $>$ de $R : 2$, le courant dans BD passe

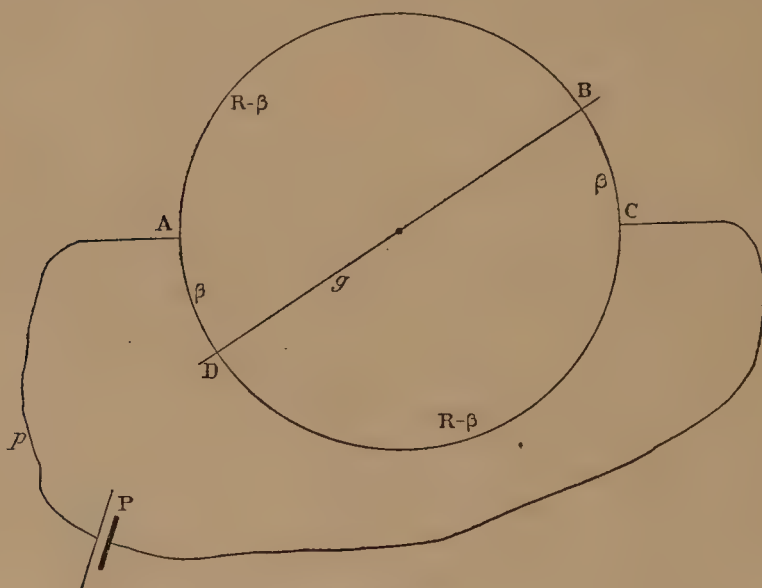


Fig. 132.

dans un sens ou dans l'autre, par rapport à BD bien entendu.

On trouve directement ou en particulierisant les formules du pont :

$$G = E \frac{R - 2\beta}{K + 2\beta(R - \beta)}, \quad \frac{G}{P} = \frac{R - 2\beta}{R + 2g}.$$

Quand on fait tourner le conducteur diamétral, la loi de variation du courant G en fonction de β est donc assez complexe. Elle est

représentée par la figure 133; on suppose la rotation uniforme et on prend le temps pour variable : G ne varie pas proportionnellement à β .

On a cru rendre la loi de variation du courant G plus simple en mettant deux conducteurs diamétraux indépendants et de même résistance, à 90° l'un de l'autre.

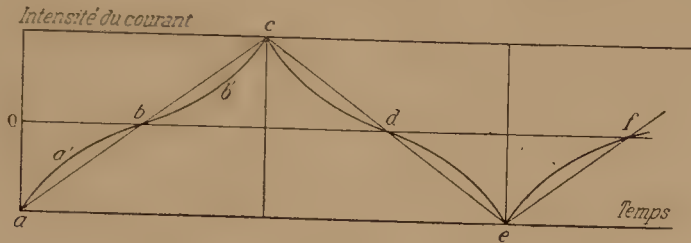


Fig. 133.

Mais un calcul facile donne une loi semblable à la précédente :

$$G = E \frac{R - 2\beta}{K + 2\beta(R - 2\beta)}.$$

Si pour une rotation uniforme du conducteur diamétral, on veut une loi de variation déterminée du courant, par exemple linéaire ou sinusoïdale, force est de calculer convenablement la loi de variation de la résistance du cercle. Dans la pratique, ce cercle est formé d'une cinquantaine de touches entre lesquelles sont installées les résistances.

117. Calcul direct de deux cas particuliers.

Il n'est pas toujours nécessaire de recourir aux équations de Kirchhoff; le calcul direct est souvent plus rapide.

Voici deux cas qui permettent de vérifier la proposition du § 114.

1°. — Plaçons une pile E' sur le bras c d'un pont de Wheatstone. Supposons coupé le conducteur p (fig. 130, à gauche).

Calculons l'intensité C .

Entre les points T, S , le système des conducteurs TMS et TS a la résistance :

$$r_1 = (a + d)g : (a + d + g).$$

D'où :

$$C = \frac{E'}{r_1 + b + c} = E' \frac{g + a + d}{g(a + b + c + d) + (a + d)(b + c)}.$$

Le courant C étant connu, il est facile de calculer les courants dans les autres conducteurs. Par exemple :

$$G = E' \frac{a + d}{g(a + b + c + d) + (a + d)(b + c)}.$$

2°. — Les points M et N sont réunis (fig. 130 à droite). Le calcul

est un peu plus long. On remplace les conducteurs a et b par le conducteur équivalent; on calcule ensuite la résistance de l'ensemble des conducteurs a , b , g et d . On trouve :

$$C = E' \frac{ab + (a + b)(g + d)}{g(a + b)(d + c) + ab(c + d) + dc(a + b)}.$$

Le courant C étant connu, le calcul des autres devient facile.

Par exemple :

$$G = E' \frac{d(a + b)}{g(a + b)(d + c) + ab(c + d) + dc(a + b)}.$$

3°. — REMARQUES.

Les dénominateurs des divers courants sont des cas particuliers du dénominateur Δ du § 115. C'est nécessaire, puisque en définitive nous utilisons implicitement cinq des équations de Kirchhoff.

On vérifiera que les deux expressions du courant G deviennent identiques si le pont est équilibré : $ac = bd$.

Dans ce cas, nous pouvons rétablir le circuit p du pont; le courant envoyé dans le galvanomètre ne dépend ni de la résistance de ce circuit ni de la force électromotrice qu'il contient : il est en particulier le même, que la résistance p soit nulle ou infinie (§ 114).

Corps à deux et trois dimensions.

118. Réfraction des lignes de courant.

Reprenons le cas général; précisons ce qu'il faut entendre par *réfraction* des lignes de courant (Voir fig. 120).

1°. — En tout point de l'intersurface, le potentiel peut varier brusquement; la variation est constante et caractérise les milieux considérés à la température considérée. Il résulte de là que les surfaces équipotentiellles dans les milieux au contact aboutissent à des courbes communes (lignes équipotentiellles) sur l'intersurface (§ 104, 4°).

Supposons tracé le faisceau de ces courbes; leur numérotage diffère d'une quantité constante suivant qu'on les envisage comme appartenant au premier ou au second milieu. Mais leurs trajectoires orthogonales sur la surface de séparation, trajectoires qui donnent la direction du courant dans les milieux *parallèlement à cette surface*, sont communes. *Donc les lignes de courant sont dans le même plan normal à la surface de séparation, des deux côtés de cette surface*, puisque les composantes tangentiellles du courant sont parallèles.

C'est l'analogue de la première loi de Descartes pour la réfraction de la lumière.

D'ailleurs, l'écartement des lignes de niveau étant le même sur la surface de séparation, les composantes tangentiellles de la force sont

égales : sur l'intersurface les composantes tangentielles du courant sont en raison inverse des conductibilités.

2°. — Considérons dans les deux milieux les tubes de courant qui aboutissent à une même courbe fermée, tracée sur la surface de séparation et limitant une aire S . Nous savons, d'après ce qui précède, qu'ils sont dans un même plan avec la normale.

Soit θ_1 et θ_2 les angles qu'ils font avec cette normale.

Ecrivons que le flux se conserve.

Les sections droites des deux tubes sont :

$$\sigma_1 = S \cos \theta_1, \quad \sigma_2 = S \cos \theta_2.$$

Soit i_1 et i_2 les intensités des courants dans ces tubes : la conservation du flux exige que l'on ait :

$$i_1 \sigma_1 = i_2 \sigma_2, \quad i_1 \cos \theta_1 = i_2 \cos \theta_2.$$

C'est précisément ce qu'exprime l'équation de condition (§ 104) :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0.$$

3°. — Il résulte du 1° la condition :

$$i_1 \rho_1 \sin \theta_1 = i_2 \rho_2 \sin \theta_2.$$

D'où la loi de réfraction des lignes de courant :

$$\rho_1 \operatorname{tg} \theta_1 = \rho_2 \operatorname{tg} \theta_2.$$

Par exemple, une feuille d'argent est en contact par un bord rectiligne avec une feuille de même épaisseur en platine, métal environ 13 fois moins conducteur que l'argent. Amenons et emmenons le courant par deux électrodes A et B, appliquées normalement à la double feuille. Sur la droite de séparation, la direction des lignes de courant change brusquement. La réfraction allonge le chemin dans le métal le plus conducteur, le raccourcit dans le métal le moins conducteur.

4°. — On donne le potentiel V en certains points ou lignes qu'on appelle les électrodes ; on demande de déterminer V en tous les points.

La solution *directe* du problème est rarement possible. Mais on en connaît un nombre indéfini de solutions *indirectes*, la solution d'un cas simple fournissant les solutions d'une infinité d'autres cas.

Nous traiterons plus loin quelques exemples qui expliqueront le sens de cette proposition.

119. Résistance dans le cas d'un corps à plusieurs dimensions.

On maintient deux points du corps conducteur, ou deux groupes

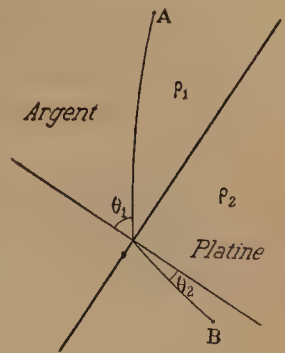


Fig. 134.

de points A et B pris dans ou sur le corps, à des potentiels constants V_1 et V_2 . Dans ces conditions, il passe par seconde de A à B un flux Q . Par analogie avec la loi d'Ohm, on appelle *résistance du milieu entre les électrodes A et B*, le quotient :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{Q}.$$

Supposons connues les surfaces équipotentiellles entre A et B; le flux total à travers l'une de ces surfaces a pour expression :

$$Q = -\frac{1}{\rho} \iint \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Il est *conservatif*; autrement dit, il est le même quelle que soit la surface équipotentielle choisie, puisque la *matière* du courant se conduit comme un fluide incompressible.

La détermination de R implique donc la connaissance des surfaces équipotentiellles, indispensable pour calculer le flux.

Voici un théorème important. Conservons les mêmes électrodes; changeons seulement la valeur de $V_1 - V_2$: *les surfaces équipotentiellles restent les mêmes; leur numérotage seul varie.*

Q et $V_1 - V_2$ varient dans le même rapport : donc R reste constant.

La résistance d'un corps donné entre des électrodes de forme donnée, est une quantité parfaitement déterminée, indépendante des potentiels auxquels les électrodes sont maintenues.

Cette résistance dépend essentiellement de la disposition des électrodes et ne peut en aucune manière caractériser le corps.

120. Cas particuliers.

1°. — CORPS LIMITÉ PAR DEUX SPHÈRES DE RAYONS R_1 ET R_2 MAINTENUES AUX POTENTIELS V_1 ET V_2 .

Les surfaces équipotentiellles sont les sphères satisfaisant à la condition :

$$V = \frac{V_1 - V_2}{r} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} - \frac{V_1 R_1 - V_2 R_2}{R_2 - R_1},$$

r désigne le rayon de la surface considérée.

D'où facilement pour la résistance :

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Si la sphère extérieure est très grande, on peut négliger $1 : R_2$ devant $1 : R_1$. Il reste : $R = \frac{\rho}{4\pi R_1}$.

Ce résultat explique comment, même en admettant pour le sol une conductibilité notable, même en l'assimilant à un milieu indéfini, la *ligne de retour* des télégraphes (constituée par la Terre) ne

présente une résistance négligeable que si la mise à la terre peut être assimilée à une sphère de *grand* rayon.

La résistance entre deux électrodes sphériques de rayons R_1 et R'_1 , à grande distance l'une de l'autre dans un milieu indéfini, est :

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right).$$

2°. — CYLINDRES CONCENTRIQUES.

Le phénomène est cylindrique. Les surfaces équipotentielles sont des cylindres concentriques qui ont pour équation générale :

$$V = P \log r + Q,$$

comme on le vérifie en écrivant que le flux est le même, quel que soit le cylindre considéré.

Soit A le flux par unité de longueur.

La résistance par unité de longueur est :

$$R = \rho \frac{V_1 - V_2}{A} = \frac{\rho}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1},$$

où V_1 et V_2 sont les potentiels sur les cylindres de rayon R_1 et R_2 .

On calcule avec cette formule la résistance d'isolement d'un câble; pour une longueur l , tout se passe comme si on avait l résistances égales, *en dérivation*; la résistance totale est :

$$\frac{\rho}{2\pi l} \log \frac{R_2}{R_1}.$$

Nous reviendrons là-dessus dans la troisième partie de ce Cours; nous retrouverons, à propos des capacités électriques, les formules données pour les sphères et les cylindres.

3°. — FIL CYLINDRIQUE ABOUTISSANT DANS UN ESPACE INDÉFINI DE LA MÊME MATIÈRE.

On rencontre ce cas dans la construction de l'ohm; un tube plein de mercure aboutit dans deux masses de mercure qu'on peut considérer comme indéfinies. La résistance ne se compose pas uniquement de celle du fil; à la sortie du tube, les lignes de courant sont nécessairement très resserrées : quoique le milieu soit indéfini, il oppose près de l'orifice une résistance qui n'est pas négligeable.

Le calcul est long et compliqué; voici le résultat.

A chaque extrémité libre, il faut ajouter au fil une correction égale à 0,81 de son rayon, pour tenir compte de la résistance au voisinage de l'orifice. Par exemple, si l'ohm réalisé se compose d'un fil cylindrique de mercure d'un millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur, le diamètre de ce fil sera sensiblement 1mm,13 et le rayon 0mm,57 : la correction à chaque bout sera donc $0,81 \times 0,57$, et l'ensemble des corrections 0mm,9 environ.

Le tube ne doit avoir que 105c,91.

121. Distribution des courants dans une plaque.

1°. — Dans une plaque mince, plane, également épaisse et conductrice en tous ses points, amenons au moyen d'électrodes punctiformes E_1, E_2, \dots des courants d'intensités I_1, I_2, \dots . Le potentiel est très sensiblement le même, dans l'intérieur de la plaque, en tous les points d'une normale menée à la surface. Nous sommes ramenés à déterminer sur la plaque les lignes équipotentiellles et les lignes de courant qui forment deux faisceaux orthogonaux.

La matière du courant ne s'accumulant nulle part, la condition :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

est satisfaite en tous points de la plaque hors des électrodes.

La condition étant linéaire, la solution est la somme d'un nombre quelconque de solutions particulières.

Considérons donc une seule électrode E_1 amenant le courant I_1 dans une plaque indéfinie.

La solution :
$$2\pi V_1 = -\frac{I_1 \rho}{\delta} \log r_1 + A_1$$

convient; ρ est la résistivité, δ l'épaisseur de la plaque.

En effet, le flux total à travers un cylindre de rayon r_1 et d'épaisseur δ est constant et égal à I_1 :

$$-\frac{2\pi r_1 \delta}{\rho} \frac{dV}{dr_1} = I_1.$$

Le courant s'écoule par des électrodes disposées symétriquement à l'infini.

Pour n électrodes et une plaque indéfinie, il faut additionner des solutions de la forme précédente :

$$MV = N - [I_1 \log r_1 + I_2 \log r_2 + \dots];$$

$M = 2\pi\delta:\rho$; N est une constante; r_1, r_2, \dots sont les distances aux diverses électrodes, du point où le potentiel est V .

Les intensités I sont prises positivement si le courant entre dans la plaque, négativement s'il en sort; ou inversement.

Les lignes équipotentiellles satisfont aux conditions équivalentes :

$$\Sigma(I \log r) = \text{Constante}, \quad r_1^{I_1} r_2^{I_2} \dots r_n^{I_n} = \text{Constante}.$$

2°. — Déjà, pour une plaque indéfinie, les équations sont plus faciles à poser qu'à résoudre; pour une plaque finie, le problème direct est quasiment inextricable. Voici comment on procède (§ 118).

Une solution, obtenue pour une plaque indéfinie, est utilisée pour une plaque finie, grâce à la possibilité de découper la plaque le long de toutes les lignes de courant, sans changer la forme des lignes équipotentiellles.

Les lignes de courant aboutissent nécessairement aux électrodes.

On peut utiliser des électrodes non plus punctiformes, mais finies; il faut alors qu'elles touchent la plaque suivant une des lignes équipotentiellles précédemment déterminées.

Ces deux artifices multiplient le nombre des solutions, chaque cas étudié sur le plan indéfini fournissant une infinité de cas pour des plaques limitées.

Pour de telles plaques, la condition : $\sum I = 0$, est évidemment à satisfaire.

122. Applications.

1°. — DEUX ÉLECTRODES CIRCULAIRES CONCENTRIQUES.

La solution se déduit immédiatement du cas d'une électrode punctiforme sur une plaque indéfinie. Il suffit d'écrire que pour les rayons r et r' , le potentiel a les valeurs données. On se reportera à ce que nous avons dit à propos de la résistance entre deux cylindres concentriques (§ 120), ou de la conductibilité thermique entre deux cylindres (*Thermodynamique*, première partie, § 88).

2°. — DEUX ÉLECTRODES PUNCTIFORMES.

On a nécessairement :

$$I_1 + I_2 = 0.$$

Les lignes équipotentiellles satisfont à la condition :

$$r_1 : r_2 = \text{Constante}.$$

Les lignes de courant sont des arcs de cercle passant par les traces des électrodes. Les lignes équipotentiellles sont des cercles orthogonaux aux premiers admettant comme axe radical la perpendiculaire au milieu de la droite joignant les électrodes (*Mathématiques générales*, § 90).

La solution est applicable à une plaque limitée par deux lignes de courant, en particulier, à une plaque circulaire ayant les électrodes aux extrémités opposées d'un diamètre.

La figure 135 correspond à un cas infiniment plus compliqué, puisque le pourtour circulaire ne passe pas par les électrodes.

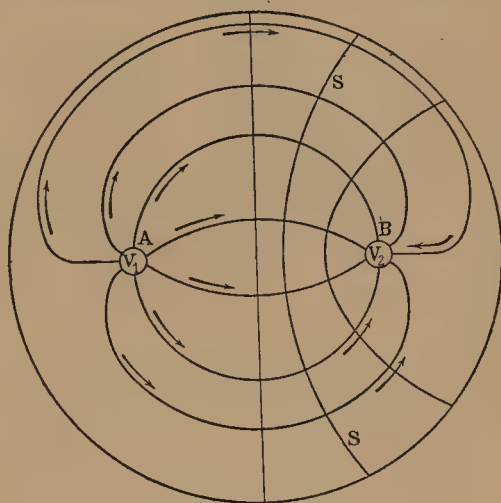


Fig. 135.

123. Anneaux de Nobili.

1°. — Lorsqu'on place un assemblage d'électrodes cylindriques verticales à très petite distance d'une plaque horizontale de métal (épaisse ou mince, peu importe), limitée aux parois d'une auge élec-

trolytique isolante, des anneaux colorés apparaissent sur la plaque : ce sont les anneaux ou, plus généralement, les courbes de Nobili. L'expérience réussit bien en prenant pour fond de l'auge une plaque de cuivre, pour électrodes des aiguilles d'acier longues et fines, pour liquide électrolytique un mélange d'acétates de cuivre et de plomb (fig. 136).

Voici l'explication du phénomène (Voigt).

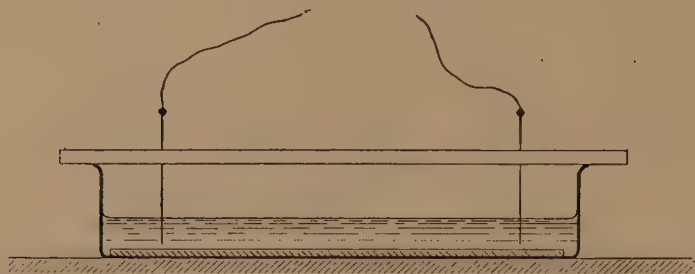


Fig. 136.

La plaque métallique étant beaucoup plus conductrice que l'électrolyte, son potentiel est à peu près uniforme. Soit donc V une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue du liquide; elle ne devient infinie qu'aux points d'arrivée et de sortie du courant, où elle croît en raison inverse de la distance à ces points. Elle doit satisfaire en tout point de l'électrolyte à la condition de conservation :

$$\Delta V = 0.$$

Prenons la surface supérieure de la plaque métallique pour plan des xy ; le plan $z=0$ est une surface de niveau.

Posons pour préciser : $V=0$ pour $z=0$.

A la surface libre du liquide, le courant se meut horizontalement; soit h l'épaisseur du liquide; on doit avoir simultanément (§ 104) :

$$z=h, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Enfin le courant se meut parallèlement aux parois du vase; soit v une variable comptée sur la normale en tout point de la paroi; il faut satisfaire à la condition :

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

2°. — La plaque métallique étant *par hypothèse* une surface de niveau, les lignes de courant y aboutissent normalement. On peut admettre que *les lignes isochromatiques du phénomène de Nobili sont le lieu des points pour lesquels le courant normal à la plaque a une intensité donnée.*

Donc elles sont définies par la condition :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \text{Constante.} \quad (1)$$

Considérons une surface équipotentielle δV très voisine de la surface : $z=0$, $V=0$.

Traçons ses lignes topographiques de niveau $\delta z = \text{Constante}$; elles satisfont évidemment à l'équation (1).

Les lignes isochromatiques sont donc les lignes topographiques de niveau d'une surface équipotentielle très voisine de la plaque métallique (plan de référence).

De là résultent les propriétés générales de ces lignes.

La surface δV aboutit normalement aux parois du vase, car le courant est parallèle à ces parois. Si les parois sont verticales, les lignes de niveau de la surface δV (qui sont des horizontales), sont nécessairement normales à la paroi; donc les lignes isochromatiques qui aboutissent aux parois, les coupent à angle droit.

Les autres courbes isochromatiques sont fermées.

Comme la surface δV présente des maximums ou des minimums là où sont les électrodes, les lignes isochromatiques entourent les électrodes.

3°. — On a cru trouver, dans les lignes isochromatiques des figures de Nobili, des solutions particulières de l'équation :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

correspondant au problème du § 121, c'est-à-dire à la distribution des courants *dans* la plaque. Les lignes isochromatiques correspondent, au contraire, à certaines conditions pour les courants qui sortent *normalement* de la plaque ou qui entrent *normalement* dans la plaque.

On peut donner une théorie plus complète du phénomène en introduisant la polarisation, variable d'un point à l'autre de la plaque, qui résulte de l'existence de ces courants.

CHAPITRE VII

LOI DE JOULE. ÉNERGIE TRANSPORTÉE PAR LES COURANTS

124. Loi de Joule.

Un conducteur traversé par un courant s'échauffe : de la chaleur y est donc abandonnée. Pour retrouver les lois du phénomène, on utilise un calorimètre contenant un liquide mauvais conducteur, du pétrole, par exemple; on évite ainsi l'électrolyse. Immergeons une spirale de fil nu dont nous connaissons la résistance; faisons passer un courant d'intensité connue, pendant un temps connu; l'élévation de température du liquide permet de calculer la chaleur abandonnée.

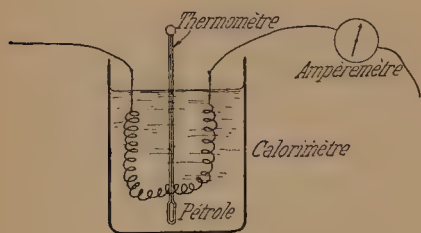


Fig. 137.

Si le courant i est évalué en ampères, la résistance R en ohms, la quantité de chaleur Q en petites calories, le temps t en secondes, l'expérience donne la formule :

$$Q = \frac{1}{4,18} Ri^2t = 0,239 \cdot Ri^2t \text{ . petites calories.}$$

En particulier faisons : $R = i = t = 1$; il vient :

$$Q = 0,239 \text{ petites calories} = 0,239 \times 0,427 = 0,1019 \text{ kilogrammètres.}$$

La quantité que nous définissons ainsi est le *joule*, qui vaut 10^7 ergs.

En effet, la dyne, force nécessaire pour communiquer au gramme-masse en une seconde l'accélération de 1 centimètre par seconde, vaut $1 : 981 = 0,001019$ gramme-poids de Paris, soit un peu plus d'un milligramme. L'erg vaut donc 1,019 milligramme-centimètre; par suite, le joule (10^7 ergs par définition) vaut :

$$(1,019 \times 10^6) \cdot 10 = 1,019 \text{ kgm.} \cdot \text{dem.} = 0,1019 \text{ kgmètre.}$$

Le résultat précédent n'est pas l'effet du hasard, l'unité de force électromotrice étant précisément choisie pour qu'il en soit ainsi.

125. Énergie absorbée dans une portion de circuit. Unité de force électromotrice.

1°. — La loi précédente est un cas particulier d'une loi générale que nous interpréterons dans la troisième partie de ce Cours, à partir de la théorie de l'électricité et de la définition énergétique du potentiel électrique. Contentons-nous ici de l'énoncer.

Nous venons de voir que l'énergie abandonnée sous forme de chaleur dans la portion de circuit dont la résistance est R et où circule le courant i , est :

$$Q = Ri^2t \text{ joules} = Ri^2t \cdot 10^7 \text{ ergs.}$$

Soit E la force électromotrice aux bouts du conducteur.

En vertu de la loi d'Ohm, on a :

$$E = Ri, \quad Q = Ri^2t = Eit \text{ joules.}$$

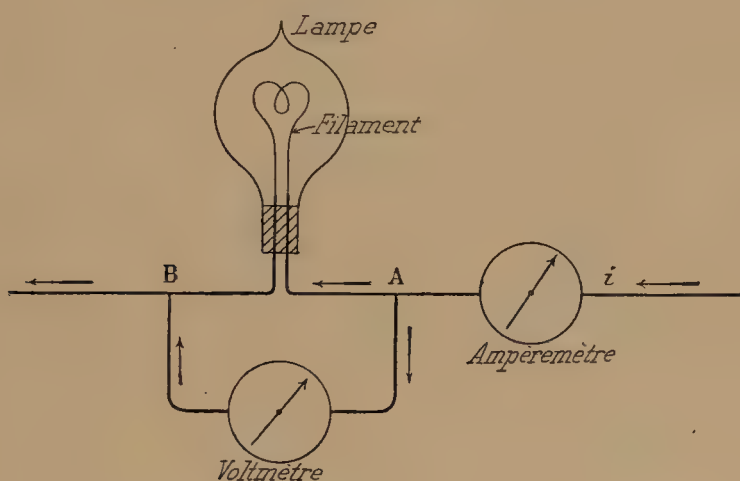


Fig. 138.

L'expérience montre que cette formule est générale.

Sous cette forme, peu importe à quoi est utilisée l'énergie absorbée ; il suffit, pour la connaître, de déterminer simultanément l'ampérage et le voltage aux bouts du circuit.

La figure 138 représente la disposition des appareils ; elle suppose qu'on mesure l'énergie absorbée par une lampe à incandescence ; mais on peut substituer à la lampe une dynamo, un moteur, un appareil quelconque.

2°. — UNITÉ DE FORCE ÉLECTROMOTRICE.

Le produit Eit représente un travail. Nous savons évaluer un travail et une intensité en unités C.G.S. : l'unité de force électromotrice nous est donc imposée. Elle est telle que le courant, qui est poussé par elle dans un conducteur quelconque, y abandonne sous forme de chaleur, pendant une seconde, un nombre d'unités d'énergie (ergs) numériquement égal à l'intensité du courant.

Cette unité de force électromotrice (ou de différence de potentiel) serait incommode. Au lieu de l'erg, on prend pour unité de travail le *joule* (10^7 ergs, 0,101972 kilogrammètres); au lieu de l'unité C.G.S. d'intensité, on prend l'*ampère* (10^{-1} C.G.S.).

On est conduit à prendre pour unité pratique de force électromotrice le *volt*, qui vaut 10^8 C.G.S.

Les forces électromotrices des piles usuelles sont de l'ordre du volt.

L'unité de puissance est le *watt* (*joule* par seconde, travail de 0,101972 kilogrammètres par seconde).

Le cheval-vapeur vaut 736 watts; le kilowatt vaut 1,36 cheval-vapeur.

3°. — La formule : $Q = Ei$, est susceptible de signe. Quand le courant va de A à B, quand simultanément le potentiel *décroît* de A en B, Q est positif : dans ce cas, l'énergie électrique est *absorbée* dans le circuit AB; on la retrouve sous une forme quelconque, chaleur ou travail mécanique.

Inversement, considérons le cas d'une pile. Quand, à travers la pile, on va de son pôle négatif à son pôle positif, c'est-à-dire dans le sens du courant, le potentiel *croît* : le circuit compris entre ces deux points *fournit* de l'énergie. Corrélativement il existe dans la pile un phénomène chimique.

126. Échauffement des conducteurs. Plombs fusibles.

1°. — La quantité de chaleur déversée dans un conducteur élève sa température. Le calcul précis de cette élévation est quasiment impossible parce qu'elle dépend de la conductibilité du fil, des propriétés émettrices de la surface (brillante, mate ou noircie), enfin de la température ambiante.

Voici d'abord deux expériences de cours.

Plaçons en série des bouts de fils de fer et de cuivre de même diamètre (fig. 139). Envoyons dans le système un courant dont nous faisons croître l'intensité : le fer rougit pour une intensité qui ne rougit pas le

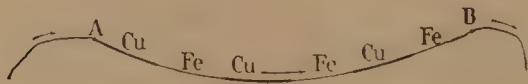


Fig. 139.

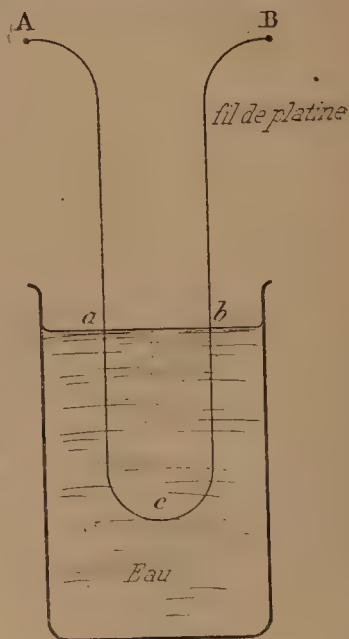


Fig. 140.

cuivre : preuve que la résistivité du fer est plus grande que celle du cuivre.

Envoyons le courant d'une pile dans un fil de platine ; réglons l'intensité de manière qu'il soit rouge sombre. Il devient rouge vif quand on plonge la moitié du fil dans l'eau. Preuve que la résistance du platine croît par élévation de la température. L'immersion diminue la résistance totale ; elle augmente donc l'intensité du courant, puisque la force électromotrice est donnée.

On trouve dans les aide-mémoires des tableaux donnant pour le cuivre, en fonction de l'intensité du courant et du diamètre, les échauffements dans le cas d'une surface brillante (émission faible) et dans le cas d'une surface oxydée noire (émission forte). Il va de soi que les résultats, intéressants comme ordre de grandeur, ne visent pas à la précision scientifique.

2°. — PLOMBS FUSIBLES.

Si la matière est aisément fusible, un courant intense liquéfie le conducteur et coupe le circuit : tel est le rôle des plombs fusibles. Ils sont généralement constitués par un alliage de 60 % de plomb et de 40 % d'étain. Ils fondent pour les courants suivants (en ampères) :

Diamètres	0 ^{mm} ,5	0 ^{mm} ,8	1 ^{mm} ,4	1 ^{mm} ,4
Courants	10	18	23	28

On peut utiliser des coupe-circuits en un métal quelconque.

Voici les courants qui portent le platine au rouge sombre (525°) et qui le fondent :

Diamètres des fils	0 ^{mm} ,25	0 ^{mm} ,50	0 ^{mm} ,75
Rouge sombre	2,92	11,43	20,32
Fusion	5,28	17,78	30,78

Ces nombres sont pour fixer les idées. Si les plombs fusibles sont très courts et si leurs extrémités sont noyées dans une grande masse conductrice, il faut un courant plus fort pour les fondre.

La longueur doit être de l'ordre de 100 diamètres pour que les conditions de fusion soient déterminées.

On recommande l'étain pur en lames minces.

127. Mesure de l'intensité efficace d'un courant variable.

1°. — Lorsqu'un courant périodique de période T passe toujours dans le même sens, il est possible de mesurer son intensité moyenne :

$$i_m = \frac{1}{T} \int_0^T i dt,$$

en se servant d'un galvanomètre ordinaire (sous les restrictions que nous verrons au § 221). Mais pour des courants alternativement dans

un sens et dans l'autre, les indications du galvanomètre (à les supposer proportionnelles à i_m) n'ont qu'un intérêt médiocre.

La quantité qui intervient naturellement est ce qu'on appelle l'intensité efficace :

$$i_{eff.} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.}$$

C'est l'intensité d'un courant *constant* qui produit le même échauffement moyen que le courant variable, à supposer la loi de Joule applicable à de tels courants, ce que l'expérience vérifie.

Ceci posé, la mesure de l'intensité efficace ne présente aucune difficulté.

Le courant traverse une pièce métallique AB qui porte normalement deux tiges métalliques *a* et *b*.

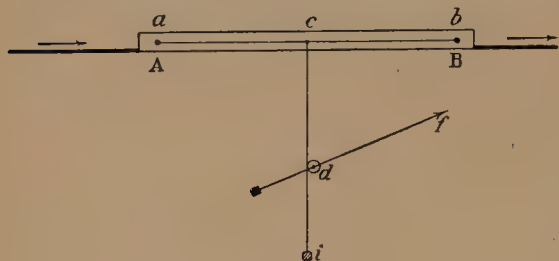


Fig. 141.

Entre ces tiges est tendu un fil fin *ab* qui forme une dérivation. Une partie du courant traverse le fil, l'échauffe, l'allonge. Au point *c* est attaché un autre fil fin qui passe sur la poulie *d* et est tendu par le poids *i*. Une aiguille

solidaire de la poulie *d* se déplace sur une graduation. Les déplacements de l'extrémité *f* sont fonction des déplacements du point *c*, par suite des allongements du fil *ab*.

L'étalonnage de l'appareil se fait avec un courant continu, conformément à la définition. Il ne présente aucune difficulté, mais doit être répété de temps en temps.

Il faut rendre les indications de l'instrument indépendantes des variations de la température ambiante. Pour cela, on choisit pour la pièce métallique AB un alliage qui ait le coefficient de dilatation du fil *ab*. Quand AB et *ab* se dilatent simultanément, la hauteur du point *c* ne varie pas.

128. Divers procédés d'amplification.

Les inventeurs se sont donné carrière.

Le fil ne doit jamais supporter que des variations de température de l'ordre de 200°. Le coefficient de dilatation du cuivre (qui est l'un des plus grands) est $1,7 \cdot 10^{-5}$; de sorte que pour 200° et 1000 millimètres ou un mètre, l'allongement est inférieur à 4 millimètres.

Quelques constructeurs utilisent des poulies de renvoi et un fil dont la longueur est de l'ordre du mètre. Il passe sur la poulie liée à l'aiguille et est tendu par un ressort. Il suffit que le support

métallique des poulies ait le coefficient de dilatation du fil pour que les variations de la température ambiante n'interviennent pas, *quelle que soit la trajectoire du fil*.

D'autres appliquent deux fois le *principe de la flèche*.

Reprenons la figure 141. Posons $\overline{ab} = 2l$; cherchons le déplacement vertical v du point c pour un allongement 2λ . On a :

$$(l + \lambda)^2 = v^2 + l^2; \quad \text{d'où approximativement : } 2l\lambda = v^2.$$

$$\text{Soit } \lambda = l\alpha t; \quad \text{il vient : } v = l\sqrt{2\alpha t}.$$

$$\text{Par exemple : } \alpha t = 0,001, \quad \sqrt{2\alpha t} = 0,045;$$

v est 45 fois plus grand que λ .

La figure 142 montre comment on utilise le déplacement vertical du point c pour obtenir un déplacement horizontal considérable du

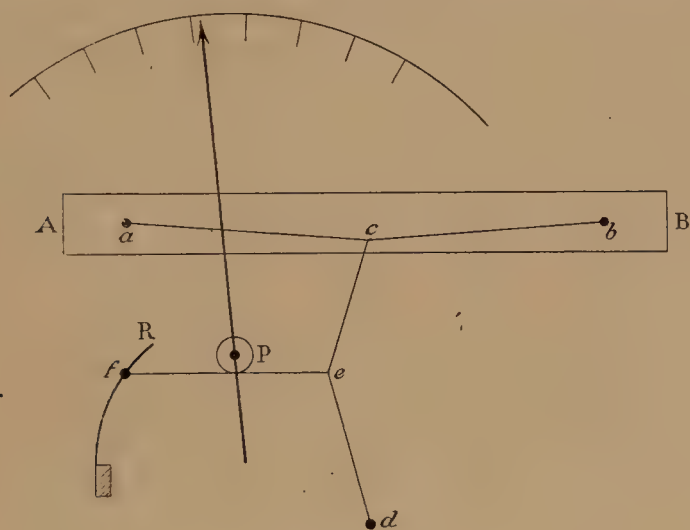


Fig. 142.

point e sur le fil auxiliaire cd dans lequel ne passe aucun courant, qui par suite ne s'allonge pas.

Le ressort R maintient tendus les deux fils.

L'échauffement t est vaguement proportionnel à i^2 ; par suite, le déplacement v (s'il reste très petit) est approximativement proportionnel à i . En tous cas, le procédé de multiplication par la flèche atténue l'inconvénient de la graduation où l'écartement des traits est proportionnel à Δi , c'est-à-dire diminue le rapprochement extrême des traits pour les petites intensités.

129. Autres formes des ampèremètres à dilatation.

1°. — AMPÈREMÈTRE A RUBAN TORDU.

Voici très longtemps qu'un ruban platine-argent a été proposé comme thermomètre (Bréguet). Il est enroulé en spirale (l'argent en dedans) et suspendu verticalement. Il porte à son extrémité inférieure

une aiguille horizontale. Quand la température s'élève, l'argent se dilatant plus que le platine, la courbure des spires décroît; par suite, le nombre des pas de l'hélice diminue : l'aiguille tourne.

Imaginons deux telles spirales S_1 , S_2 , enroulées en sens contraires et placées dans le prolongement l'une de l'autre. Un miroir M est collé sur le fil de jonction. Pour éviter l'effet des variations de la température ambiante, la double spirale est fixée à une pièce d'ébène E , tirée par un ressort R et maintenue par deux fils F ayant le même coefficient de dilatation que le ruban platine-argent formant les spirales.

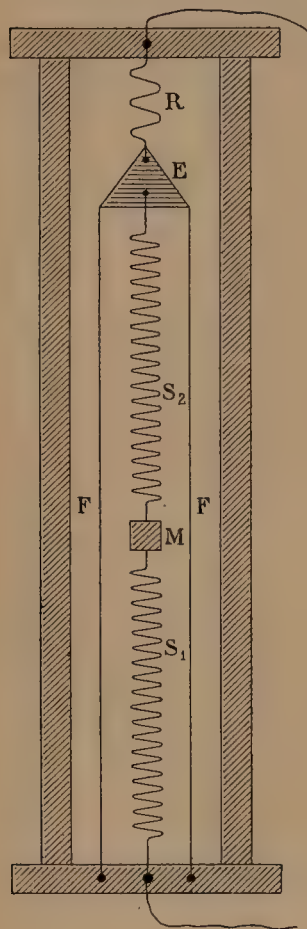


Fig. 143.

Si un courant traverse l'appareil, les spirales s'échauffent et le miroir dévie.

L'appareil permet de mesurer des courants dont l'intensité efficace est de l'ordre du millièmi d'ampère. La résistance est de 20 ohms.

2°. — THERMOMÈTRE DE RIESS.

Une sphère à quatre tubulures contient une hélice de fil de platine très fin qui est fixée

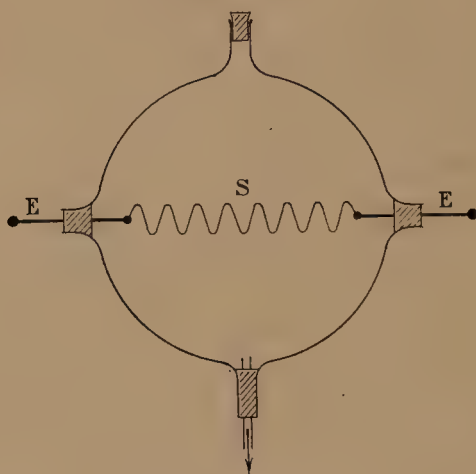


Fig. 144.

par des tiges métalliques E_1E , mastiquées dans les tubulures horizontales. La tubulure supérieure est fermée par un bouchon; l'inférieure communique avec un manomètre sensible (à eau et tube incliné, ou encore à deux liquides).

Quand la spirale est échauffée par le passage d'un courant, elle échauffe l'air : la pression croît. Le changement de pression du gaz ou son changement de volume à pression constante sont proportionnels à la quantité de chaleur dégagée dans la spirale. L'appareil est commode pour les courants instantanés (voir troisième partie du Cours).

Lampes à incandescence.

130. Éclairage par incandescence.

L'éclairage par incandescence utilise l'échauffement que produit le passage d'un courant dans un fil de charbon ou de métal.

Le fil doit être fin pour que sa résistance soit suffisante, peu fusible, tenace; il doit subsister un temps assez long et pour cela résister, à haute température, à l'action chimique du milieu environnant; en particulier, si ce milieu est de l'air, le fil ne doit pas se détruire par oxydation.

D'une manière générale, une lampe se compose de quatre parties : un filament que le courant porte à l'incandescence, des fils de raccord, une ampoule de verre, enfin le culot qui permet de brancher la lampe sur la canalisation.

On utilise trois types principaux de lampes : à filament de carbone, à filament métallique, à filament d'oxyde. Indiquons l'essentiel de la fabrication et des propriétés de ces trois types.

Nous reportons à la troisième partie de ce Cours l'étude des lampes des arcs et à vapeur de mercure qui mettent en jeu la conductibilité de l'air et des vapeurs.

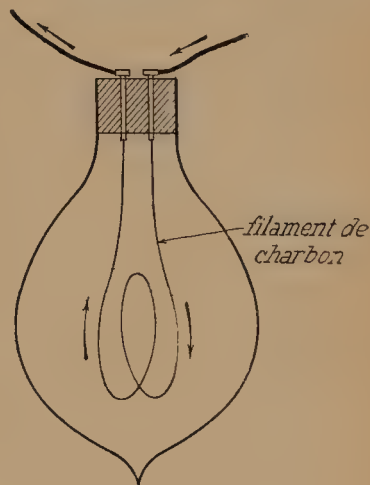


Fig. 145.

131. Lampes à filament de charbon.

1°. — Les filaments de charbon ont de 50 à 150 μ de diamètre, de 15 à 20 centimètres de longueur. On les obtient par la calcination en vase clos de fibres végétales, de coton tressé, de parchemin. Plus ordinairement aujourd'hui on calcine en vase clos des filaments obtenus en comprimant une pâte dans un corps de pompe dont le fond est percé d'un orifice fin.

Comme pâte on utilise de la cellulose dissoute dans une solution de chlorure de zinc, ou du graphite mélangé avec un goudron. Avant la calcination, on donne aux filaments une forme convenable.

2°. — Les filaments carbonisés ne sont pas homogènes. On les égalise par un *nourrissage* dans un carbure d'hydrogène, du gaz d'éclairage, par exemple. Cela consiste à les chauffer au moyen d'un courant sous une cloche pleine de gaz. La température du filament s'élève principalement aux points *faibles*, par conséquent *plus résistants* : le carbure d'hydrogène est décomposé; le charbon se dépose

et augmente le diamètre en ces points. On utilise aussi les carbures liquides dans lesquels on plonge les filaments, et on les amène au rouge. On suit la marche de l'opération en déterminant l'ampérage et le voltage, par suite la résistance du filament (§ 123). La température doit rester relativement basse.

Le nourrissage s'applique avec avantage à la reconstitution de lampes fatiguées par l'usage. On les ouvre, on flambe le dépôt de charbon sur le verre (§ 132), on remplit d'hydrocarbure et l'on porte à l'incandescence.

3°. — Reste à monter le filament sur son support, à fixer le support sur l'ampoule, enfin à vider l'ampoule d'air.

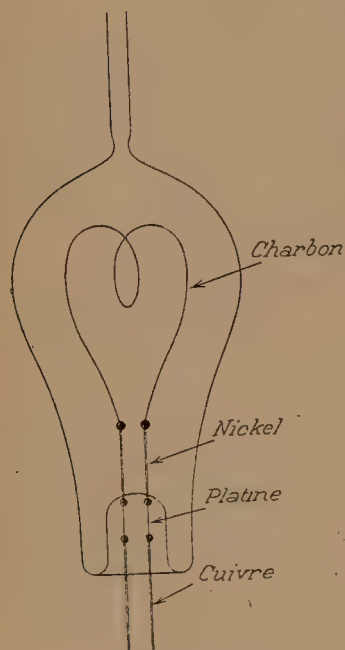


Fig. 146.

Le filament est soudé à deux petites tiges de nickel par le procédé même qui sert au nourrissage. Les extrémités du filament sont placées dans les hélices formées par les extrémités des fils de nickel; le tout est plongé dans du pétrole. On fait passer un courant qui décompose le pétrole et dépose du charbon entre le nickel et le filament. Au surplus, le nickel fond en partie.

Les fils de nickel sont continués par de courts fils de platine, seul métal qu'on puisse souder au verre; la soudure se fait au chalumeau. On essaye de substituer au platine (qui vaut 8 francs le gramme) l'aluminium, le cuivre, l'acier au nickel: nous n'insisterons pas sur la technique. Enfin les fils de platine sont continués par des fils de cuivre.

On introduit les fils de platine dans un tube de verre court qu'on ramollit et qu'on écrase. Le filament est ainsi *monté*.

On introduit le filament monté dans le col de l'ampoule, qui est ouverte aux deux bouts; on ramollit le col et on soude.

On fait le vide quasiment parfait ($0^{\text{mm}},025$ de mercure; voir le cours de *Thermodynamique*), et on ferme à la lampe l'extrémité opposée au filament.

Je n'insiste pas sur les formes diverses de douilles.

132. Emploi des lampes.

Quand la température s'élève, la résistance du carbone diminue approximativement suivant la formule :

$$R = R_0(1 - 0,0003t).$$

La résistance, qui est 100 à 0°, devient 70 à 1000° et 40 à 2000°.

D'où résulte que l'autorégulation est impossible; nous verrons que c'est l'inverse avec les lampes à filaments métalliques.

L'intensité lumineuse diminue peu à peu parce que le carbone, se vaporisant, noircit l'ampoule, et parce que le filament se désagrège.

Plus la tension aux bornes est faible; plus la lampe dure, ce qui était facile à prévoir. Il ne résulte pas de là qu'il y ait avantage à employer des tensions trop basses. En effet, la puissance dépensée est proportionnelle à la quantité de chaleur dégagée dans la lampe, tandis que l'intensité lumineuse, d'abord nulle, puis faible, croît extrêmement vite à partir d'une certaine intensité ou, ce qui revient au même, d'une certaine température. Il faut donc utiliser les lampes avec un voltage ne leur donnant qu'une vie relativement courte (2 ou 300 heures), mais compensant et au delà la brièveté de la vie par son intensité, surtout avec le prix modique actuel des lampes (50 centimes).

Une dépense de 3 watts par bougies (48 watts pour une lampe de 16 bougies) est plus avantageuse qu'une dépense de 4 watts, *malgré que la durée de la lampe diminue considérablement* (de 2000 à 400 heures). Autrement dit, une lampe doit être *poussée*. On conçoit l'intérêt que les compagnies ont à rester à 5 %, par exemple, au-dessous du voltage normal : les lampes n'éclairent pas; pour y voir raisonnablement, on doit les multiplier, c'est-à-dire user de l'énergie en pure perte.

Un traité où la compagnie se réserve de fournir les lampes est un marché de dupes. Elle s'arrangera pour les prendre trop résistantes, de sorte qu'elles ne soient jamais poussées; elles ne s'useront pas, mais on n'y verra rien. Au contraire, si l'on est libre, on choisira des lampes de 105 volts pour un réseau à 110.

Généralement les lampes usent de 3 à 4 watts par bougie; la température du filament est entre 1600 et 1800°.

L'expérience montre que les lampes sont plus économiques (20 %) sous 110 volts que sous 220. Le résultat tient à la difficulté de fabriquer des filaments homogènes et très résistants.

Une lampe de 16 bougies qui prend 4 watts par bougie (64 watts) sous 110 volts, laisse passer une intensité d'environ 0,6 ampères. Sa résistance (à chaud) est donc de 180 ohms environ. Nous savons qu'elle est notablement plus grande à froid.

133. Lampes à filament métallique.

1°. — Nous avons dit que la température du filament de charbon est entre 1600 et 1800°. Si on le pousse au-dessus, sa vie devient éphémère. Or la proportion de radiations visibles croît à mesure que la température s'élève; d'où le désir de substituer au charbon des corps qui fondent à de hautes températures et supportent sans se désagréger des températures peu inférieures.

C'est le cas des métaux suivants :

Platine	Molybdène	Tantale	Zirconium	Osmium	Tungstène
1710°	2000°	2275°	2300°	2500°	3100°

Outre que le platine est très cher, il est de tous ces métaux le plus facilement fusible.

2°. — Au point de vue résistance, l'emploi des métaux présente un avantage et un inconvénient.

Leur résistance croît avec la température; d'où une autorégulation. La quantité de chaleur déversée est par seconde :

$$Q = ri^2 = c^2 : r.$$

r croissant avec la température, un accroissement donné du voltage au voisinage du voltage normal produit des effets décroissants à mesure que la température s'élève. Il n'y a pas intérêt à pousser les lampes à filament métallique, c'est-à-dire à les mettre sous un voltage légèrement supérieur au voltage indiqué.

L'inconvénient est la petitesse relative de la résistance. A diamètre et longueur égales, la résistance du fil de charbon est 4 fois celle d'un fil de tantale, 9 fois celle d'un fil de tungstène, 18 fois celle d'un fil de platine. D'où la nécessité de diamètres de l'ordre de 40 à 50 μ , et simultanément de longueurs qui se chiffrent par dizaines de centimètres.

3°. — Il résulte de là un aspect particulier des lampes à filament métallique. Le filament est supporté par des fils de nickel, symétriquement encastrés dans deux disques de verre séparés par une colonne. La température étant très élevée, on doit utiliser des verres spéciaux pour éviter leur fusion, ou maintenir le filament à une distance suffisante du support.

4°. — Reste à fabriquer le filament et à le mettre en place.

Nous ne pouvons insister. Nous ferons seulement remarquer qu'à cause de leur peu de fusibilité, les métaux en question sont très difficiles à obtenir en lingot, opération préliminaire d'un tréfilage; d'où la nécessité de les rendre métalliques ou d'agglomérer des poudres métalliques sous la forme même du fil qui doit ultérieurement servir.

Par exemple, on agglomère le tétr oxyde de tantale et on le chauffe par un courant, en le maintenant dans le vide. L'oxyde se dissocie; on élève peu à peu la température au rouge blanc : le fil est devenu métallique.

Autre exemple : on recouvre de métal un filament de carbone; en portant le tout à l'incandescence dans un milieu oxydant, on brûle

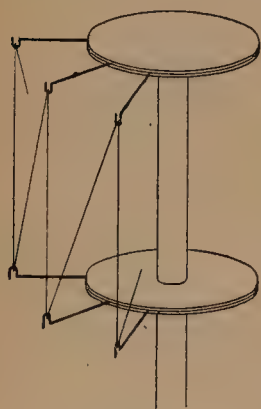


Fig. 147.

le carbone. On obtient le dépôt de métal par électrolyse, ou par des procédés analogues au nourrissage (§ 131) dans des vapeurs du chlorure ou d'un autre sel du métal en question.

5°. — Avec les filaments métalliques, la consommation est de l'ordre d'un watt à un watt et demi par bougie, avec une durée très supérieure à celle des lampes à carbone convenablement poussées. Les lampes sont encore chères et fragiles au choc; cependant, dans quelques années, elles auront complètement supplanté les lampes à filament de carbone.

134. Lampes à filament d'oxyde.

Je décris la lampe Nernst en raison de son emploi dans les laboratoires. Le filament, court et gros, est composé d'un mélange d'oxydes de thorium, d'yttrium, de cérium, de zirconium en proportions diverses. On en fait une pâte avec de l'eau; on obtient des filaments par pression à travers des trous convenables.

La résistance, grande à froid, diminue quand la température s'élève; d'où deux inconvénients : un réglage difficile, la nécessité d'un procédé d'allumage.

La figure 148 montre l'ensemble de l'appareil.

En série avec le bâtonnet d'oxyde est une résistance de réglage en fil de fer très fin, contenue dans une ampoule pleine d'hydrogène. Sa résistance croît quand la température s'élève; elle permet d'obtenir une température stable du bâtonnet, malgré la diminution de la résistance de celui-ci.

La spirale de chauffage est composée d'un fil de platine recouvert de kaolin. Quand on ferme le circuit d'alimentation, le courant passe dans la spirale et la porte au rouge; elle chauffe le bâtonnet, dont la résistance décroît. Quand un courant suffisant traverse le bâtonnet, l'électro fonctionne et met la spirale hors circuit.

La lampe consomme 2 watts par bougie.

Elle est commode dans les laboratoires, le bâtonnet ayant un grand éclat intrinsèque. Il faut couper la spirale de chauffe, qui joue le rôle d'écran, et mettre la lampe en marche *en l'allumant* avec une flamme d'alcool. Malheureusement elle est chère.

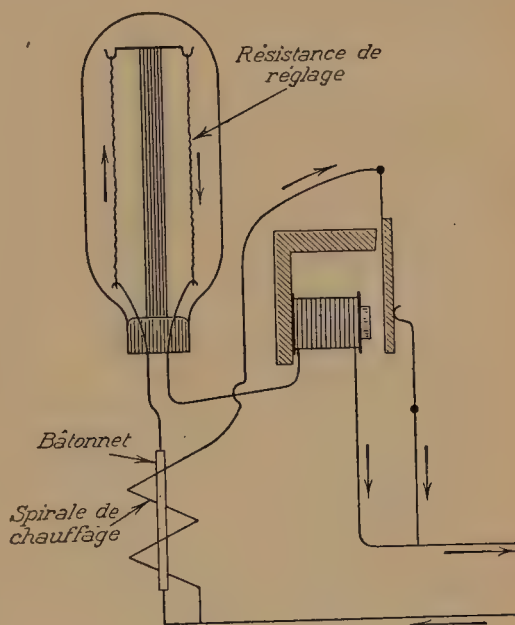


Fig. 148.

CHAPITRE VIII

GALVANOMÈTRES ET ÉLECTRODYNAMOMÈTRES

Obtention d'un champ connu en valeur absolue.

135. Champ d'un circuit circulaire.

1°. — SPECTRE MAGNÉTIQUE.

Le phénomène est de révolution. Par raison de symétrie, les lignes de force sont dans des plans méridiens passant par l'axe du circuit



Fig. 149.

(droite normale à son plan menée par le centre). Nous les aurons donc au moyen du spectre obtenu sur un plan passant par l'axe.

La figure 149 représente la partie centrale de ce spectre; la figure 150 donne le tracé de quelques lignes de force.

Nous verrons plus loin (§ 136) comment on les calcule.

Au voisinage de la trace du circuit, les lignes de force sont cir-

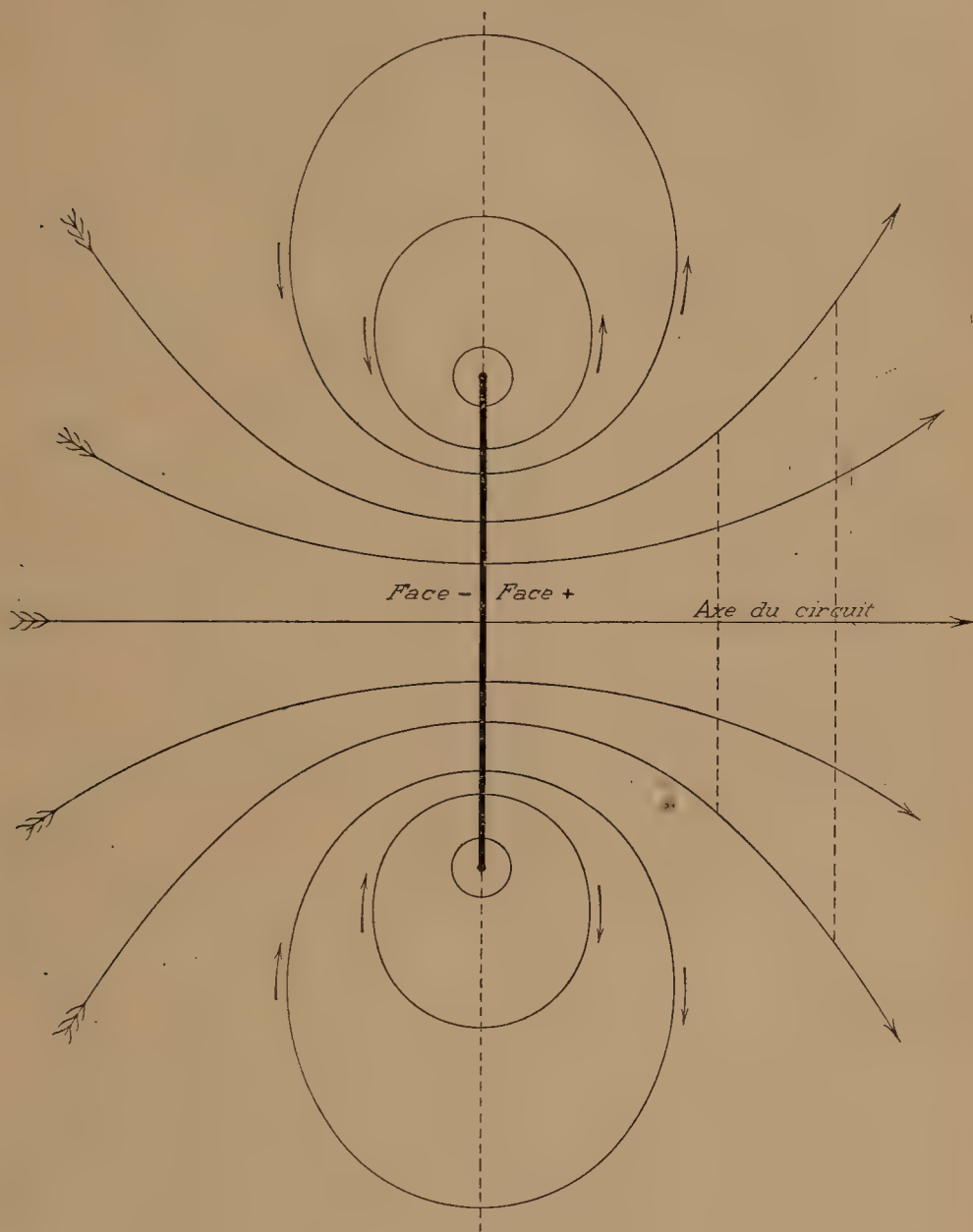


Fig. 150.

culaires et admettent cette trace comme centre; l'axe est une ligne de force.

2°. — CALCUL DU CHAMP EN UN POINT DE L'AXE.

La valeur du champ sur l'axe est très facile à obtenir.

Soit R le rayon du cercle, r la distance AO du point A où nous calculons la force électromagnétique, au centre O du cercle.

Nous avons montré, aux §§ 23 et 67, que la force en A est dirigée suivant l'axe et égale à :

$$F = \frac{2\pi\Phi}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{F_0}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_0 = \frac{2\pi\Phi}{R};$$

F_0 est la valeur de la force électromagnétique quand le point A coïncide avec le centre O du cercle.

Nous allons retrouver la même expression en partant de la loi de Biot et Savart.

Considérons un élément de courant $\overline{CD} = ds$, pris n'importe où sur le cercle; par raison de symétrie, son action au point A est la même, quelle que soit sa position.

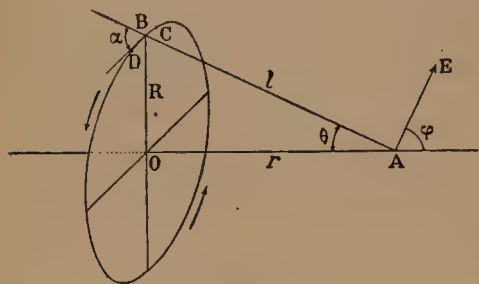


Fig. 151.

Pour faciliter la construction de la figure, prenons-le normal au tableau.

La distance de l'élément ds au point A est l ; l'angle α que fait avec l'élément la droite AB qui va de l'élément au point A, est droit.

L'action de l'élément est dirigée suivant AE, normale à la droite AB; elle est dans le tableau et a pour grandeur :

$$\Phi \frac{ds}{l^2} = \frac{I}{10} \frac{ds}{l^2}.$$

Par raison de symétrie, la résultante est dirigée suivant OA. Tous les éléments donnant des actions semblablement dirigées, la résultante a pour expression :

$$F = \frac{2\pi R\Phi}{l^2} \cos \varphi = \frac{2\pi R\Phi}{l^2} \sin \theta = \frac{2\pi R^2\Phi}{l^3} = \frac{2\pi\Phi}{R \left[1 + \frac{r^2}{R^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est la formule donnée plus haut.

3°. — Reprenons l'expression :

$$F = \frac{2}{l^3} (\pi R^2 \Phi);$$

le facteur $\pi R^2 \Phi$ représente par définition le moment magnétique total du feuillet. La formule peut donc s'écrire :

$$F = \frac{2M}{l^3} = \frac{2M}{r^3},$$

si r est assez grand. Nous retombons sur la formule qui donne le champ d'un aimant dans la première position de Gauss (§ 57) : à grande distance, le feuillet plan peut être assimilé à un aimant,

dirigé normalement au feuillet et de même moment magnétique (§ 71).

4°. — DISCUSSION DE LA FORMULE.

Quand on se déplace sur l'axe OA de l'infini du côté de la face négative à l'infini du côté de la face positive, la force électromagnétique, dirigée suivant l'axe, conserve toujours le même sens. Nulle

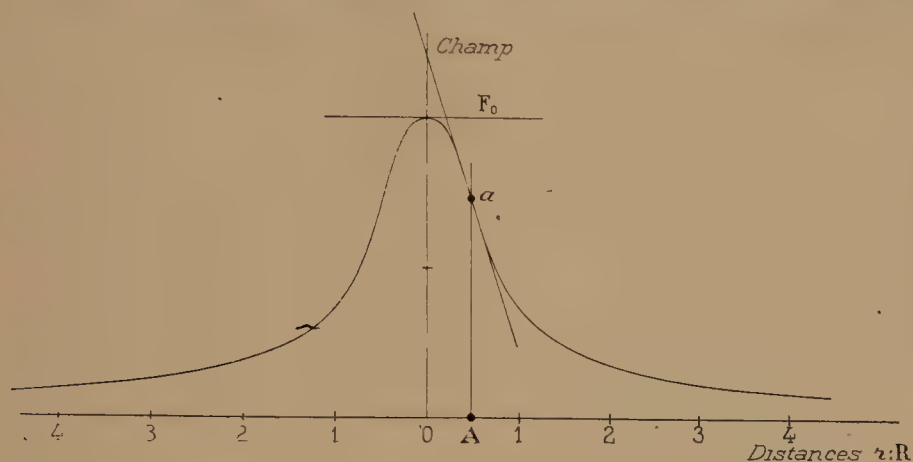


Fig. 152.

à l'infini, elle passe par un maximum pour $r=0$; ses valeurs sont égales pour des distances égales de part et d'autre du cercle. La décroissance est très rapide quand on s'éloigne du centre du cercle (fig. 152).

Prenons la force F_0 pour unité; posons $r:R=u$.

On trouve (en millièmes) :

$u=0$	0,5	1	2	3	4	5
$F=1000$	716	354	192	125	89	68

136. Tracé général des lignes de force du champ d'une spire circulaire.

Le problème est résolu au § 101. Par raison de symétrie, les lignes de force sont planes et situées dans les méridiens du phénomène. Le flux envoyé par une spire circulaire de rayon A dans une spire de même axe, de rayon y , et qui est à la distance x , est :

$$W = 4\pi \sqrt{Ay} \left[\left(k - \frac{2}{k} \right) F + \frac{2E}{k} \right];$$

le module k des intégrales elliptiques complètes F et E est :

$$k = 2\sqrt{Ay} : [x^2 + (A + y)^2].$$

Faisons varier simultanément x et y de manière que W reste constant (fig. 150) : tous les points de la circonférence du cercle

récepteur (dont le rayon varie; la figure 150 montre en traits interrompus deux positions de la trace) décrivent des lignes de force. Elles ont donc pour équation :

$$\sqrt{y} \left[\left(k - \frac{2}{k} \right) F + \frac{2E}{k} \right] = \text{Constante.}$$

On peut calculer en un point quelconque de l'espace la valeur du champ produit par un cercle. En effet, quand y devient $y + dy$, le flux reçu augmente de dW , la surface réceptrice augmente de $2\pi y dy$. L'intensité du champ est :

$$\frac{1}{2\pi y} \frac{dW}{dy},$$

quotient de l'augmentation du flux par l'augmentation de la surface réceptrice.

Nous avons dit, au § 102, comment on généralise pour une bobine.

137. Dispositif de Gaugain, d'Helmholtz.

1°. — Une bobine à spires circulaires produit évidemment un champ magnétique de révolution autour de son axe (normale au plan des spires passant par leur centre de symétrie); nous sommes donc dans le cas des §§ 35 et 52.

Appliquons le corollaire énoncé à la fin du § 52; cherchons pour quelle valeur de $u = r : R$, la courbe représentative du champ sur l'axe (fig. 152) possède un point d'inflexion.

On trouve aisément : $u = 0,5$.

Si donc nous voulons constituer avec une spire circulaire une *boussole des tangentes* (§ 58; appareil tel que l'intensité du champ, par suite l'intensité du courant, soient données par la tangente de la déviation, après composition avec un champ uniforme rectangulaire dont l'aiguille ne soit pas infiniment petite), nous devons placer le centre de l'aiguille sur l'axe à une distance de la spire égale à la moitié du rayon.

2°. — Construisant une boussole des tangentes pour la mesure de l'intensité absolue des courants, Gaugain proposa cette solution. Poussant plus loin les conséquences du théorème, il utilisa des enroulements *coniques*; le sommet du cône est au centre de l'aiguille (fig. 153, à gauche). En effet, la condition $u = 0,5$ est satisfaite pour toutes les spires enroulées sur un cône de demi-angle au sommet :

$$\varphi = \arctg 2 = 63^{\circ}26'.$$

Pour réaliser la symétrie, il proposa même l'emploi de deux enroulements coniques identiques placés de part et d'autre de l'aiguille : c'était beaucoup de complication.

Helmholtz rendit la construction pratique en substituant aux enroulements coniques des bobines ordinaires à gorges rectangulaires.

Nous avons vu, au § 102, qu'une bobine à gorge de section carrée est équivalente à une spire unique dont le rayon est un peu supérieur au rayon moyen de la gorge. Soit $2E=2H$, les côtés du carré; la correction $4H^2:24A^2$, est très faible.

Soit, par exemple, $2H=1\text{cm}$, $A=10\text{cm}$, la correction est 1:2400.

Aujourd'hui où, grâce à la méthode de Poggendorff, on utilise de très petites aiguilles, il est plus que suffisant d'utiliser comme boussoles des tangentes, deux bobines égales à gorge de section

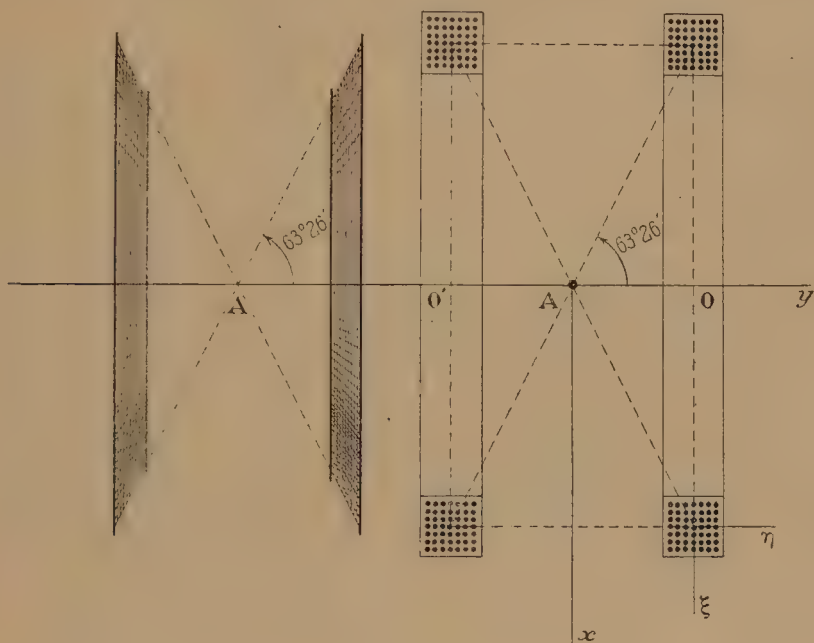


Fig. 153.

carrée, dont la distance des spires moyennes soit égale au rayon de ces spires. Le centre de l'aiguille est placé symétriquement par rapport aux bobines.

La figure 154 montre les lignes de force du système de bobines d'Helmholtz.

3°. — Nous pouvons nous rendre compte autrement de l'avantage de deux bobines ou de deux spires, égales et parcourues dans le même sens par le même courant.

Donnons leur même axe; plaçons-les d'abord très loin l'une de l'autre : par raison de symétrie, le champ possède des maximums en O et O' (fig. 153) et un minimum en A.

Accolons-les : le champ possède un maximum en A.

Donc il existe nécessairement une distance des spires ou des bobines pour laquelle le champ est à peu près uniforme sur toute la longueur OO'. Calculons-la approximativement.

Écrivons que le champ est le même en O, en O' et en A.
La condition est évidemment :

$$1 + \frac{1}{(1 + 4u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

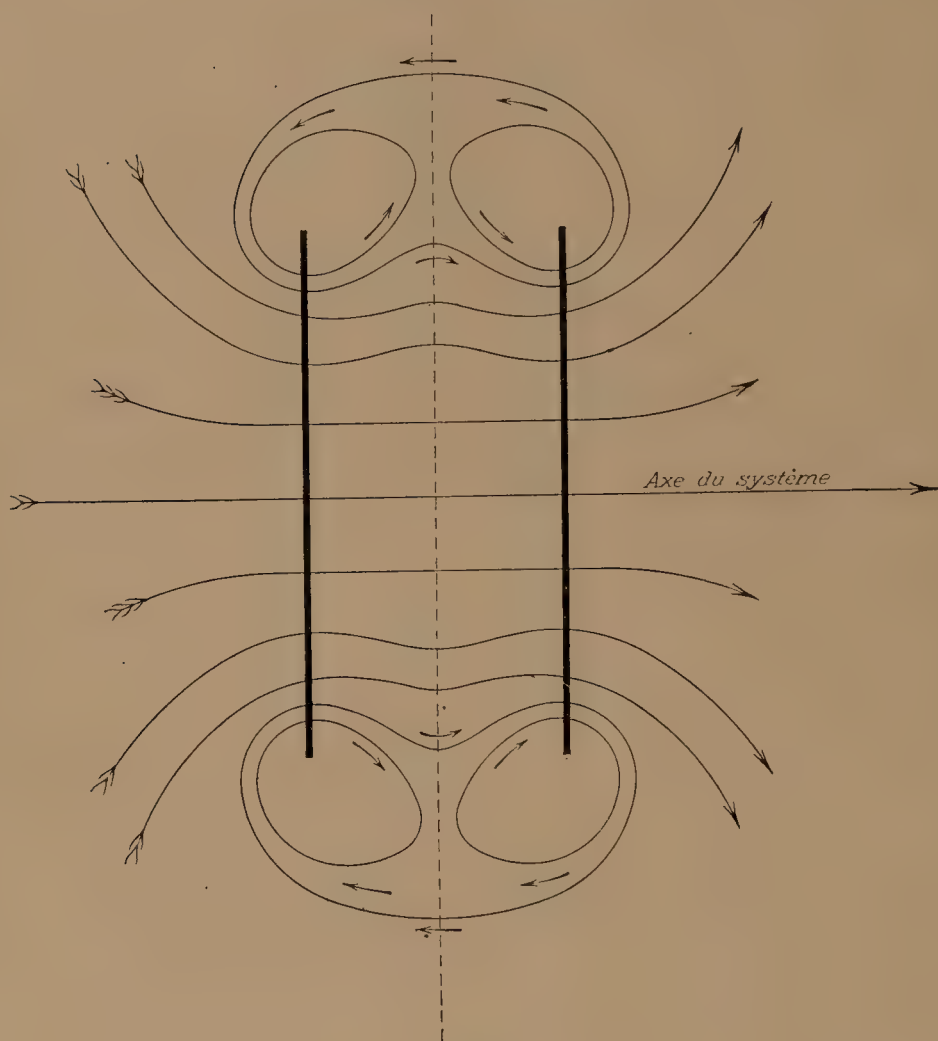


Fig. 154.

On trouve $u=0,6$. Pour $u=0,5$, le champ en A est un peu plus grand que le champ en O et O'. La condition de Gaugain réalise déjà le maximum du champ en A.

138. Cas d'un grand nombre de courants circulaires, égaux, de même axe et également espacés.

Ce cas est intéressant comme introduction à la théorie des solénoïdes.

La figure 155 représente le spectre dans un plan passant par l'axe.

a) Il existe des lignes de force qui se ferment autour de *chaque* conducteur ; résultat évident *a priori*, puisque la force devenant très grande au voisinage du conducteur, tout se passe assez près de lui comme s'il était seul dans l'espace.

b) Il existe des lignes de force qui se ferment autour de *tous* les conducteurs. C'est en particulier vrai pour la ligne axiale : elle se ferme à l'infini. Les lignes de cette catégorie sont plus ondulées, moins rectilignes à mesure qu'on s'éloigne de l'axe. Donc, même pour

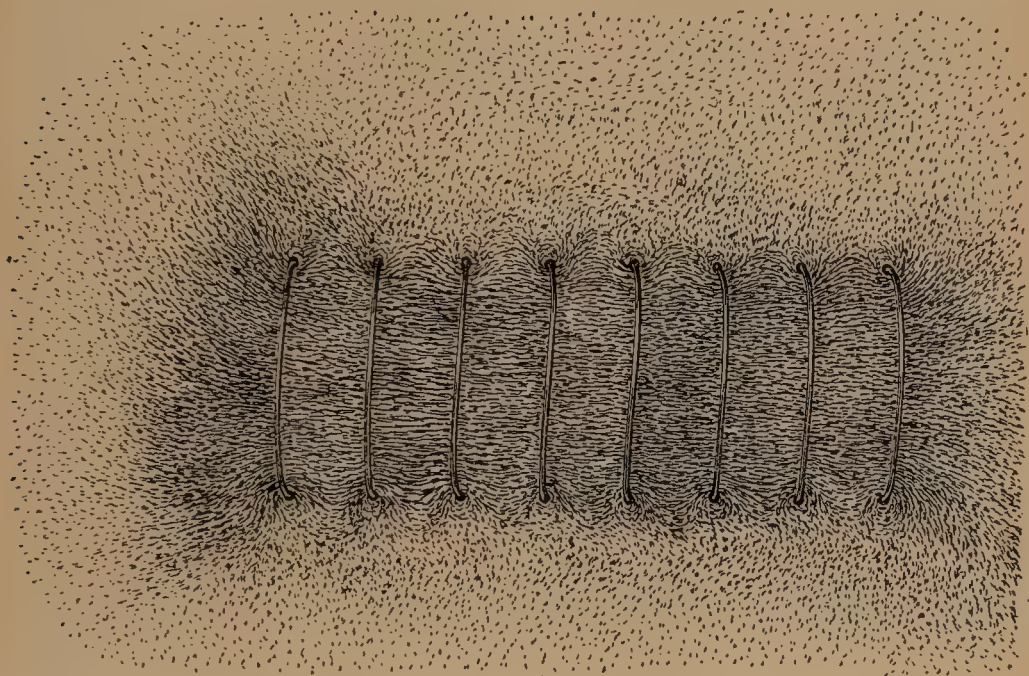


Fig. 155.

un système infiniment long, le champ sur une parallèle à l'axe varie périodiquement quand on se déplace sur cette parallèle. Les maximums sont dans le plan des cercles successifs, où les lignes de force de la seconde catégorie sont serrées par les lignes de la première. Les minimums sont à égales distances des maximums consécutifs.

c) Enfin, pour un système de longueur finie, il existe des lignes de force qui se ferment autour de *plusieurs conducteurs*. C'est très difficile à voir sur le spectre, mais c'est théoriquement nécessaire.

Le spectre figuré est obtenu avec huit cercles que nous appellerons 1, 2, 3, ..., 8. Certaines lignes se ferment autour des cercles 4, 5. D'autres, extérieures aux précédentes, se ferment autour des cercles 3, 4, 5, 6. D'autres, plus extérieures, se ferment autour des cercles 2, 3, 4, 5, 6, 7. Enfin celles qui se ferment autour de tous les cercles constituent notre seconde catégorie.

Cela revient à dire que le champ moyen *maximum* (celui qui correspond au plan des cercles) n'est pas constant pour tous les cercles : il diminue à mesure qu'on s'approche des cercles terminaux.

Cela revient encore à dire que le système des lignes de force, entre les traces de deux cercles, n'est pas symétrique par rapport au plan qui est parallèle à ces cercles et situé à égales distances de ces cercles.

Ces remarques sont essentielles pour comprendre ce qui arrive dans un *solénoïde*, c'est-à-dire dans le cas où les cercles sont quasiment au contact. On représente parfois les lignes de force comme un faisceau de baguettes enfilé dans un tube de carton : c'est absolument inexact. Un certain nombre de baguettes sort à travers la surface *latérale* du solénoïde, par conséquent entre les spires consécutives.

139. Solénoïdes.

1°. — Une bobine cylindrique *régulièrement* enroulée est constituée par un certain nombre de couches formant séparément des hélices régulières. Les hélices des diverses couches n'ont pas nécessairement le même pas.

Chaque couche contient donc, par centimètre de génératrice, un nombre bien déterminé de spires, le même tout le long de la génératrice. Le champ à l'intérieur du solénoïde *assez loin des bases* est uniforme et égal (*en gauss*) à :

$$H = 0,4 \cdot \pi n i,$$

où i est le courant en ampères, n le nombre *total* de spires par centimètre. Le champ est indépendant de la section droite qui peut avoir une forme et une aire quelconques.

Démontrons ces propositions fondamentales.

2°. — Une couche de spires cylindrique et régulière est assimilable, d'après l'hypothèse générale du § 70, à une série de feuillets de même puissance, disposés parallèlement les uns aux autres, à la même distance les uns des autres.

Si les feuillets sont assez rapprochés, nous pouvons remplacer cette distribution fictive *essentiellement discontinue*, et d'une étude difficile, par une distribution fictive *continue* équivalente, grâce à la propriété fondamentale du vecteur induction d'avoir un flux conservatif, c'est-à-dire de rester continu même dans le passage à travers les feuillets.

Le seul paramètre qui soit déterminé est la puissance $\Phi = I$ du feuillet, produit de l'intensité d'aimantation par l'épaisseur (toutes quantités fictives) :

$$\Phi = I = \mathfrak{J}e.$$

Rien ne nous empêche de donner à ces feuillets (qui sont de pur

raisonnement) l'épaisseur que nous voulons, en particulier celle qui met leurs faces en contact les unes avec les autres. Comme il existe n feuillets par centimètre, cela revient à leur supposer une épaisseur $e = 1/n$, par suite à imposer une aimantation fictive :

$$\mathfrak{J} = nI, \quad (I \text{ en C.G.S.})$$

Nous démontrons ainsi que les actions magnétiques du solénoïde (à une distance des fils de l'ordre de leurs distances mutuelles) sont équivalentes à celle d'un volume égal de matière polarisée dont l'aimantation est solénoïdale (il n'y a de magnétisme libre que sur les bases, les faces opposées des feuillets se neutralisant, § 45) et dont l'intensité d'aimantation est :

$$\mathfrak{J} = 0,4 \cdot ni.$$

i est exprimé en ampères, \mathfrak{J} en C.G.S. absolus.

Si on est très près des spires, le raisonnement ne vaut plus : au voisinage immédiat des spires, les lignes de force magnétiques sont des courbes fermées autour de chacune d'elles (§ 138).

Notre raisonnement suppose des courants *plans*, de forme quelconque, tous identiques, disposés parallèlement les uns aux autres. En fait, nous avons les spires d'une hélice. Mais il résulte de la loi de Biot et Savart (§ 74), et il est confirmé par l'expérience, qu'on peut toujours remplacer un élément de circuit par ses composantes. Le circuit hélicoïdal revient donc aux circuits circulaires sur lesquels nous avons raisonné, plus un circuit rectiligne parallèle aux génératrices et traversé par le même courant. Sans insister sur la position exacte que doit occuper ce courant rectiligne complémentaire, il est bien évident que son effet sera généralement négligeable.

140. Champ du solénoïde.

1°. — Il n'y a de magnétisme libre que sur les sections droites terminales du volume polarisé équivalant au solénoïde ; donc le vecteur induction se compose :

en tout point à l'intérieur du volume, d'un vecteur constant :

$$4\pi\mathfrak{J} = 4\pi n\Phi = 4\pi nI,$$

dirigé parallèlement aux génératrices du cylindre et dans le sens AB (de la plaque — à la plaque +) ;

en tout point de l'espace, du vecteur force magnétique provenant des plaques terminales.

Les vecteurs que nous venons de distinguer ne sont généralement pas parallèles.

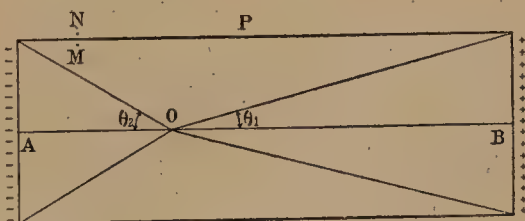


Fig. 156.

2°. — CHAMP INTÉRIEUR DANS UN SOLÉNOÏDE DE SECTION CIRCULAIRE.

Calculons le vecteur force pour un solénoïde de section circulaire et pour un point O situé sur l'axe AB.

L'action d'une plaque circulaire de densité uniforme σ sur un point de son axe est (§ 34) :

$$2\pi\sigma(1 - \cos \theta).$$

L'induction a pour valeur :

$$\begin{aligned} 4\pi n\Phi - 2\pi n\Phi[2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2] &= 2\pi n\Phi(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \\ &= 4\pi n\Phi \left[1 - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4} \right], \end{aligned}$$

si θ_1 et θ_2 sont assez petits.

On obtient donc avec un solénoïde un champ très sensiblement uniforme, pourvu que la bobine soit allongée par rapport aux dimensions de sa section droite, et que le point O soit éloigné des bases. Par exemple, pour un diamètre de 10^{cm}, pour une longueur de 50^{cm}, et pour le point O pris au milieu de l'axe, θ_1 et θ_2 sont égaux et donnés par la formule :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{5}{25} = 0,2.$$

L'angle θ , qui est de 11°18', vaut en radians un peu moins de 0,2. On a donc :

$$\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4} = \frac{\theta_1^2}{2} = 0,02.$$

Le champ est : $H = 4\pi n\Phi$, à 2 % près.

Dans une expérience précise, la correction n'est pas négligeable ; mais elle ne présente aucune difficulté.

3°. — MOMENT MAGNÉTIQUE.

Il est celui d'un aimant solénoïdal, de même volume V et de même intensité d'aimantation, soit en C.G.S. :

$$M = \mathfrak{J}V = SlnI = SNI;$$

n est le nombre de spires par centimètre, l la longueur, N le nombre total de spires. Le solénoïde tend à s'orienter dans un champ uniforme comme le ferait un aimant de moment M .

4°. — CHAMP MAGNÉTIQUE EXTÉRIEUR.

Le champ extérieur est uniquement dû à l'action des plaques terminales ; pour un point suffisamment éloigné, il est identique au champ d'un doublet de longueur l et de masses $\pm SnI$.

Entre deux points voisins M et N, l'un dans le solénoïde, l'autre à l'extérieur (fig. 156), existe pour la force électromagnétique une discontinuité représentée par le vecteur $4\pi\mathfrak{J} = 4\pi n\Phi$. En effet, la force magnétique due aux plaques terminales est sensiblement la même ; mais à l'extérieur, la force électromagnétique est identique à

la force magnétique, à l'intérieur elle est égale à la résultante de cette force et du vecteur $4\pi\vec{j}$. Donc la force électromagnétique est sensiblement nulle en tout point *P extérieur*, situé dans le plan d'une section droite où la force électromagnétique dans l'intérieur du solénoïde est constante et égale à $4\pi n\Phi$.

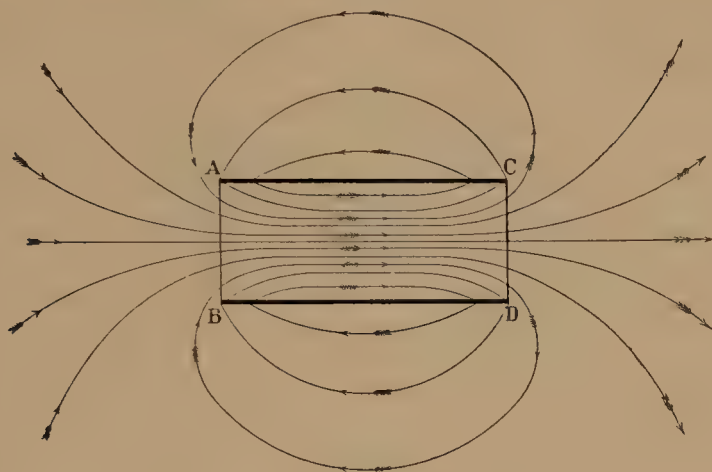


Fig. 157.

La figure 157 représente quelques lignes de force du champ (lignes d'induction de la matière polarisée équivalente); la figure 158 montre

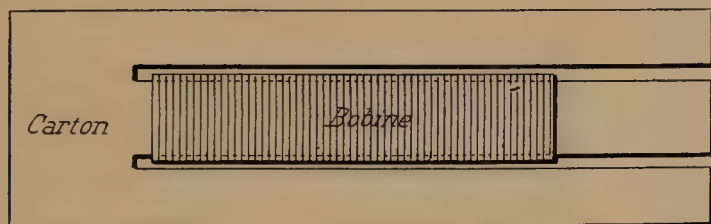


Fig. 158.

la disposition du carton qui permet de déterminer le spectre. On le saupoudre de limaille, on l'introduit dans le solénoïde, on fait passer le courant, on frappe de petits coups sur le carton pour donner de la mobilité à la limaille; enfin on supprime le courant et on retire le carton.

5°. — La figure 159 aidera le lecteur à se rendre compte de l'allure des lignes de force. Elle suppose le solénoïde assez long pour qu'au voisinage d'une des plaques terminales, l'autre n'intervienne pas sensiblement.

Le plan de la plaque terminale est, en dehors de la plaque, une surface de force; si la section droite du solénoïde est circulaire, les lignes de force y sont radiales.

En deux points A_1 et A_2 symétriques par rapport à la plaque terminale, la force magnétique est la même. Au point A_1 , il faut la composer avec le vecteur $4\pi\sigma$.

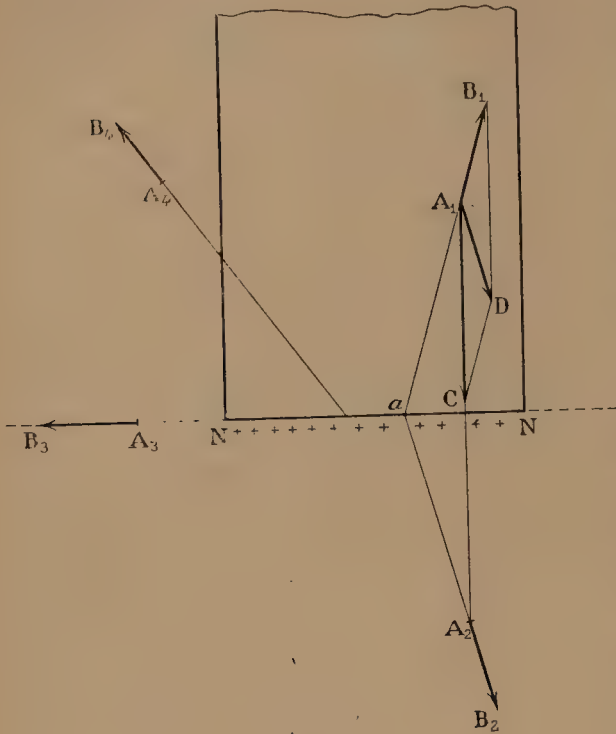


Fig. 159.

On voit immédiatement que la force fait extérieurement un angle vif avec la surface du solénoïde (point A_4).

141. Force magnétomotrice.

Le raisonnement très simple suivant permet de retrouver la formule fondamentale.

Traçons une trajectoire fermée composée de deux droites parallèles de longueur l , situées l'une dans le solénoïde, l'autre hors du solénoïde; elles

sont raccordées par deux petites courbes quelconques. Quand un pôle décrit entièrement une fois cette trajectoire, le travail total accompli par les forces magnétiques (au signe près) est *rigoureusement* :

$$4\pi NI = 4\pi n l I.$$

Posons *négligeable* le champ extérieur au solénoïde; la force moyenne sur la trajectoire intérieure de longueur l est alors :

$$H = 4\pi n l I; l = 4\pi n l,$$

formule à retrouver.

On appelle *force magnétomotrice* la quantité :

$4\pi NI$ (où I est mesuré en C.G.S.),

$0,4\pi n l I$ (où I est mesuré en ampères).

Comme nous venons de le montrer, elle mesure le travail des forces électromagnétiques exercées sur l'unité de masse magnétique, quand cette masse décrit une trajectoire fermée faisant un tour complet autour de chacune des spires. C'est par conséquent aussi le travail effectué par une masse qui partirait de l'infini sur l'axe d'un solénoïde, suivrait cet axe, traverserait le solénoïde et s'en irait jusqu'à l'infini de l'autre côté du solénoïde.

La force magnétomotrice n'a pas les dimensions d'une force magné-

tique ou d'une induction; ses dimensions sont celles du produit d'une force magnétique par une longueur.

On l'exprime en *gilberts*.

Nous la retrouverons dans les *Applications* (seconde partie de ce Cours).

Distributions particulières de courants.

142. Nappe plane indéfinie.

1°. — Par hypothèse, les courants circulent dans une plaque conductrice mince, plane et indéfinie. Leurs trajectoires sont parallèles. La densité ε est constante : c'est par définition l'intensité par unité de longueur de la section de la plaque menée normalement aux courants.

Pratiquement on peut réaliser une telle nappe avec une bande rectangulaire mince de cuivre dont on met les extrémités à des potentiels différents. Mais le procédé est mauvais pour la raison suivante qui est très générale (§ 75).

Dans les laboratoires, on a le plus souvent à sa disposition une force électromotrice de l'ordre de 125 volts; mais il n'est guère possible d'utiliser des courants supérieurs à 20 ampères sans risquer de fondre les plombs. Si donc la lame est large de 10 centimètres, on dispose d'une densité ε de 2 ampères par centimètre.

Au contraire, formons avec du fil isolé une bobine rectangulaire plate et de grandes dimensions (solénoïde d'une seule couche). Nous pouvons aisément mettre 10 fils par centimètre, supportant 20 ampères, au moins pendant un instant : la densité est de 200 ampères par centimètre. Au voisinage du milieu d'un grand côté du cadre, seule intervient la nappe plane voisine; elle se comporte pour les points peu éloignés comme une nappe plane indéfinie.

2°. — Montrons que le champ est uniforme, parallèle à la nappe, perpendiculaire à la direction des courants et d'intensité $2\pi\varepsilon$ (par conséquent, indépendant de la distance à la nappe).

Cherchons l'action sur un point O situé à la distance r du plan de la nappe. Coupons par un plan passant par le point O et perpendiculaire à la direction des courants; soit CAB l'intersection. Décomposons la nappe en courants de largeur dx situés à une distance $\overline{AD} = x$, du pied de la perpendiculaire OA. Soit $\angle AOD = \theta$.

Le courant qui passe dans la bande dx a une intensité εdx .

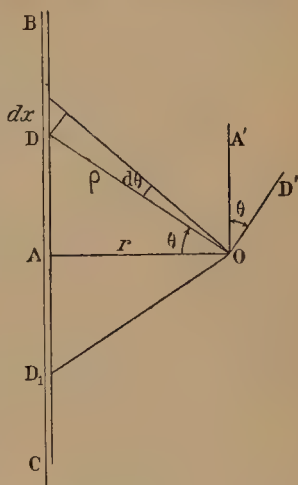


Fig. 160.

Le champ qu'il crée en O est dirigé suivant la direction OD' normale à OD. Son intensité est (§ 75) :

$$2\varepsilon dx : \rho.$$

Sa composante suivant OA' est :

$$\frac{2\varepsilon dx}{\rho} \cos \theta = 2\varepsilon d\theta.$$

L'élément dx , situé en D_1 symétrique de D par rapport à A, donne un champ symétrique de OD' par rapport à OA'. La résultante est donc un champ parallèle à la nappe de courant, perpendiculaire à la direction des courants, dirigé suivant la règle d'Ampère, indépendant de la distance r et égal à :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\varepsilon d\theta = 2\pi\varepsilon.$$

143. Nappe mince cylindrique circulaire.

Les courants sont parallèles aux génératrices d'un cylindre circulaire; la densité est uniforme.

1^o. — CHAMP EN UN POINT INTÉRIEUR.

Montrons qu'il est nul. La démonstration est analogue à celle du § 32, figure 26.

Par un point A quelconque, menons normalement à la section droite deux plans déterminant un angle $d\theta$; ils séparent dans la nappe deux courants rectilignes, indéfinis, d'intensités εdS , $\varepsilon dS'$. Les éléments dS et dS' font le même angle α avec la droite qui les joint. Les courants produisent au point A des champs normaux à la droite qui les joint, par suite de même direction, mais de sens contraires. Ces champs ont respectivement pour intensités :

$$2\varepsilon \frac{dS}{r} = \frac{2\varepsilon d\theta}{\sin \alpha}, \quad 2\varepsilon \frac{dS'}{r'} = \frac{2\varepsilon d\theta}{\sin \alpha};$$

leurs actions se détruisent donc. Comme on peut décomposer le cylindre, sans rien en négliger, en groupes de deux éléments dont les actions s'équilibrent, le champ total est nul.

2^o. — CHAMP EN UN POINT EXTÉRIEUR.

Il est le même que si tout le courant $I = 2\pi R\varepsilon$ passait par l'axe de la nappe :

$$H = \frac{4\pi R\varepsilon}{r}.$$

R est le rayon de la nappe, r la distance du point considéré à l'axe.

En effet, par raison de symétrie, les lignes de force sont des cercles situés dans un plan normal au cylindre circulaire, et concen-

triques à ce cylindre. Le travail du pôle unité pour un tour complet est $4\pi I$ (§ 78). On a donc :

$$2\pi rH = 4\pi I, \quad H = \frac{2I}{r} = \frac{4\pi R\epsilon}{r}.$$

3°. — CHAMP EN UN POINT D'UN CONDUCTEUR CYLINDRIQUE CIRCULAIRE DANS LA SECTION DROITE DUQUEL LE COURANT EST UNIFORMÉMENT RÉPARTI.

En un point à la distance r de l'axe, agit seulement le courant qui se trouve dans le cylindre de rayon r ; son intensité totale est $i = \pi r^2 \sigma$, où σ est la densité par unité d'aire de la section droite. Le champ a pour expression :

$$H = \frac{2i}{r} = 2\pi r\sigma.$$

Soit I l'intensité totale :

$$I = \pi R^2 \sigma, \quad H = 2I \frac{r}{R^2}.$$

Ainsi le champ croît suivant la droite OA jusqu'à la traversée de la

nappe, après quoi il diminue suivant l'hyperbole AB (fig. 161). Le lecteur comparera ces théorèmes avec ceux que nous avons trouvés pour les actions en raison inverse du carré de la distance (§ 33 et *Mécanique rationnelle*, § 251).

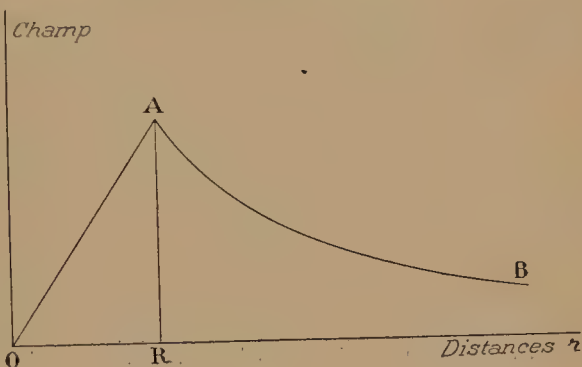


Fig. 161.

144. Cas général des courants parallèles; potentiel logarithmique¹.

Les cas ci-dessus étudiés rentrent dans la question plus générale des actions réciproques des courants parallèles.

On y introduit avantageusement le *potentiel* dit *logarithmique*.

1°. — Nous savons (§ 88) que l'action de deux courants rectilignes, indéfinis, d'intensités I et I' , est dirigée suivant la perpendiculaire commune et vaut par unité de longueur :

$$F = 0,02 \cdot \frac{II'}{r};$$

la force est exprimée en dynes, les courants en ampères.

Il revient au même de dire que la force dépend du potentiel :

$$V = -0,02 \cdot II' \cdot \log r.$$

En effet on a bien :
$$F = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

¹ A passer dans une première lecture.

Généralisons. Représentons les sections droites des deux conducteurs A et B qui agissent l'un sur l'autre; les aires de leurs sections sont A et B.

Posons que les densités σ et σ' des courants sont respectivement uniformes.

L'action réciproque dépend du potentiel (fig. 162).

$$V = -0,02 \cdot \sigma \sigma' \iiint \log r \cdot dA \cdot dB,$$

où dA , dB , sont les éléments d'aire.

La distance $R(A, B)$ qui satisfait à l'équation :

$$AB \cdot \log R(A, B) = \iiint \log r \cdot dA \cdot dB,$$

est par définition la *moyenne distance géométrique entre les aires A et B*.

Il revient au même de calculer la *moyenne distance* ou l'intégrale. Le théorème suivant simplifie la besogne.

2°. — Soit à calculer la moyenne distance entre l'aire formée par A et B et l'aire d'un troisième conducteur C. On a par définition :

$$\begin{aligned} (A + B)C \cdot \log R(A + B, C) &= \iint \log r \cdot dA \cdot dC + \iint \log r \cdot dB \cdot dC \\ &= AC \cdot \log R(A, C) + BC \cdot \log R(B, C); \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$(A + B) \cdot \log R(A + B, C) = A \cdot \log R(A, C) + B \cdot \log R(B, C);$$

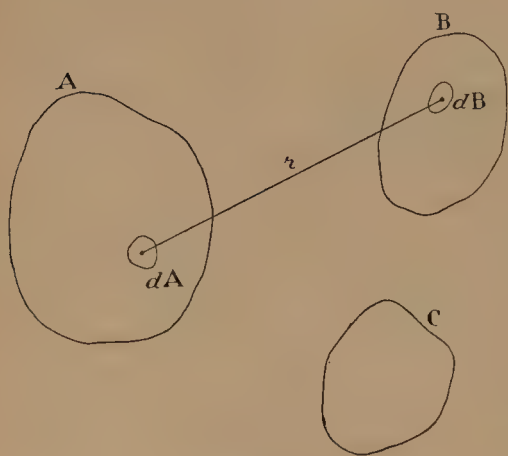


Fig. 162.

qui donne l'action d'un système de courants quand on en a calculé l'action des parties.

3°. — Au fond, ce que nous désirons connaître est le champ créé en un point B par un système de courants rectilignes, parallèles et indéfinis, traversant l'aire A avec une densité constante σ .

Posons que l'aire B se réduit à un seul élément; soit connue la moyenne distance entre l'aire A et le point B. Nous connaissons donc l'action du

système des courants A sur le courant B, ce qui permet de calculer immédiatement le champ produit au point B par l'aire A.

En effet, après avoir dérivé le potentiel, il nous suffira de porter le vecteur *champ* à angle droit du vecteur que le potentiel définit,

puisque en vertu de la loi de Laplace, la force électromagnétique est à angle droit sur le champ magnétique.

Ainsi, dans l'emploi de la moyenne distance géométrique pour calculer le champ créé au point B par un système de courants parallèles, on prend comme intermédiaire la force électromagnétique exercée par ce système sur un courant parallèle passant par le point B.

4°. — Énonçons, dans le langage qui vient d'être défini, les propositions ci-dessus démontrées.

La moyenne distance entre un anneau mince et un point *intérieur* quelconque est égale au rayon de l'anneau. Nous savons en effet que le champ en tout point intérieur est nul : d'où résulte que le potentiel est constant. La moyenne distance est donc indépendante du point considéré : nous pouvons la calculer pour le centre pour lequel le résultat est immédiat.

Si l'action est nulle en tout point *intérieur* pour un anneau *mince*, elle est nulle pour un anneau quelconque. Donc la moyenne distance est indépendante du point considéré : nous la pouvons encore calculer pour le centre. Soit a et b les rayons de l'anneau. On a par définition :

$$\pi(a^2 - b^2) \cdot \log R = \int_b^a 2\pi r dr \cdot \log r = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \log r - \frac{r^2}{4} \right]_b^a,$$

$$\log R = \frac{a^2 \log a - b^2 \log b}{a^2 - b^2} - \frac{1}{2}.$$

La moyenne distance entre un anneau mince, un anneau quelconque, enfin un conducteur cylindrique circulaire plein et un point *extérieur*, est égale à la distance de ce point au centre ; cela résulte de ce que nous avons démontré que l'action d'un courant de densité uniforme passant dans ces conducteurs est la même que s'il était concentré sur l'axe.

La moyenne distance entre deux cercles extérieurs l'un à l'autre est égale à la distance des centres de ces cercles.

145. Nappe de courant sphérique.

1°. — Sur une sphère de rayon R , nous enroulons un fil régulier en spires parallèles équidistantes ; par suite, le nombre de spires compris entre deux petits cercles est proportionnel à la distance des plans de ces cercles. D'après l'assimilation des courants et des feuillets, nous obtenons l'équivalent d'une sphère uniformément polarisée (§ 139) :

Soit $1 : n$ la distance (en centimètres) des plans de deux spires consécutives, I l'intensité du courant ; l'intensité d'aimantation est :

$$\mathfrak{A} = nI.$$

Le calcul du champ produit à l'intérieur de la sphère se ramène donc au calcul du vecteur induction dans une certaine masse polarisée. Nous connaissons l'intensité d'aimantation; calculons la force magnétique due au magnétisme libre (§ 42).

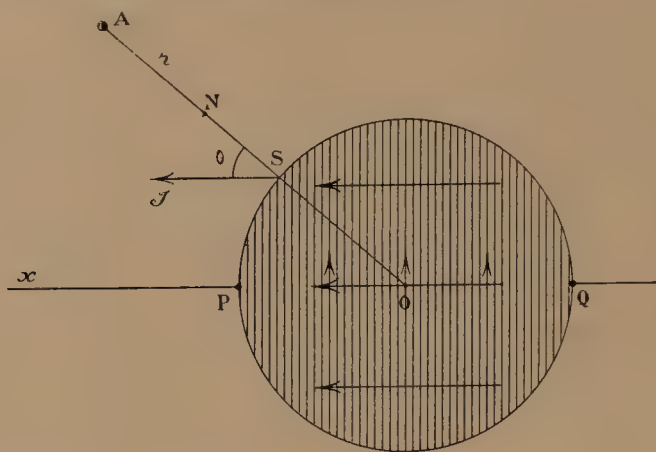


Fig. 163.

En vertu du théorème général (§ 41), à la surface de la sphère existe une densité superficielle :

$$\sigma = J \cos \theta = nI \cos \theta.$$

2°. — Je prie le lecteur de se pénétrer du raisonnement suivant, qui est le type des raisonnements sur ces matières. Je pose la solution et je montre qu'elle convient, profitant du théorème général que la solution est unique; par suite, que si l'on en connaît une, on connaît la bonne. Quant à la découverte de cette solution, ce fut une pure affaire de tâtonnement. Nous profitons du tâtonnement antérieur, ce qui n'est pas une raison pour avoir l'air de croire qu'il y a autre chose à faire qu'une vérification.

Je dis que le champ dépend : hors la sphère du potentiel V , dans la sphère du potentiel V' :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 nI \frac{\cos \theta}{r^2},$$

$$V' = \frac{4}{3} \pi nI r \cos \theta.$$

Remarquons d'abord que ces potentiels satisfont à l'équation $\Delta V = 0$; ils représentent en effet le potentiel d'un doublet (§ 46) et celui d'un champ uniforme.

Puisque la sphère est uniformément aimantée, son moment magnétique est le produit du volume par l'intensité d'aimantation :

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 J = \frac{4}{3} \pi R^3 nI.$$

Mais le potentiel dû à un petit aimant est pour tout point suffisamment éloigné :

$$V = \frac{M \cos \theta}{r^2}.$$

Nous sommes donc assurés que le potentiel V convient au loin.

Cherchons les composantes radiales F et F' des forces dues aux potentiels V et V' au voisinage du point S de la sphère ($r=R$); elles sont comptées positivement vers l'extérieur :

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{8}{3} \pi n I \cos \theta,$$

$$F' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = -\frac{4}{3} \pi n I \cos \theta.$$

Mais en vertu du théorème général du paragraphe 36, la discontinuité doit être due à la couche de magnétisme libre. Effectivement nous avons :

$$F - F' = 4\pi n I \cos \theta = 4\pi \sigma.$$

Donc les potentiels sont correctement choisis, puisqu'ils conviennent aux deux seules conditions à satisfaire.

3°. — La force magnétique dans l'intérieur de la sphère est :

$$-\frac{\partial V'}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \pi n I \cdot r \cos \theta \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \pi n I \cdot x \right] = -\frac{4}{3} \pi n I.$$

L'induction est :

$$\text{force magnétique} + 4\pi \mathcal{J} = -\frac{4}{3} \pi n I + 4\pi n I = \frac{8}{3} \pi n I.$$

Tel est le champ magnétique produit par le système de courants.

On obtient donc ainsi un champ parfaitement uniforme; malheureusement l'enroulement de la bobine sur la sphère, sans être impossible, n'est guère commode.

146. Théorèmes généraux sur les nappes de courant¹.

Avec raison Maxwell attache une grande importance aux nappes de courant. Il traite le problème général par une méthode dont le lecteur nous saura gré de donner l'essentiel; nous lui conseillons de retrouver les résultats précédents.

1°. — FONCTION DE COURANT.

On appelle *nappe de courant* une couche infiniment mince de matière conductrice, limitée par des milieux isolants.

Le courant est amené et emmené par des électrodes; comme cas particulier, il circule dans la nappe sans en sortir.

Nous donnerons aux faces de la surface les signes $+$ et $-$.

Prenons un point origine O sur la nappe. Joignons-le à un point

¹ A passer dans une première lecture.

quelconque P par une courbe tracée tout entière sur la nappe. On appelle *fonction de courant* φ , l'intensité totale à travers une courbe *quelconque* OP tracée tout entière sur la nappe et joignant O et P; φ est une fonction de la position du point P. La seule condition pour que φ caractérise le point P, est que la courbe OP, en se déformant, ne rencontre pas d'électrode. Nous exprimons purement et simplement ainsi l'incompressibilité de l'électricité.

Par convention, nous plaçant au point O sur la surface, nous définissons φ positivement ou négativement, suivant que le courant total (somme algébrique des courants relatifs à chaque élément de OP) passe de notre droite à notre gauche, ou inversement.

Pour fixer les idées, supposons la nappe plane et mettons le point O à l'origine des coordonnées cartésiennes. Déplaçons le point P de dx sur une parallèle à Ox, puis de dy sur une parallèle à Oy. Nous vérifions immédiatement que les composantes u, v , du courant parallèlement aux axes ont l'expression (aux signes près) :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

On a bien :
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

2°. — LIGNES DE COURANT, LIGNES ÉQUIPOTENTIELLES.

Soit s la longueur de la ligne OP tracée sur une nappe de forme quelconque. Amenons l'extrémité P en P'; soit $\overline{PP'} = ds$.

La quantité d'électricité qui, dans l'unité de temps, traverse l'élément ds dans le sens choisi, est :

$$dq = \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds.$$

Les lignes de courant ont donc l'équation :

$$dq = 0, \quad \varphi = \text{Constante}.$$

Soit V le potentiel électrique défini par la loi d'Ohm et que nous verrons dû à l'existence de masses électriques libres (troisième partie de ce Cours). Les lignes équipotentielles ont pour équation :

$$V = \text{Constante}.$$

DANS LE CAS OU IL N'EXISTE PAS DE FORCES ÉLECTROMOTRICES D'INDUCTION, les deux systèmes de lignes : $\varphi = \text{Constante}$, $V = \text{Constante}$, sont orthogonales (§ 217).

3°. — ACTION MAGNÉTIQUE D'UNE NAPPE DE COURANT SANS ÉLECTRODES.

Nous allons montrer que la nappe équivaut à un feuillet de même forme dont la puissance en chaque point est égale à φ ; le potentiel en un point extérieur quelconque est, par suite (§ 40) :

$$V = \iint \frac{\varphi \cos \theta}{r^2} dS.$$

Les lignes de courant sont des courbes fermées, ne se coupant pas les unes les autres; toutefois une ligne de courant peut se couper elle-même.

Traçons ces lignes : commençons par celle pour laquelle φ a la plus grande valeur; finissons par celle pour laquelle φ a la moindre valeur. Nous divisons la nappe en circuits auxquels nous pouvons substituer des feuillets. La forme de ces feuillets est arbitraire; donnons-leur la forme même de la surface et faisons-les coïncider avec la partie de la nappe pour laquelle φ a des valeurs plus grandes que celles qui correspondent aux circuits considérés.

Le théorème suit immédiatement de cette décomposition en une infinité de feuillets superposés en partie, de puissances $d\varphi$ et limités aux lignes : $\varphi = \text{Constante}$.

Si la nappe est plane, son action est assimilable à celle de deux couches de densité superficielles σ séparées par l'épaisseur e de la couche, avec la condition $\sigma e = \varphi$.

Nous avons affaire à deux couches égales et de signes contraires qui sur un point quelconque agissent différemment, en raison de la différence des distances quand on passe de l'une à l'autre.

Pour avoir le potentiel dû à la double couche, nous pouvons donc calculer le potentiel d'une couche de densité φ :

$$\Phi = \iint \frac{\varphi}{r} dS = \iint \frac{\varphi}{r} dx dy,$$

et prendre la dérivée suivant la normale à la nappe plane :

$$V = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

On comparera à la remarque du § 67.

A la surface même, le paragraphe 66 nous apprend que le potentiel est :

$$\pm 2\pi\varphi.$$

En un point quelconque, la composante magnétique Z normale à la

nappe plane est :

$$Z = - \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Oscillations d'un mobile avec frottement.

Dans un grand nombre de questions, on est ramené à l'étude des oscillations d'un mobile, soumis à une force proportionnelle à l'écart à partir de la position d'équilibre, et soumis à un frottement proportionnel à la vitesse. La question est traitée avec détail aux §§ 409 et suivants de notre *Mécanique rationnelle* : résumons les résultats.

Nous supposons qu'il s'agit d'une oscillation autour d'un axe.

Pour fixer les idées, imaginons un corps suspendu par un fil métallique et oscillant dans un plan horizontal.

147. Mouvements périodiques.

L'équation différentielle du mouvement est :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

I est le moment d'inertie.

C est la constante de torsion du fil de suspension; plus généralement, c'est le coefficient de θ dans le développement en série du couple Γ en fonction du déplacement angulaire :

$$\Gamma = f(\theta) = C\theta + D\theta^2 + E\theta^3 + \dots$$

On a $\Gamma = 0$, pour $\theta = 0$, parce que les θ sont comptés à partir de la position d'équilibre.

Quand le mouvement est périodique ($4CI - f^2 > 0$), l'intégrale *sinusoïdale amortie* est :

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t,$$

avec les conditions :

$$\omega = \frac{2\pi}{T'}, \quad T' = 2\pi \sqrt{I : \left[C - \frac{f^2}{4I} \right]}, \quad \lambda = \frac{f}{2I}.$$

On vérifiera d'abord qu'à moins d'un amortissement énorme, la période T' avec amortissement diffère extrêmement peu de la période T sans amortissement :

$$T = 2\pi \sqrt{I : C}.$$

Les amplitudes varient en progression géométrique.

Soient θ_1 et θ_2 deux amplitudes consécutives du même côté de la position d'équilibre. On a :

$$\Theta_1 : \Theta_2 = \exp(\lambda T') = 1 + \lambda T',$$

si l'amortissement est petit. Nous poserons :

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2} = \lambda T' = \delta, \quad \delta = \frac{f T'}{2I} = \frac{f T}{2I},$$

puisque T et T' diffèrent peu. On vérifiera la relation :

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2}.$$

148. Mouvements apériodiques.

Si le frottement est suffisant ($4CI - f^2 < 0$), le mouvement est *apériodique*. L'intégrale est :

$$\theta = e^{-\lambda t} (\Lambda e^{-kt} + B e^{+kt}),$$

avec les conditions :

$$\lambda = \frac{f}{2I}, \quad k = \lambda \sqrt{1 - \frac{4CI}{f^2}} = \frac{1}{2I} \sqrt{f^2 - 4CI}.$$

Les constantes d'intégration sont A et B.

Écarté de sa position d'équilibre, le mobile n'y revient qu'asymptotiquement; en réalité, il y revient après un temps d'autant plus grand que λ est plus grand.

149. Frottement critique.

1°. — Le cas intermédiaire correspond à l'égalité : $f^2 = 4CI$.

$$f^2 = 4CI, \quad \lambda = \sqrt{C:I}.$$

L'intégrale est :

$$\theta = e^{-\lambda t} (A + Bt).$$

On dit que le frottement est critique.

2°. — Écrivons que, pour $t=0$, la vitesse est nulle et l'élongation θ_0 :

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} (1 + \lambda t).$$

Le mobile arrive à une fraction déterminée de son élongation initiale en un temps t donné par la relation : $\lambda t = \text{Constante}$.

3°. — Pour $t=0$, écrivons que l'élongation est nulle ($\theta=0$) et que la vitesse angulaire est u :

$$\theta = ut \cdot e^{-\lambda t} = ut \exp\left(-t\sqrt{\frac{C}{I}}\right).$$

Cherchons la valeur maxima de θ . On trouve la condition :

$$\lambda t = 1, \quad \theta = \frac{u}{e\lambda} = \frac{u}{e} \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Nous appliquerons cette formule à la théorie du galvanomètre balistique (§ 221).

Rappelons qu'on a : $e = 2,178\,28$.

Galvanomètres, ampèremètres et voltmètres à aimant mobile.

150. Généralités. Galvanomètre ordinaire.

1°. — Le mot *galvanomètre* est généralement employé pour désigner un appareil très sensible, mais qui n'est pas gradué en valeurs absolues.

On l'utilise le plus souvent comme appareil de zéro (*galvanoscope*).

Les *ampèremètres* et *voltmètres* ne diffèrent en rien comme principe ; la résistance d'un voltmètre est généralement plus grande que celle d'un ampèremètre.

Le voltmètre est destiné à mesurer la différence de potentiel entre deux points A et B, au moyen de l'intensité i du courant qui passe dans une résistance r invariable (celle de l'appareil) :

$$ir = A - B.$$

Pour que l'introduction du voltmètre en dérivation ne modifie pas sensiblement la différence de potentiel $A - B$ à mesurer, il faut que la résistance r soit suffisante.

Quant à la valeur absolue de cette résistance, elle dépend essentiellement des conditions d'emploi.

Par exemple, pour mesurer la force électromotrice d'un accumulateur dont la résistance est d'un centième d'ohm, le voltmètre peut sans erreur sensible n'avoir qu'une dizaine d'ohms de résistance.

2°. — Le galvanomètre à aimant mobile est en principe un magnétomètre (§ 58). Le champ $H' = Gi$ dû au courant, fixe en direction et proportionnel à l'intensité du courant, se compose avec un champ *directeur* H , fixe en grandeur et direction. D'où résulte un champ H_1 de direction variable, parallèlement auquel se place l'axe magnétique d'une aiguille. Elle est mobile autour d'un axe de rotation normal au plan des deux champs H' et H .

Dans le cas où cette dernière condition n'est pas réalisée, seules interviennent les composantes des champs H' et H normales à l'axe de rotation. Dans le cas ordinaire, l'axe de rotation de l'aiguille est vertical ; on s'arrange de manière que le champ Gi soit horizontal : seule intervient la composante horizontale H du champ fixe (champ terrestre plus ou moins modifié par des aimants).

Pour que le calcul de l'appareil soit possible, l'aiguille mobile doit être assez courte pour être considérée comme tout entière dans un champ uniforme.

3°. — Le galvanomètre ordinaire se compose d'une bobine dont le plan des spires est vertical, créant sur son axe un champ horizontal sensiblement uniforme. Le système d'un miroir vertical et d'un petit rectangle d'acier aimanté (servant d'aiguille et collé sur le miroir) est suspendu par un fil de cocon. On s'arrange de manière que, dans sa position d'équilibre, l'axe horizontal de l'aimant soit parallèle au plan des spires ; autrement dit, on modifie le champ *directeur* H jusqu'à ce qu'il soit parallèle à ce plan dont l'azimut est déterminé par les conditions d'installation dans le laboratoire.

Le fil de cocon devant être assez long et parfaitement libre (sauf au point d'attache supérieur), la bobine est formée de deux bobines qu'un procédé quelconque permet de fixer sur une plaque de laiton dans laquelle est ménagé un trou central et un canal vertical.

Le courant passant dans la bobine crée un champ $H' = Gi$, proportionnel à l'intensité i .

Le champ directeur étant très sensiblement normal au champ H' , la déviation α de l'aiguille est donnée par la formule :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Gi}{H};$$

G est la constante du galvanomètre. Le moment magnétique de l'aimant n'intervient pas; l'appareil ne diminue pas de précision du

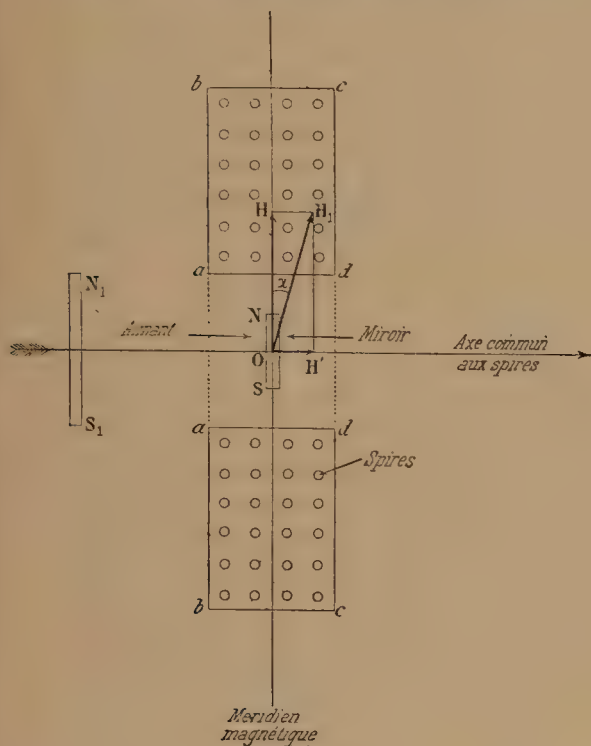


Fig. 164.

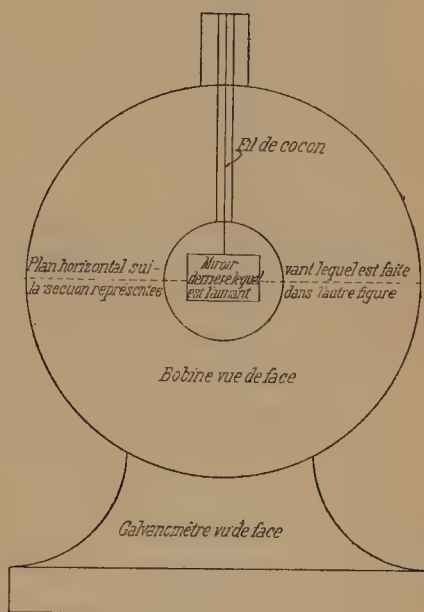


Fig. 165.

fait qu'on réduit les dimensions de l'aimant, autant qu'on peut considérer le fil de cocon comme sans torsion.

4°. — RÉGLAGE.

Le réglage consiste à amener la composante horizontale H du champ directeur dans le plan des spires et à diminuer convenablement son intensité : ce qu'on obtient au moyen d'aimants placés, autant que possible, dans le plan horizontal passant par l'aiguille. Ils ne doivent jamais être fixés à l'appareil, pour la raison évidente qu'en y touchant on secoue celui-ci. On doit toujours utiliser deux aimants : l'un gros et long placé assez loin, avec lequel on commence le réglage; l'autre plus petit, avec lequel on l'achève.

Pour déterminer si l'orientation du champ H est convenable, on regarde où se fait l'image du spot par réflexion sur le miroir. Au

surplus, la condition que le champ directeur soit dans le plan des spires n'a pas besoin d'être satisfaite avec une grande précision.

Pour savoir dans quel sens varie l'intensité de ce champ, on détermine la durée d'oscillation de l'aiguille : le champ directeur diminue quand la période augmente (§ 51).

La difficulté du réglage pour de grandes sensibilités vient de ce que deux champs égaux, à *peu près opposés*, ont une résultante H dont la direction varie de 180° pour le moindre déplacement angulaire de l'un des champs (§ 58). Or nous voulons annuler à peu près la composante horizontale du champ terrestre ; il s'agit de créer un second champ qui est précisément dans les conditions susdites. Si le galvanomètre est réglé pour une grande sensibilité, le moindre déplacement de l'aimant compensateur retournera le miroir ; les variations de la déclinaison ont une très grande influence sur son azimut. D'où la nécessité d'utiliser deux aimants ; le plus petit sert à graduer les variations dernières du champ qu'on oppose au champ terrestre.

5°. — AMORTISSEMENT ARTIFICIEL.

Quand le miroir oscille, il met un temps long à revenir au repos : il faut donc l'arrêter. On y parvient aisément au moyen d'un petit solénoïde disposé de manière à créer un champ parallèle à l'axe de la bobine. Un élément Leclanché et un interrupteur (formé d'une lame de clinquant buttant contre la tête d'une vis de cuivre), sont dans le circuit du solénoïde. On ferme le circuit quand l'aiguille se déplace dans le sens inverse de celui où le champ du solénoïde l'enverrait. Ce champ tend donc à l'arrêter.

On peut encore dire que le champ auxiliaire modifie périodiquement la direction du champ directeur, par suite la position d'équilibre, en sens inverse du sens de déplacement actuel de l'aiguille. Tout se passe comme pour un pendule simple dont on tient l'extrémité supérieure dans la main ; on le lance ou on l'arrête par des déplacements *horizontaux* périodiques de cette extrémité.

6°. — APPAREIL TRANSPORTABLE.

On peut à la rigueur rendre l'appareil transportable, en collant l'aiguille et le miroir au milieu d'un fil de cocon fixé à l'une de ses extrémités, tendu à l'autre par un ressort. Pour que le galvanomètre serve dans les essais à la mer, *on le cuirasse* ; on l'entoure d'une enveloppe épaisse de fer doux : il est ainsi protégé contre les champs *extérieurs*. On crée le champ directeur à l'aide d'un petit aimant *intérieur*. La cuirasse est percée des trous nécessaires à l'observation.

151. Profil optimum de la section méridienne de la bobine.

1°. — La bobine d'un galvanomètre est limitée par une surface

de révolution obtenue par rotation autour de l'axe de cette bobine d'une aire rectangulaire (fig. 166 à gauche).

Le problème est de savoir si ce profil rectangulaire est optimum; plus généralement, quelle surface de révolution forment les spires dont *l'effet utile* est le même.

Sous cette forme, le problème est indéterminé; la solution particulière proposée par Lord Kelvin n'a qu'une valeur relative.

Une spire produit en son centre un champ en raison inverse de son rayon. Il existe donc deux inconvénients à l'augmentation du rayon: on diminue le champ pour un courant d'intensité donnée; on diminue le courant pour une force électromotrice donnée, puisque augmentant la longueur du fil, on augmente la résistance. Mais tandis que le premier inconvénient est absolu, le second dépend essentiellement de la résistance totale du circuit sur lequel se trouve le galvanomètre.

Si la résistance du circuit est grande, l'accroissement de la résistance du galvanomètre n'a pas d'importance; si elle est petite, la sensibilité est en raison inverse de la résistance du galvanomètre. On prévoit donc que, suivant le résultat particulier à atteindre, la disposition théorique des spires variera.

Précisons par le calcul.

2°. — Il s'agit d'obtenir au point A et dans la direction AO le plus grand effet utile avec une spire circulaire d'axe AO et de projection BB' (fig. 167).

Soit $R = \overline{OB}$ le rayon de la spire; soit $r = \overline{OA}$ sa distance au point A.

Le champ en A est (§ 135) :

$$F = i \cdot 2\pi R \cdot \frac{\sin \theta}{l^2} = i \cdot \frac{2\pi \sin^2 \theta}{l}.$$

Si le courant est donné, le problème est résolu par le faisceau de courbes :

$$l = k \sin^2 \theta.$$

Toutes les spires (telles que BB') qui sont sur la surface de révo-

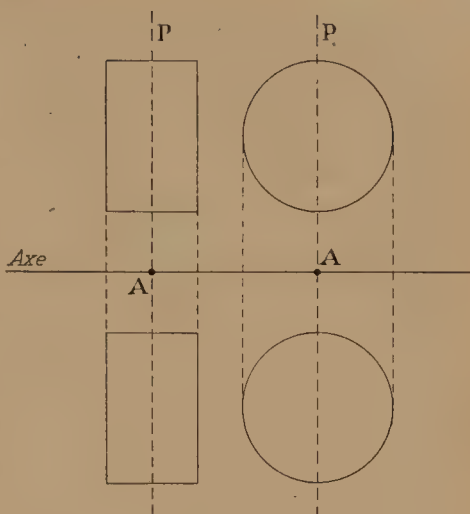


Fig. 166.

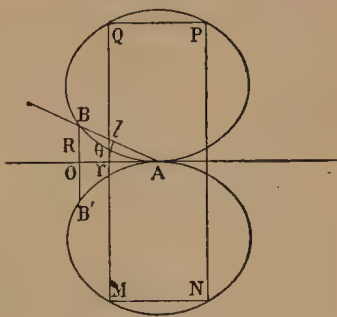


Fig. 167.

lution, admettant l'une de ces courbes comme méridienne, produisent exactement le même champ pour un courant donné.

Au contraire, si nous nous donnons la chute de potentiel par spire (chute proportionnelle à Ri), le problème est résolu pour le faisceau de courbes :

$$l^2 = k \sin \theta.$$

Toutes les spires (telles que BB') qui sont sur la surface de révolution, admettant l'une de ces courbes comme méridienne, produisent exactement le même champ pour une chute de potentiel par spire donnée.

Dans les deux cas, les spires extérieures à la surface considérée sont moins avantageuses, les spires intérieures le sont davantage. Il y a donc intérêt à prendre l'une des surfaces comme limite de la bobine; elle est complètement déterminée quand on donne le volume du fil qu'on veut employer.

La solution ordinairement indiquée est la seconde (Lord Kelvin); elle n'a pas plus de valeur absolue que la première.

Au reste, comme pour la commodité du bobinage il est nécessaire que les joues des bobines soient planes, on choisit une épaisseur MN (distance des joues) qui soit au diamètre MQ dans un rapport tel que l'on ne s'éloigne pas trop de l'une des surfaces considérées.

A mesure qu'augmente la quantité de fil à loger, on utilise comme profil une courbe caractérisée par une constante k de plus en plus grande. C'est dire que les portions extérieures de la bobine jouent un rôle de plus en plus effacé.

Les calculs précédents, pédagogiquement intéressants, ont donc pour but pratique de montrer que ni les bobines très plates, ni les bobines très longues ne réalisent les meilleures conditions.

En dehors de cela, ils n'indiquent rien de précis.

152. Sensibilité des galvanomètres.

1°. — On appelle *sensibilité* S d'un appareil qui donne l'indication θ pour une grandeur i de la cause, le quotient :

$$S = d\theta : di.$$

La constante G d'un galvanomètre est telle que le courant i produise le champ Gi .

Soit H le champ directeur; la déviation supposée petite est :

$$\theta = \frac{Gi}{H}; \quad \text{d'où} \quad S = \frac{G}{H}.$$

Il serait incommode d'exprimer la sensibilité en valeur absolue; on l'énonce de manière que son interprétation soit immédiate.

On suppose que l'échelle (sur laquelle on observe par la méthode du miroir) est divisée en millimètres et située à un mètre.

Parfois on convient d'appeler sensibilité le nombre de millimètres dont le spot se déplace pour un courant de 10^{-6} ampères, ou, ce qui revient au même, la résistance en mégohms qu'il faut mettre en circuit pour obtenir une déviation d'un millimètre avec une force électromotrice d'un volt.

Cette définition est suffisante dans le cas d'un appareil donné employé dans des conditions déterminées; mais elle ne représente pas le mérite de l'appareil. En effet, on peut modifier la sensibilité en faisant varier le champ directeur; d'autre part, pour une sensibilité donnée, il est préférable d'avoir un galvanomètre peu résistant.

D'où la définition suivante plus complète :

La sensibilité est mesurée par le déplacement du spot, exprimé en millimètres, lu sur une échelle à un mètre, pour un courant d'un microampère, la résistance étant d'un ohm, quand la période d'oscillation de l'aiguille est d'une seconde.

Soient R la résistance du galvanomètre, T sa période, d (en millimètres) la déviation pour un courant de i microampères.

La sensibilité a pour expression :

$$S = \frac{d}{iR} \frac{1}{T^2}.$$

On a donné plusieurs autres définitions aussi arbitraires que les précédentes.

2°. — Les constructeurs ont la mauvaise habitude de choisir les miroirs trop petits et trop minces. Trop minces, le collage avec l'aimant (un peu de cire fondue avec un fil de fer) les déforme; trop petits, ils donnent de mauvaises images. Il n'est cependant pas nécessaire d'être sorcier pour comprendre que l'obtention de bonnes images multiplie la sensibilité pratique au moins par 10.

Avec de mauvaises images, on a le demi-millimètre sur une échelle à cinquante centimètres; avec de bonnes, par l'emploi d'un miroir plan et d'une lunette d'observation, on a facilement le dixième de millimètre sur une échelle à un mètre. Mais l'habitude est de parler de millimètres à un mètre, sans se soucier de la fraction de millimètre dont on peut répondre. Un physicien qui se respecte, n'emploiera jamais la méthode de l'échelle transparente et du miroir concave : ce n'est pas la peine d'utiliser un appareil aussi sensible et aussi délicat que celui dont nous parlons, pour ne pas profiter de sa sensibilité.

Si on fait des expériences grossières, qu'on prenne un ampèremètre d'automobile : ça suffit.

153. Equipages astatiques.

1°. — L'équipage astatique se compose de deux aimants, parallèles et de sens inverses, aussi identiques que possible, reliés par

une tige rigide et soutenus par un fil de cocon. La figure 168 représente la plaque de laiton verticale de part et d'autre de laquelle sont fixées les bobines, généralement au nombre de quatre.

Si le champ terrestre est uniforme et les aimants identiques, l'équipage est en équilibre indifférent (*astatique*). Mais il n'en est jamais ainsi; le système a donc une position d'équilibre bien déterminée. Nous rencontrons une première difficulté de réglage. Cette direction d'équilibre n'est généralement pas celle qui convient à l'installation du laboratoire; pour la changer, il faut modifier le champ terrestre *et de la même manière là où se trouvent les deux*

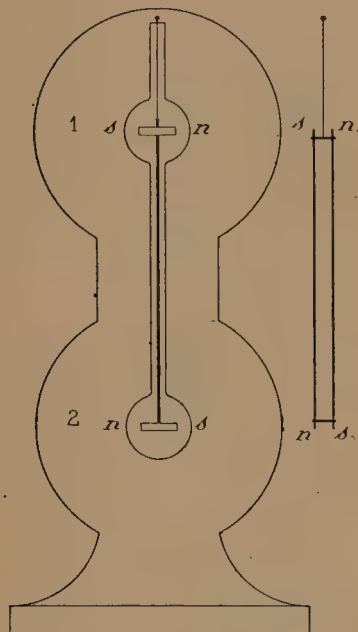


Fig. 168.

aimants. Or, s'il est facile d'obtenir un champ uniforme dans un petit volume, c'est pratiquement impossible dans un espace ayant pour dimensions la distance des aimants; il faudrait des aimants assez gros pour qu'on les puisse mettre loin. Quant à disposer l'aimant symétriquement par rapport au plan horizontal également distant des aimants, ça fait très bien sur le papier.

Si le champ directeur n'est pas modifié de la même manière sur les aimants, ce n'est pas la peine de s'embarrasser d'un système astatique.

Au surplus, il est si difficile d'avoir de petits aimants identiques, qu'on a proposé d'employer deux longs aimants parallèles disposés comme l'indique la partie droite de la figure 168. Mais c'est un perfectionnement illusoire : on a déjà

bien assez de mal à éviter que la tige rigide de la première disposition touche quelque part, pour adopter un équipage qui réclame un logement beaucoup plus volumineux.

2°. — Nous avons dit que les bobines vont quatre par quatre, deux pour chaque aimant.

En effet, supposons l'emploi de bobines seulement autour de l'aimant 1. Soit α la déviation du champ 1. La déviation de l'équipage est $\alpha : 2$; car la déviation du champ 2 est pratiquement nulle (strictement elle est de sens contraire); donc l'aimant 2 subit un couple le ramenant à sa position d'équilibre, que doit équilibrer le couple écartant 1 de sa position d'équilibre.

D'où la nécessité de produire sur le champ 2 la même déviation α ; par suite, l'emploi de quatre bobines. D'où accroissement du prix de l'appareil et de la résistance mise en circuit. Il faut, en effet, que les bobines soient en série; en parallèle, elles ne seraient traversées que

par la moitié du courant : toutes choses égales d'ailleurs, la déviation serait $\alpha : 2$. En tout cas, la disposition en parallèle vaut mieux que l'emploi d'un seul groupe de bobines, puisque la résistance est alors diminuée de moitié.

Le lecteur comprendra maintenant notre conclusion.

Pour qui sait régler un galvanomètre, l'équipage statique n'est qu'une gêne.

Il vaut mieux mettre l'argent dont on dispose à multiplier les bobines, de manière à en posséder un jeu complet (à fil court et gros, à fil moyen, à fil fin et long), que de le gaspiller à des appareils coûteux et incommodes.

154. Galvanomètre différentiel.

1°. — On tord ensemble deux fils 1 et 2 guipés de soie ou de coton; on utilise la corde à deux brins métalliques obtenue à l'enroulement des bobines d'un galvanomètre ordinaire : il devient *différentiel*. En vertu de la loi générale de l'électromagnétisme, les fils 1 et 2, *toujours très rapprochés*, produisent en tout point de l'espace des champs égaux quand ils sont le siège de courants égaux et de même sens; ils produisent donc un champ *identiquement* nul quand les courants sont égaux et de sens contraires.

D'où le moyen de reconnaître si cette condition est réalisée.

On vérifie que l'appareil est correctement construit en connectant les bobines en série, de manière que le même courant les traverse en sens inverses : l'aiguille ne doit pas être déviée.

A la rigueur, on réalise un galvanomètre différentiel, en utilisant *en sens inverses* les deux bobines d'un galvanomètre ordinaire; mais le champ de deux courants égaux n'est plus alors *identiquement* nul : il n'est nul que dans un volume souvent très petit qui peut se réduire à un point. Il peut arriver que l'aiguille (surtout si elle est longue) ne soit pas déviée pour une certaine position initiale, et le soit pour une autre position. Il faut se défier d'un tel dispositif.

2°. — Lord Rayleigh a construit un galvanomètre permettant de vérifier si deux courants sont dans un rapport donné, 1 à 10 par exemple.

On prend 20 fils de même longueur, sur le même paquet. On les tord deux à deux, et on obtient ainsi dix groupes $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots a_{10}, b_{10}$. On tord les dix groupes en une corde unique. On relie les fils a en série : ils serviront au courant 1; on relie les fils b en parallèle : ils serviront au courant 10. Enfin on enroule la corde sur un cercle de 30 centimètres de diamètre, par exemple : l'aiguille est suspendue au centre de ce cercle qui est placé verticalement et constitue une boussole des tangentes.

Pour que l'aiguille reste au repos quand les courants 1 et 10 sont envoyés dans les deux enroulements, une seule condition est néces-

saire : l'égalité des résistances des dix fils mis en parallèle. En effet, la torsion des fils a_i et b_i assure l'égalité de leurs effets ; si le courant 10 se partage en 10 parties égales, chaque groupe $a_i b_i$ produit un champ identiquement nul.

Il ne serait pas nécessaire que les fils en parallèle eussent la même résistance, si on pouvait admettre que ces fils, pris isolément et traversés par le même courant, produisissent les mêmes effets là où se trouve l'aiguille. On réalise approximativement la condition en formant une corde unique avec les dix groupes ab ; mais l'égalisation est beaucoup plus difficile à obtenir que pour les deux fils de chaque groupe. En définitive, comme on satisfait, au moins approximativement, à deux conditions dont l'une suffit, le résultat définitif est bon.

3°. — D'une manière générale les deux enroulements 1 et 2 quelconques d'un galvanomètre produisent, *dans un certain volume*, des champs $G_1 i_1$ et $G_2 i_2$, quand ils sont le siège de courants i_1 et i_2 . L'action totale est nulle si les connexions sont convenables et si l'on a :

$$G_1 i_1 = G_2 i_2. \quad (1)$$

Soit un circuit de résistance R contenant une force électromotrice E ; il se dérive en deux branches de résistances r_1 et r_2 contenant chacune un enroulement du galvanomètre différentiel. L'état permanent étant réalisé, on a :

$$i_1 r_1 = i_2 r_2. \quad (2)$$

Pour que l'aiguille du galvanomètre reste au zéro, on doit satisfaire à la condition :

$$\frac{G_1}{r_1} = \frac{G_2}{r_2} = \alpha. \quad (3)$$

Ceci posé, voici un curieux paradoxe dont nous trouverons une application au § 211.

Installons une force électromotrice e sur l'une des branches de la dérivation : je dis que la déviation du galvanomètre est indépendante de la résistance R et de la force électromotrice E .

En effet, en tenant compte des sens, on a l'équation de Kirchhoff :

$$i_1 r_1 + i_2 r_2 = e = G_1 i_1 \left(\frac{r_1}{G_1} \right) + G_2 i_2 \left(\frac{r_2}{G_2} \right) = (G_1 i_1 + G_2 i_2) \alpha.$$

Or $G_1 i_1 + G_2 i_2$ mesure la déviation du galvanomètre ; comme le veut l'énoncé, elle ne dépend ni de R ni de E .

155. Shunt des galvanomètres. Réducteurs.

Shunter un galvanomètre, c'est relier directement ses bornes par un conducteur formant dérivation (*shunt*, en anglais, signifie voie de garage, bifurcation, dérivation).

1°. — COURANT EXTÉRIEUR IMPOSÉ (fig. 169).

Soit r la résistance du galvanomètre ; soit r_1 celle du shunt. On a :

$$I = i + i_1, \quad i = I \frac{r_1}{r + r_1}, \quad i_1 = I \frac{r}{r + r_1}.$$

Pour n'envoyer dans le galvanomètre que le dixième, le centième, le millième... du courant I imposé, on fera :

$$r = 9r_1, \quad r = 99r_1, \quad r = 999r_1.$$

2°. — FORCE ÉLECTROMOTRICE IMPOSÉE (fig. 170).

Le problème est tout différent. Quand la force électromotrice est imposée, l'adjonction d'un shunt produit deux résultats : une diminution de la résistance totale, par suite une augmentation du cou-

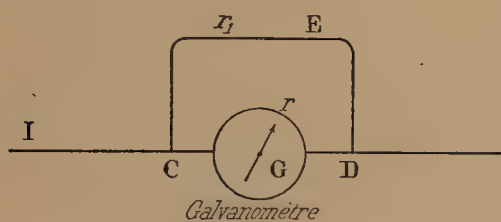


Fig. 169.

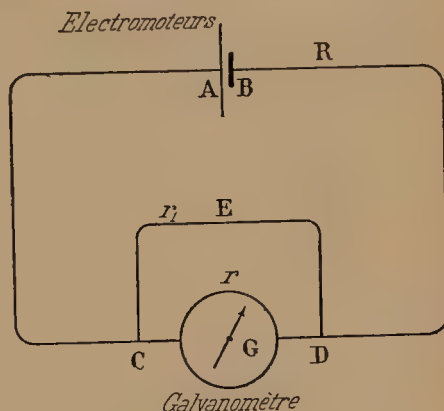


Fig. 170.

rant ; l'envoi dans le galvanomètre d'une fraction de la *nouvelle* intensité.

L'intensité sans shunt est :

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Installons le shunt.

La résistance totale et le courant total deviennent :

$$R + r' = R + 1 : \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right), \quad I' = E : \left(R + \frac{rr_1}{r + r_1} \right).$$

Enfin l'intensité dans le galvanomètre est :

$$i' = I' \frac{r_1}{r + r_1} = \frac{Er_1}{R(r + r_1) + rr_1} = \frac{E}{R \left(1 + \frac{r}{r_1} \right) + r}.$$

Le shunt est toujours efficace ; on a toujours :

$$i' < I.$$

Mais l'efficacité dépend beaucoup des circonstances.

a) Si la résistance r du galvanomètre est négligeable devant R , on a sensiblement :

$$I' = \frac{E}{R} = I, \quad i' = I \frac{r_1}{r + r_1}.$$

On retombe sur le premier cas : tout se passe comme si le courant extérieur était imposé. En définitive, on diminue une résistance qui était déjà négligeable.

b) Si la résistance r du galvanomètre est grande vis-à-vis de R , et si r_1 est de l'ordre r , on a sensiblement :

$$i = E : r.$$

Le shunt est inefficace.

Il ne faut donc pas shunter un galvanomètre très résistant placé sur un circuit de résistance négligeable ; on doit commencer par intercaler une résistance en série qui donne au shunt de l'efficacité.

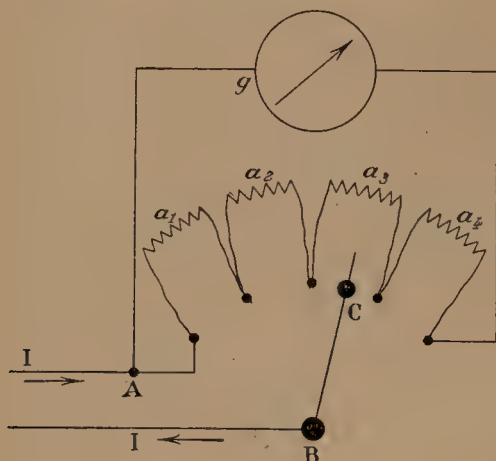


Fig. 171.

3°. — RÉDUCTEURS.

Le dispositif est représenté dans la figure 171 ; nous sommes par hypothèse dans le cas 1°.

n résistances a_1, a_2, \dots dont la somme est σ , forment un circuit fermé avec un galvanomètre de résistance g .

Les extrémités du circuit extérieur sont en A et B.

Une manette BC permet de répartir diversement les résistances a entre les deux branches de la dérivation.

Quand on intercale j résistances entre les points A et C, le rapport $i : I = k$ de l'intensité dans le galvanomètre à l'intensité totale (*facteur de réduction*) est :

$$\frac{i}{I} = k_j = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_j}{\sigma + g}.$$

Comme $\sigma + g$ est une constante pour un réducteur et un galvanomètre donnés, k est proportionnel à la somme des résistances de A à C :

$$\frac{k_1}{a_1} = \frac{k_2}{a_1 + a_2} = \frac{k_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \dots$$

Supposons les k non pas donnés (ils ne sont déterminés que si l'on spécifie la résistance du galvanomètre), mais dans des rapports donnés ; les rapports des résistances sont :

$$\frac{a_1}{k_1} = \frac{a_2}{k_2 - k_1} = \frac{a_3}{k_3 - k_2} = \dots$$

Par exemple, si les facteurs de réduction sont comme :

$$1 \quad 0,1 \quad 0,01 \quad 0,001$$

les résistances a sont comme :

$$1 \quad 9 \quad 90 \quad 900.$$

L'avantage des *réducteurs* est de fournir des réductions dans des rapports invariables, quel que soit le galvanomètre.

Quand on coupe le circuit extérieur, le galvanomètre reste sur une résistance invariable, ce qui donne un amortissement invariable dans le cas d'un appareil à cadre mobile (§ 226).

156. Galvanomètres employés en télégraphie et téléphonie.

Dans les appareils précédents, l'aimant est libre de se placer suivant le champ résultant. Dans les suivants, le couple directeur est emprunté *principalement* à la pesanteur.

1^o. — L'appareil I se compose de deux bobines verticales, de section droite rectangle à angles arrondis, qui créent un champ hori-

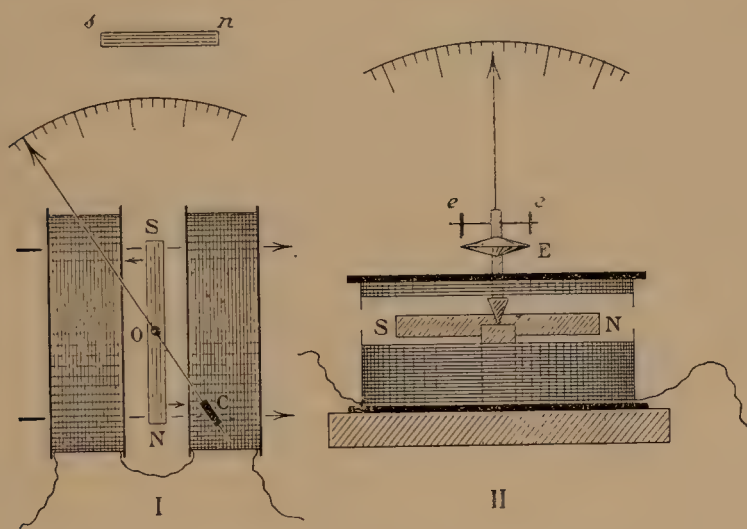


Fig. 172.

zontal. L'aimant SN tourne autour de l'axe O dans ce champ; il entraîne une longue aiguille *extérieure aux cadres*, dont la pointe se déplace sur une graduation. Un contrepoids C permet de régler la sensibilité; un aimant *sn*, qu'on déplace horizontalement, modifie la position d'équilibre en l'absence d'un courant.

L'appareil est utilisé en télégraphie. Voici quelques nombres pour fixer les idées. Il possède en tout 2800 spires de fil recouvert de soie (diamètre du fil nu 0^{mm},21). La résistance est de 250 ω .

2^o. — L'appareil II est basé sur le même principe. La bobine est unique; ses spires sont horizontales. L'aimant constitue le fléau d'une balance. On règle la sensibilité avec l'écrou E qui se déplace sur une tige filetée; on règle la position d'équilibre avec les écrous *e, e*. On a supprimé une partie de l'enroulement pour montrer la disposition des pièces.

157. Ampèremètres industriels.

1°. — Les ampèremètres industriels à aimants mobiles (aujourd'hui peu employés) sont basés sur le principe suivant. Un aimant permanent crée un champ H qui oriente une aiguille d'acier aimantée (ou une aiguille de fer doux qui, placée dans un champ, se transforme en un aimant). Une bobine crée un champ $H' = Gi$, qui se compose avec le premier; l'aiguille prend la direction du champ résultant. Elle entraîne une aiguille légère dont la pointe se meut sur une graduation.

C'est le principe même du galvanomètre.

Les changements dans la construction proviennent d'abord de ce que l'appareil doit être transportable. L'aiguille est montée sur

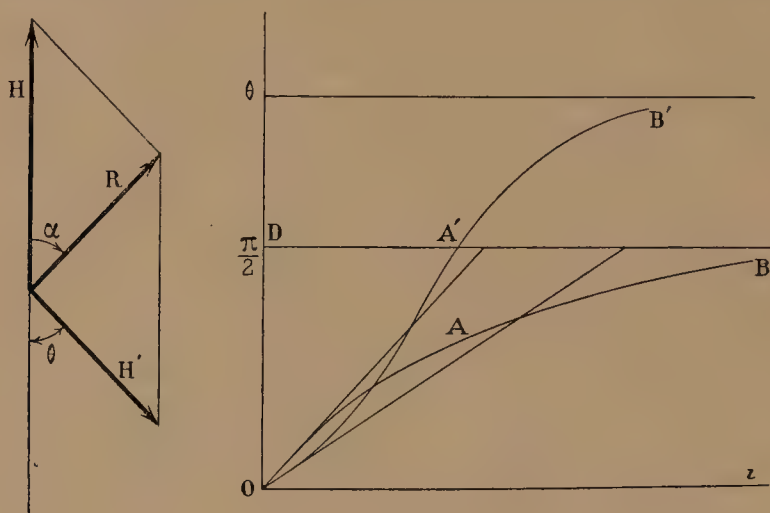


Fig. 173.

pivots. La position de l'appareil ne devant pas intervenir, le champ directeur H est considérable par rapport à l'intensité du champ terrestre. L'appareil est, par suite, d'une sensibilité médiocre.

Enfin la graduation doit ne pas être trop compliquée et occuper un angle notable, de l'ordre de 90° .

D'où la nécessité de mettre le champ directeur H à angle obtus avec le champ H' dû au courant. Insistons sur ce point.

2°. — La figure 173 donne immédiatement les relations :

$$\begin{aligned} R \cos \alpha &= H - H' \cos \theta, & R \sin \alpha &= H' \sin \theta, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{H' \sin \theta}{H - H' \cos \theta} = \frac{Gi \sin \theta}{H - Gi \cos \theta} = \frac{i \sin \theta}{I - i \cos \theta}. \end{aligned}$$

Comparons les courbes $\alpha = f(i)$, pour diverses valeurs de θ considéré comme paramètre du faisceau.

Pour $\theta = \pi : 2$, on a une tangente ordinaire OAB.

En particulier pour $i = \infty$, on a $\alpha = \pi : 2$.

Pour $\theta < \pi : 2$, la tangente de départ devient $\sin \theta : I$; la courbe part donc *au-dessous* de la précédente. Pour $i = \infty$, $\alpha = \pi - \theta$. L'asymptote de la seconde courbe est donc *au-dessus* de celle de la précédente. La courbe a donc nécessairement la forme OA'B'.

Pour la construire exactement (la figure n'en donne que l'allure), on remarquera que $\alpha = \pi : 2$, pour $i = I : \cos \theta$. La distance DA' diminue à mesure que θ diminue; elle a I comme limite pour $\theta = 0$. Le lecteur discutera le sens de ce cas limite (§ 58 et 150).

Pour $i = I$, on a : $2\alpha = \pi - \theta$.

D'où immédiatement la tangente de départ, l'asymptote et deux points de la courbe.

Il résulte de cette discussion qu'en prenant $\theta < \pi : 2$, on augmente l'angle dans lequel se trouve la partie admissible de la graduation. Mais les traits $\Delta i = \text{Constante}$, qui correspondent à la même variation du courant, sont loin d'être équidistants : leur écartement croît à partir du courant nul, jusqu'à un maximum qui correspond au point d'inflexion de la courbe, pour diminuer ensuite rapidement.

Je n'insisterai pas sur les diverses formes données à l'appareil; c'est d'autant moins intéressant que ce mode de construction semble abandonné. La discussion précédente n'en conserve pas moins son intérêt.

Avec le temps, l'aimant directeur perd de son magnétisme; H diminue. Donc l'appareil, supposé d'abord correctement étalonné, donne, au bout d'un certain temps, des indications erronées *par excès*.

158. Mesure des courants alternatifs : appareils à fer doux.

1°. — Nous ne pouvons passer sous silence une catégorie nombreuse d'appareils où la partie mobile est en fer doux. Ils sont destinés à mesurer plus ou moins correctement les caractéristiques des courants alternatifs pour la définition desquelles le lecteur se reportera au chapitre XIII. Bien que la théorie complète de ces instruments exige des connaissances étendues sur l'aimantation (voir la seconde partie de ce Cours), nous les décrirons brièvement ici pour abrégé.

Nous poserons comme principe APPROCHÉ que *les déplacements d'un morceau de fer doux tendent à se produire de manière que*

l'intégrale :
$$\iiint H^2 dv,$$

appliquée à tout son volume, soit maxima; H est la valeur totale du champ, dv l'élément de volume du fer doux.

Autrement dit, le fer se déplace vers les points où le champ est maximum, *indépendamment du signe de ce champ*. D'où la possibi-

lité d'utiliser les appareils dans des champs *alternatifs*, c'est-à-dire dont la direction et l'intensité varient périodiquement.

On réalise l'apériodicité des appareils (§ 148) en liant à la pièce de fer mobile une palette qui se déplace dans un espace dont elle ne touche pas les parois, mais dont les bords restent voisins de ces parois. On crée ainsi un frottement notable sur l'air.

2°. — La figure 174 représente deux types très simples où la pesanteur joue le rôle de force directrice.

Dans le type I, un barreau de fer est suspendu par un fil souple à l'extrémité d'un levier. A l'axe de ce levier sont liés l'index I, la palette amortissante A et le contrepoids C. Le fer est attiré par une bobine verticale de section circulaire.

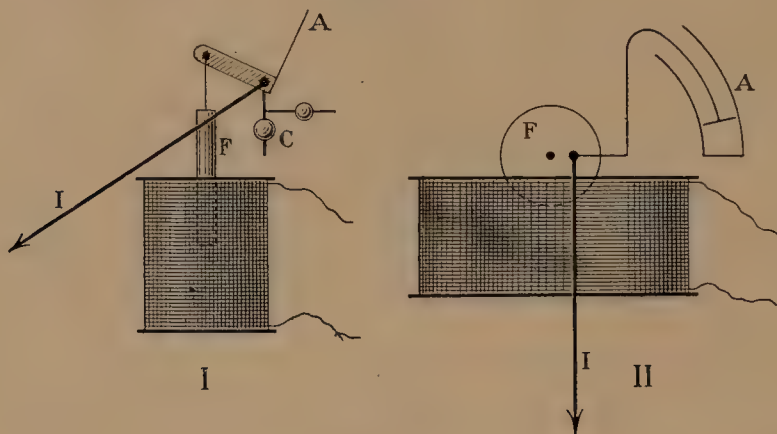


Fig. 174.

Dans le type II, le fer est sous forme d'un disque qui peut tourner autour d'un axe *excentré*.

L'amortisseur est constitué par une sorte de piston non jointif.

Dans sa rotation, le disque entre plus ou moins profondément dans une bobine verticale de section quasi rectangulaire.

3°. — La figure 175 représente un type d'appareil qui comporte des pièces de fer fixes et une pièce mobile.

Une bobine B, dont le plan des spires est vertical, aimante (parallèlement à son axe) deux barreaux de fer doux NS. Une plaque de fer doux *nn* tourne autour de l'axe de la bobine. Elle est donc *repoussée* par les barreaux fixes, que le champ horizontal soit dirigé vers l'avant (pôles représentés) ou vers l'arrière (pôles inverses). Le couple antagoniste est emprunté à la pesanteur; le contrepoids C sert au réglage.

4°. — En raison de la forme de la loi d'attraction, les indications sont *en gros* proportionnelles au carré de l'intensité efficace (§ 127) : à chaque instant la force est en effet à peu près proportionnelle au carré du champ, c'est-à-dire au carré de l'intensité. Les traits de la graduation (en ampères) sont donc très rapprochés pour de petites

intensités; au-dessous du dixième de l'intensité maxima que l'appareil supporte, les mesures sont illusoires. Par des artifices on rend les traits plus équidistants sans arriver à l'équidistance absolue.

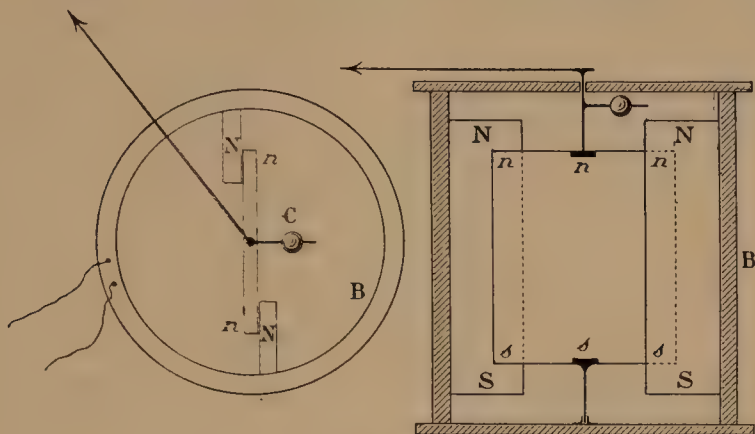


Fig. 175.

Les appareils doivent être réglés pour la fréquence du courant utilisé (§ 250) en raison des phénomènes d'hystérésis (voir la seconde partie de ce Cours).

Galvanomètres, ampèremètres et voltmètres à cadre mobile.

Le galvanomètre à cadre mobile a été introduit par Lord Kelvin comme récepteur télégraphique transatlantique (voir la seconde partie de ce Cours). Il ne faisait, du reste, que reprendre une idée très antérieure due à Bain, à moins que ce ne soit à quelque autre. Le seul mérite de MM. Deprez et d'Arsonval est d'avoir vulgarisé l'appareil sous une forme commode et de prix relativement modique. Au surplus, dans le tome II des Applications de l'Electricité de du Moncel (1873), on trouvera sous le nom de Bain exactement décrit le galvanomètre de Deprez-d'Arsonval.

159. Théorie générale.

1°. — Une bobine plane peut tourner dans un champ uniforme autour de deux fils fins tendus AB, CD (fig. 176).

Fixons la position du plan des spires (supposées planes) par l'angle θ que fait leur trace sur un plan normal à l'axe de rotation, avec la direction de la composante H du champ uniforme parallèle à ce plan.

Soit n le nombre des spires de la bobine, S la surface de chacune d'elles.

Le flux à travers le cadre est :

$$nSH \cdot \sin \theta.$$

Le couple auquel le cadre est soumis et qui tend à augmenter le flux à travers le cadre, est (en ergs, § 80) :

$$\frac{InSH}{10} \frac{d \sin \theta}{d\theta} = \frac{InSH}{10} \cos \theta.$$

Il est maximum et égal à $0,1 \cdot nSIH$, quand le plan des spires est parallèle au champ : au voisinage de cette position, il est indépendant de θ .

La théorie du galvanomètre à cadre mobile se déduit immédiatement de là. Soit $C\theta$ le couple dû à la réaction élastique des fils de suspension ; la condition d'équilibre est :

$$\frac{InSH \cos \theta}{10} = C\theta;$$

et si θ est petit :

$$I = \frac{10 C}{nSH} \theta.$$

2°. — Nous retrouvons les mêmes résultats par un autre raisonnement. Un circuit plan de surface S , traversé par un courant I (en ampères), est équivalent à un aimant dont le moment, normal au plan du circuit, vaut $0,1 \cdot SI$.

Pour n feuillets égaux et parallèles, le moment est $0,1 \cdot nSI$.

Ce système, placé dans un champ uniforme H , subit un couple :

$$0,1 \cdot nSI \cdot H \sin \varphi,$$

où φ est l'angle de la normale aux feuillets avec le champ ; θ et φ étant complémentaires, on retrouve la formule donnée plus haut.

Enfin le lecteur appliquera la formule de Laplace.

Il se rendra compte par les deux méthodes du rôle de la demi-spire supplémentaire qu'il est impossible d'éviter. Il vérifiera qu'il suffit de remplacer n par $n + 0,5$ pour en introduire l'effet.

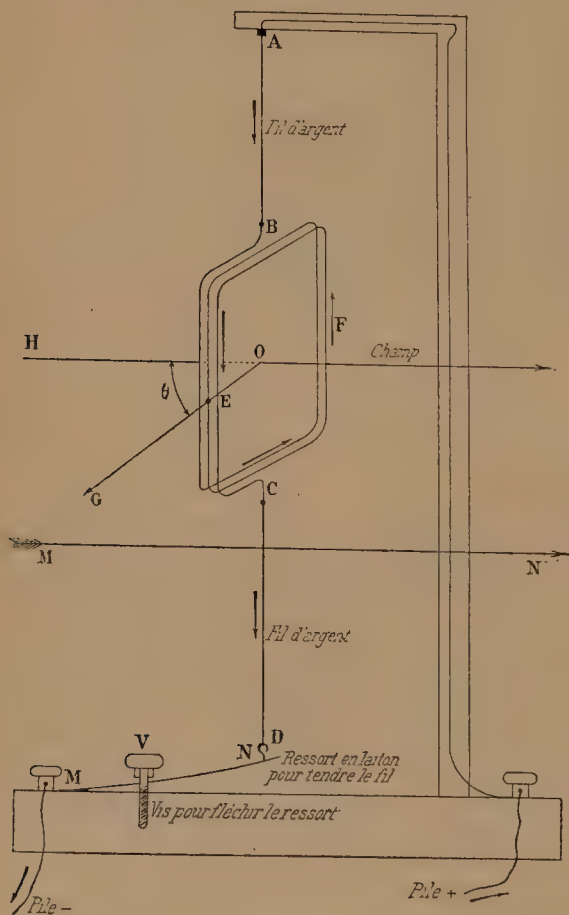


Fig. 176.

3°. — SENSIBILITÉ.

Pour rendre l'appareil sensible, on augmente le nombre des spires de la bobine, leur surface et le champ : c'est évident.

Nous reviendrons tout à l'heure sur les procédés employés.

Ne considérons ici que le rôle des fils de suspension.

Le couple de torsion d'un fil circulaire est en raison inverse de la longueur et proportionnel à la quatrième puissance du diamètre.

On a donc pour les deux fils AB, CD (fig. 176) :

$$C = \gamma d^4 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right), \quad l = l_1 + l_2,$$

l est donné par construction. C est minimum pour :

$$l_1 = l_2; \quad \text{d'où} \quad C = \frac{4kd^4}{l}.$$

Il importe de diminuer le diamètre. On augmente, il est vrai, la résistance ohmique r (par suite, l'échauffement) et les dangers de rupture. Mais la sensibilité croît considérablement; on est quitte pour shunter lorsque le courant est intense. Soit ρ la résistivité du métal; on a :

$$r = \frac{4l\rho}{\pi d^2}; \quad \text{d'où} \quad Cr^2 = \text{Constante.}$$

Au paragraphe 55 de notre *Cours de Mécanique physique*, nous avons montré qu'il est avantageux d'employer un ruban (fil ordinaire aplati au laminoir). Le fil ou le ruban est ordinairement en argent, métal qui joint à une résistivité ρ petite un petit coefficient γ .

160. Description de l'appareil.

L'appareil se compose (fig. 177) de trois aimants accolés, donnant entre leurs bras un champ sensiblement uniforme. Pour l'uniformiser davantage et éviter la dispersion des lignes de force, on ajoute des pièces polaires et un tube de fer qui réalisent un entrefer cylindrique dans lequel tourne la bobine (fig. 178). Le tube est porté par la colonne qui soutient l'extrémité A du fil servant d'axe. L'extrémité D est fixée à un ressort monté comme l'indique la figure 176.

Pour régler la hauteur et la position d'équilibre de la bobine, l'extrémité A du fil supérieur de suspension est fixée à une pièce représentée agrandie à gauche de la figure 177. Une pièce cylindrique P (représentée en coupe) tourne à frottement dur dans une plaque horizontale S que supporte la colonne. Dans la pièce P entre à frottement doux un carré terminé par une tige filetée sur laquelle on agit avec l'écrou E. En tournant P, on donne au système mobile l'azimut d'équilibre qu'on désire. En desserrant le ressort qui tire en D vers le bas, puis en agissant sur E, on impose à la bobine une hauteur convenable; après quoi on tend à nouveau les fils.

Pour obtenir la bobine, on enroule le fil sur un gabarit rectangu-

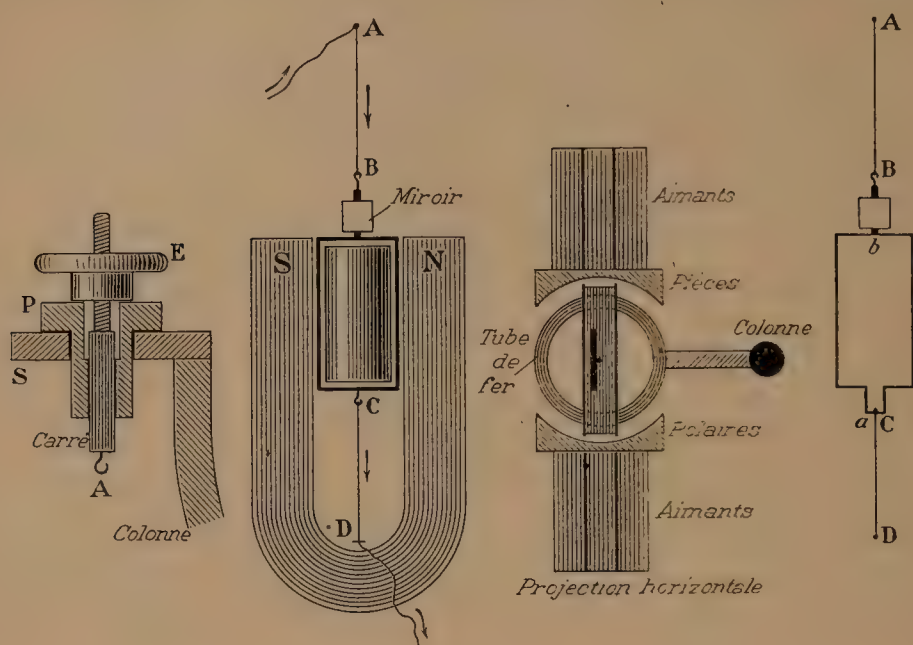


Fig. 177.

laire; puis on plonge dans de la paraffine ou dans de l'arcanson fondus, on laisse sécher et on enlève le gabarit.

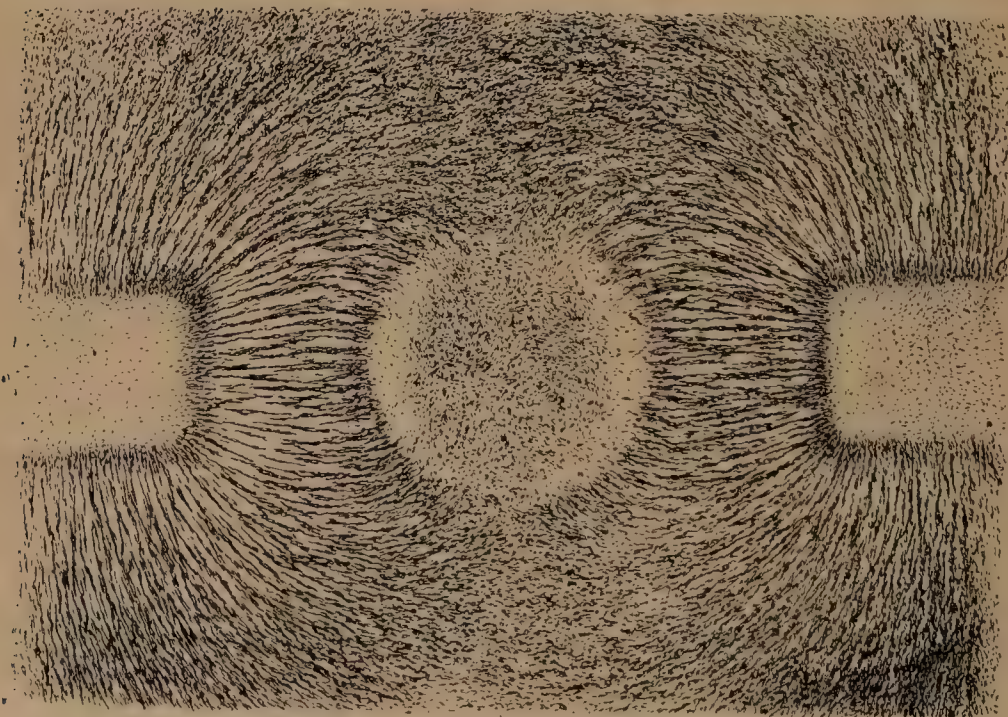


Fig. 178.

Généralement le champ dans l'entrefer est de quelques centaines de gauss (400, par exemple); la résistance de la bobine est de l'ordre de 100 à 200 ohms.

161. Radiomicromètre de Boys. Mesure de l'intensité des courants alternatifs.

Un circuit formé de deux métaux différents (cuivre-fer, par exemple) est traversé par un courant quand les températures des deux *soudures* (points de contact des métaux différents) ne sont pas identiques; l'intensité de ce courant est évidemment proportionnelle à la différence des températures quand, l'une restant invariable, l'autre varie de *très petites* quantités.

L'effet immédiat de la différence des températures étant une force électromotrice, l'intensité du courant est en raison inverse de la résistance du circuit. D'où un très curieux appareil dû à Boys.

Un cadre *abc* est formé d'une spire *unique* en fil nu; le côté *ab* est en cuivre, le côté *cb* est en fer (fig. 177 à droite). Les contacts sont sur la verticale. Le cadre occupe la place de la bobine dans le galvanomètre ci-dessus décrit (§ 160). Les fils AB, CD, *qui ne transmettent aucun courant*, sont en quartz.

Si, par un procédé quelconque, on chauffe la soudure *a*, un courant naît dans le cadre qui dévie. Comme sa résistance ohmique est extrêmement petite, on décèle une petite fraction de microvolt.

L'échauffement de la soudure résulte, par exemple, d'un faisceau calorifique qui tombe dessus; on la recouvre de noir de fumée pour qu'elle absorbe toute l'énergie reçue.

161. Ampèremètres industriels.

1°. — La construction des ampèremètres industriels ne diffère de celle des appareils de laboratoire que par la nécessité de les rendre transportables et d'avoir une graduation pas trop compliquée (on doit utiliser des déviations considérables).

La bobine est donc montée sur pivots avec chapes de pierre dure. Le courant entre et sort par des ressorts spiraux (en alliage non magnétique, bronze phosphoreux, par exemple) qui produisent le couple directeur. La bobine se meut dans un entrefer cylindrique constitué le plus souvent par un aimant en forme de C et par un tube de fer placé entre les pôles. Une aiguille indicatrice d'aluminium est solidaire de la bobine; sa pointe se déplace sur une graduation qui est tracée sur une glace étamée à sa partie postérieure (afin d'éviter les erreurs de parallaxe dans l'observation, voir notre *Cours de Thermodynamique*, § 14).

La bobine est enroulée sur un cadre d'aluminium; l'entrefer est très réduit (de l'ordre du millimètre) et parfaitement alésé; le cadre, très mince, laisse de part et d'autre un espace libre de l'ordre de

quelques dixièmes de millimètre. On réalise ainsi des champs très intenses (qui dépassent 2000 gauss dans certains types d'appareils); le champ terrestre n'a pratiquement plus aucune influence.

2°. — Reste la graduation : chaque inventeur a son procédé qui est naturellement le meilleur.

a) Si le champ dans l'entrefer est radial et d'intensité uniforme (dans ce cas, le champ n'est plus uniforme, puisque l'uniformité implique le parallélisme des lignes de force), la bobine est toujours

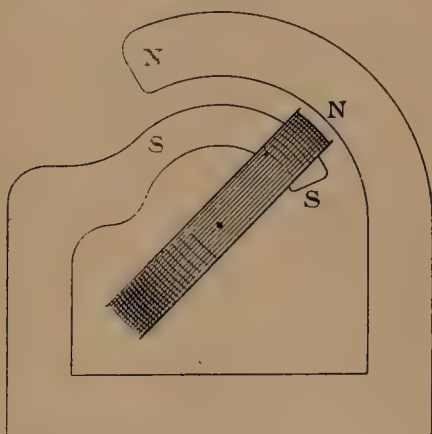


Fig. 179.

placée de la même manière par rapport à lui. Le couple électromagnétique est proportionnel à l'intensité du courant et indépendant de la déviation. Comme le couple dû aux ressorts spiraux est proportionnel à la déviation, celle-ci est proportionnelle à l'intensité du courant. Les traits de la graduation sont équidistants.

La figure 179 représente schématiquement un dispositif réalisable. Un seul côté de la bobine subit le champ. Les autres dispositifs reviennent à peu près à celui-là ;

les différences consistent dans le rôle qu'on fait jouer au cylindre intérieur au cadre dans la fermeture du circuit magnétique. Il est au surplus douteux qu'on obtienne rigoureusement un champ radial d'intensité uniforme.

b) Le second cas extrême (aussi difficile à réaliser rigoureusement) consiste à obtenir dans l'entrefer cylindrique *un champ uniforme* (dont les lignes de force sont parallèles et l'intensité constante, fig. 178). Pour agrandir l'espace angulaire où la graduation reste admissible, les spires de la bobine ne sont pas parallèles au champ dans la position d'équilibre initiale; elles font avec lui l'angle θ_0 (fig. 180 en haut). L'équation qui relie l'intensité du courant à la déviation prend la forme :

$$\frac{\theta}{\cos(\theta - \theta_0)} = ki. \quad (1)$$

La discussion est analogue à celle du § 157. Le lecteur construira le faisceau des courbes (1), où θ_0 est le paramètre variable; elles sont analogues aux courbes de la figure 173, où θ remplace α .

A mesure que θ_0 croît, la tangente de départ est plus voisine de l'horizontale.

L'asymptote horizontale ($i = \infty$) correspond à la condition $\theta = \theta_0 + 90^\circ$; elle s'élève à mesure que θ_0 croît.

L'écartement des traits de la graduation qui correspond à $\Delta i = \text{Constante}$, pour un θ_0 donné, croît d'abord quand le courant part de zéro, passe par un maximum, puis décroît très rapidement.

3°. — SENSIBILITÉ. SHUNT.

Dans un appareil sensible, un courant de cinq centièmes d'ampère produit une déviation de 75 à 90° degrés; la résistance est de l'ordre de l'ohm. Les ampèremètres dits *milliampèremètres*, avec une résistance de 50 ohms, ont une sensibilité cinq fois plus grande.

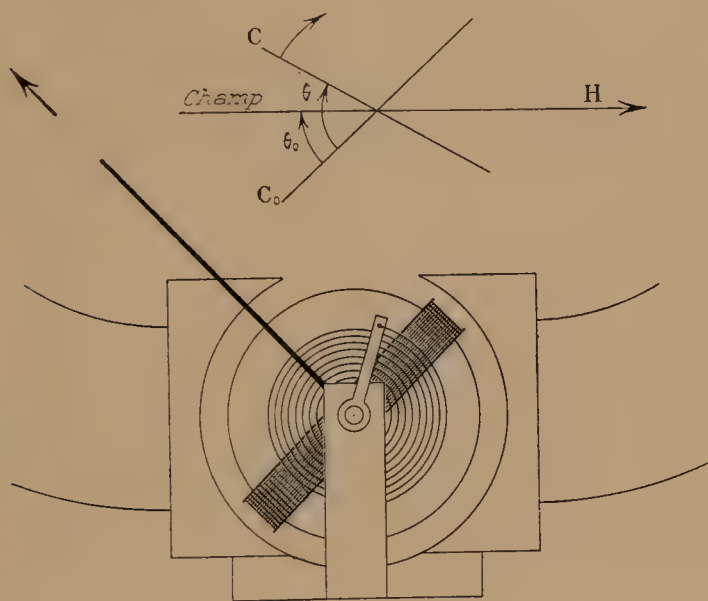


Fig. 180.

Pour des raisons techniques de fabrication, la mesure des courants intenses est toujours ramenée à celle des courants faibles, au moyen d'un système de shunts.

Pour régler les appareils ou pour modifier considérablement leur sensibilité, on utilise parfois un shunt magnétique, c'est-à-dire un morceau de fer doux mis à cheval sur les pôles de l'aimant et qui dérive une partie des lignes de force (voir la seconde partie de ce Cours).

Les voltmètres ne diffèrent des ampèremètres que par leur résistance généralement beaucoup plus grande; ils peuvent être rendus plus sensibles. Un courant de 0,005 ampère produit une déviation de 75 à 90 degrés.

L'ampèremètre devient enregistreur par l'adjonction d'une plume liée à la partie mobile. Elle se déplace sur une feuille de papier enroulée sur un cylindre entraîné par un mouvement d'horlogerie.

Électrodynamomètres.

163. Généralités.

1°. — Dans les électrodynamomètres, le circuit se compose de deux parties : l'une fixe, l'autre mobile. Parfois elles sont mises *en série* et traversées par le même courant I ; parfois la partie mobile est en dérivation et traversée par une fraction *connue* $i = kI$ du courant I qui passe dans la partie fixe.

La détermination de I résulte de la mesure des actions mutuelles (force ou couple) des deux parties du circuit *dans leur situation actuelle*.

Quelle que soit leur forme, quel que soit le mouvement qu'on permet à la partie mobile, la force F suivant ce mouvement est $F = \varphi k I^2$, où φ est une constante caractéristique de l'appareil pour

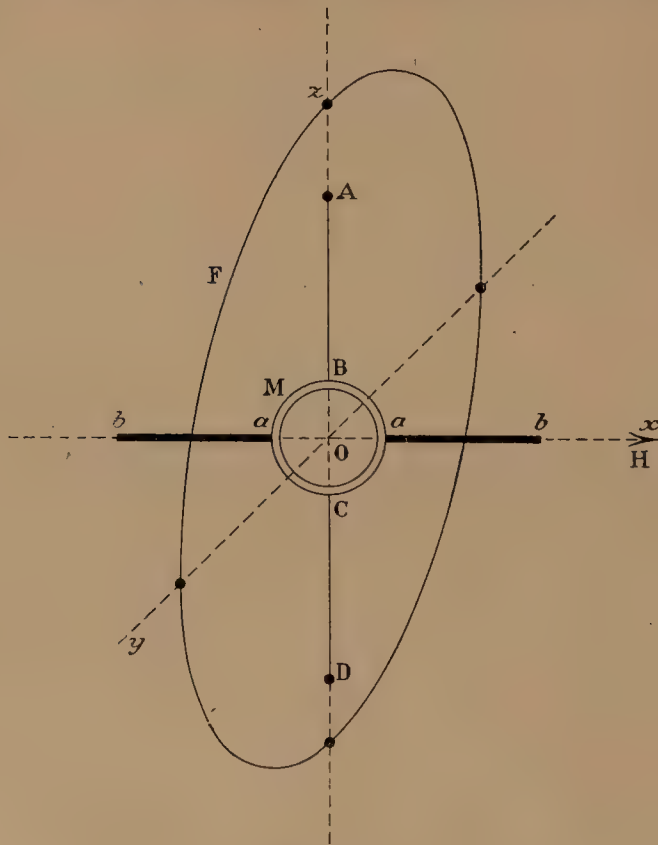


Fig. 181.

la disposition actuelle de ses pièces. Si le mouvement est une translation, F est une force ; si c'est une rotation, F est un couple.

Ainsi quel que soit l'appareil, nous sommes assurés que pour une

position toujours la même de la partie mobile, la force nécessaire pour empêcher le mouvement est proportionnelle à I^2 .

2°. — Prenons pour système fixe une bobine à spires verticales. Elle produit, dans un certain espace voisin de son centre O, un champ $H = GI$, horizontal et uniforme.

Installons dans cet espace une bobine mobile autour d'un axe vertical AB, CD.

Soient n le nombre de ses spires, S la surface de chacune d'elles.

Parcourue par le courant kI , elle équivaut à un aimant de moment $kInS$. Soit θ l'angle des spires de la bobine mobile avec le champ (dans la figure $\theta = 0$); le couple qui agit sur elle est :

$$F = kInS \cdot GI \cdot \cos \theta = GnSkI^2 \cos \theta.$$

Supposons la bobine mobile tenue par deux fils fins métalliques AB, CD, dans le prolongement l'un de l'autre. Enfin posons que dans sa position d'équilibre (en l'absence de courant) on a $\theta = 0$.

La déviation due au courant I est donnée par la formule :

$$C\theta = GnSkI^2 \cos \theta = GnSkI^2,$$

puisque θ est toujours petit.

La déviation θ mesure le carré de l'intensité du courant.

L'électrodynamomètre a, dans certains cas, un grand avantage sur le galvanomètre : le sens de la déviation est indépendant du sens du courant. Si on renverse le courant, on change à la fois le sens du champ créé par la bobine fixe et le signe des faces de la bobine mobile : le déplacement tend à se faire dans un sens invariable.

Corrélativement, la sensibilité (§ 152) :

$$S = \frac{d\theta}{dI} = \frac{2GnS}{C} I,$$

croît proportionnellement à l'intensité : ce qui rend la mesure des courants faibles très difficile. Dans l'énoncé de la sensibilité d'un tel appareil, il faut donc spécifier l'intensité.

Pour $\theta = 0$, les plans des spires des deux bobines sont rectangulaires. Quand les courants passent, la bobine mobile tourne dans un sens tel que les courants dans les deux bobines deviennent parallèles : ce qu'on vérifiera aisément en appliquant les règles générales.

3°. — Les électrodynamomètres servent à deux fins : étudier les courants alternatifs, déterminer l'intensité absolue des courants continus. Pour l'instant, laissons de côté le premier emploi.

Pour déterminer la valeur absolue d'un courant, il faut connaître en valeur absolue G , nS , C .

Si la bobine fixe est de diamètre relativement grand et de gorge relativement petite, G est déterminable avec précision (§ 135).

La mesure de C ne présente aucune difficulté particulière. Avec

le mode de suspension de la bobine monofilaire (cas représenté) ou bifilaire (*Mécanique rationnelle*, § 156), la méthode générale consiste à déterminer les périodes d'oscillation T et T' pour deux moments d'inertie \mathfrak{J} et \mathfrak{J}' qui diffèrent d'une quantité connue :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{C}}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{J}'}{C}};$$

$$C = 4\pi^2 \frac{\mathfrak{J}' - \mathfrak{J}}{T'^2 - T^2}.$$

Pour modifier le moment d'inertie, on déplace des masses égales connues, de quantités connues, le long des règles ab (*Mécanique rationnelle*, § 404).

La difficulté quasiment insurmontable réside dans la mesure de la surface totale nS de la bobine mobile.

Nous avons décrit cet appareil (connu sous le nom de Weber) pour fixer les idées et parce qu'il est simple; mais sous la forme historique, il est abandonné.

164. Électrodynamomètre absolu; emploi de solénoïdes.

1°. — MN représente un solénoïde régulièrement enroulé contenant m spires par centimètre de génératrice.

Un courant de I' ampères crée, à l'intérieur de la bobine et suffisamment loin des bases, un champ uniforme, parallèle aux génératrices du cylindre et d'intensité (§ 140) :

$$H = 0,4 \cdot \pi m I'.$$

Un circuit plan, d'aire S , est placé parallèlement au champ.

Il peut tourner autour d'un axe horizontal normal aux généra-

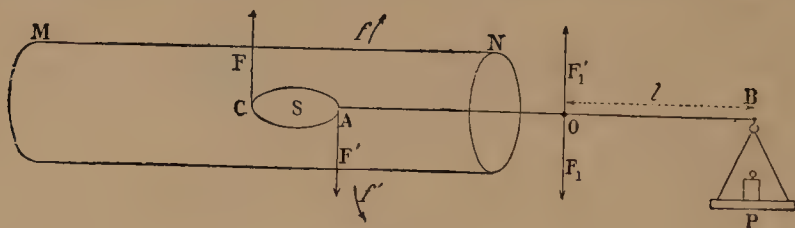


Fig. 182.

trices du cylindre (par suite, aux lignes de force du champ). Quand un courant I le parcourt, il est soumis à un couple de moment :

$$0,04 \cdot \pi m S I' I \text{ ergs} = 0,04 \cdot \pi m S I^2 \text{ ergs};$$

les bobines sont supposées en série.

2°. — Pour mesurer le couple, fixons le circuit S au fléau d'une balance, dont l'axe de rotation O (arête du couteau) est horizontal et normal aux génératrices du cylindre. Le poids du circuit est équi-

libré par le poids P , quand il ne passe pas de courant. Le couple à évaluer peut être représenté par deux forces égales F et F' , verticales, placées à la distance CA l'une de l'autre; le produit $\overline{CA} \cdot F$ est son moment.

Par le point O faisons passer deux forces égales et parallèles aux forces F et F' .

Les quatre forces égales F, F', F_1', F_1 , forment deux couples. L'un FF_1 a pour moment $\overline{CO} \cdot F$; l'autre $F'F_1'$ a pour moment $\overline{OA} \cdot F$.

Ils tendent à faire tourner le système autour de l'axe O , le premier dans le sens de la flèche f , le second dans le sens de la flèche f' .

Leur résultante est égale à un couple de moment :

$$(\overline{CO} - \overline{AO})F = \overline{CA} \cdot F,$$

qui tend à faire tourner le système dans le sens de la flèche f .

Nous venons de démontrer dans un cas particulier ce théorème général : on peut transporter un couple en un point quelconque de son plan; autrement dit, un couple est complètement défini par la *direction et la grandeur* de son axe.

Il devient dès lors facile de mesurer le couple résultant.

Soient l la distance OB , p le poids en dynes qu'il faut retrancher du poids P pour maintenir l'équilibre, quand le courant passe; on a :

$$lp = 0,04 \cdot \pi m SI^2.$$

3°. — Cet appareil porte le nom d'électrodynamomètre absolu, parce qu'il permet de déterminer la valeur d'un courant en ampères par des mesures de longueurs, de surfaces, et à l'aide de poids; il sert à étalonner les ampèremètres. Le circuit S est constitué par une bobine : on y amène le courant à l'aide de deux conducteurs, isolés le long du fléau, se reliant à deux bornes extérieures au fléau par deux spirales de fil fin dont les axes coïncident avec le couteau. Elles ne gênent en rien les petits mouvements du fléau.

La difficulté réside encore dans la mesure de la surface totale S de la bobine mobile. Elle peut avoir des dimensions plus grandes que dans le cas du § 163; toutefois il y aurait beaucoup d'incertitude avec les modèles ordinaires.

Ici une remarque fondamentale est nécessaire.

Le problème de la mesure en valeur absolue a deux échelons :

a) réaliser un appareil qui, d'après ses dimensions, permette (au moyen de poids, par exemple) d'obtenir la valeur absolue d'une quantité (*appareil absolu primaire*);

b) réaliser un appareil qui ne permette pas d'obtenir *directement* la valeur absolue, mais qui soit susceptible d'un étalonnage UNE FOIS POUR TOUTES au moyen d'un appareil réellement absolu (*appareil absolu secondaire*).

L'appareil précédent, qui est absolument rigide, se trouve dans ce cas, même si la bobine MN n'est pas assez longue pour donner un champ absolument uniforme en tous les points de la bobine S ; une fois étalonné, il peut servir indéfiniment sans nouvel étalonnage. On a construit sur le même principe des appareils absolus primaires ; mais ils sont volumineux, extrêmement coûteux et ne peuvent être achetés que par des laboratoires officiels de vérification.

165. Électrodynamomètre balance.

1° — BALANCE DE LORD KELVIN.

La balance de Lord Kelvin est du type *absolu secondaire* ; elle est étalonnée par comparaison avec un appareil *absolu primaire*.

Elle se compose de six bobines A, A, B ; A', A', B'. Les bobines A, A', identiques, sont parallèles et fixes (la figure n'en représente que deux) ;

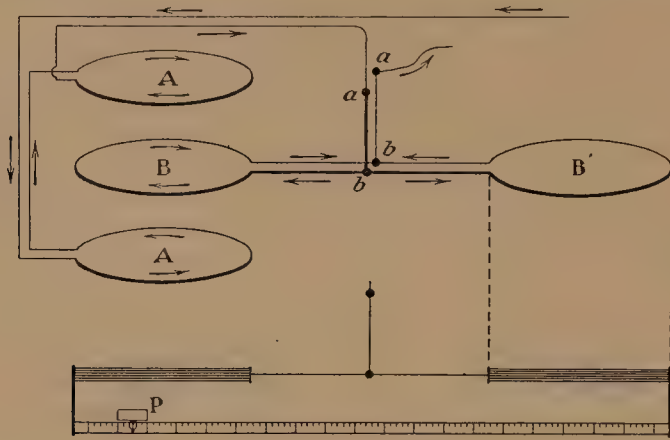


Fig. 183.

les bobines B, B', sont liées au fléau d'une espèce de balance. Dans la position d'équilibre, elles sont parallèles et à égales distances des bobines A, A'. Les connexions sont établies de manière que, sous l'influence d'un courant passant dans tout le système, elles soient repoussées par deux des bobines fixes, attirées par les deux autres : d'où un couple proportionnel au carré de l'intensité.

On le mesure au moyen d'un poids P, qui se déplace sur une règle légère invariablement liée au fléau de la balance.

Le couteau, dont l'arête sert ordinairement d'axe de rotation, est supprimé. Le fléau oscille autour des extrémités *bb* des fils *ab* qui servent d'électrodes. La figure 183 n'en représente que deux.

En réalité, les conducteurs *ab* sont constitués par un grand nombre de fils fins, verticaux et situés dans le même plan : la moitié sert d'anode, l'autre de cathode. On gagne d'avoir une charnière très souple et un grand refroidissement.

Les appareils se construisent pour des intensités allant d'un ampère à des milliers. Le plus sensible mesure de 0,1 à 1 ampère; le moins sensible, de 25 à 2500. Un seul suffit s'il est convenablement shunté.

2° — BALANCE DE LALLEMAND.

Supposons verticaux les plans des spires des bobines de l'appareil précédent qui sont alors de petites dimensions.

Montons les bobines mobiles B , B' , comme le cadre d'un galvanomètre à cadre mobile. Mesurons leurs déplacements angulaires autour de l'axe bb vertical par la déviation d'un miroir collé sur le système. Nous obtenons une balance proposée par Lallemand il y a plus de soixante ans. Elle est capable de déceler de très faibles courants alternatifs (courants téléphoniques).

166. Électrodynamomètre absolu : emploi de bobines.

1°. — On considère l'emploi de bobines comme présentant les meilleures garanties d'exactitude dans la construction des électrodynamomètres absolus. Les longues discussions que la méthode a suscitées, montrent qu'il existe une très réelle indétermination sur les dimensions à donner aux bobines fixes et mobiles, et à leurs distances relatives. Pour obtenir telle ou telle facilité de réglage, on doit recourir à telle ou telle solution; les solutions diffèrent assez pour que le choix reste arbitraire entre certaines limites.

Il y a cependant des conditions générales à réaliser.

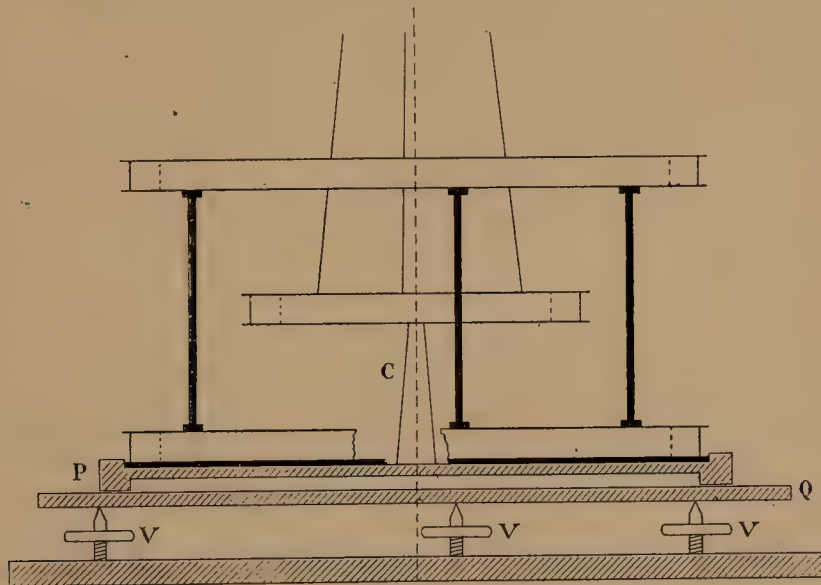


Fig. 184.

Pour les étudier, je me servirai de l'excellent travail exécuté par M. Janet et ses élèves au Laboratoire central d'électricité.

La figure 184 représente schématiquement une partie de la moitié de l'appareil.

2°. — Le fléau d'une balance porte (en plus des plateaux) deux bobines qui, une fois réglées, ont leurs spires horizontales et se trouvent respectivement placées symétriquement par rapport à deux bobines fixes, parallèles, aussi identiques que possible.

Les connexions sont établies de manière que les actions des quatre bobines fixes sur les deux mobiles soient concordantes. L'expérience consiste à peser les actions électromagnétiques, par suite à mesurer en valeur absolue l'intensité d'un courant *caractérisé simultanément par quelque autre effet*.

Toute la difficulté de l'expérience est dans la détermination de la constante de l'appareil, c'est-à-dire des forces qui doivent se produire quand le courant vaut un ampère *par définition*. Cette détermination revient à celle des positions relatives de toutes les spires les unes par rapport aux autres, ou, si l'on veut (§ 102), des positions des spires équivalentes aux bobines.

3°. — Les carcasses des bobines sont tournées dans du bronze non magnétique; la section de la gorge est un rectangle voisin du carré. Je cite des chiffres pour fixer les idées; *j'arrondis les nombres*.

Le diamètre du fil nu est $0^{\text{mm}},7$ avec son isolant $0^{\text{mm}},8$.

Les bobines fixes sont constituées chacune par 18 couches de 23 spires (414 spires); les bobines mobiles contiennent chacune 12 couches de 16 spires (192 spires).

La longueur du fil est mesurée sur un banc horizontal, par bouts de 24 mètres, avant son enroulement et sous la tension d'enroulement (4 kilos). Connaissant la longueur L des 23 spires d'une couche, on a le diamètre moyen D de cette couche par la formule :

$$23 \cdot \pi D = L.$$

On a le diamètre moyen Δ de la bobine au moyen de la longueur totale Λ par la formule :

$$414 \cdot \pi \Delta = \Lambda.$$

Comme vérification de bon enroulement, le diamètre Δ ainsi trouvé doit être précisément la moyenne des diamètres moyens de la neuvième et de la dixième couches, puisqu'il y en a 18 en tout.

Les bobines fixes ont environ 36 centimètres; les bobines mobiles, environ 19 centimètres de diamètre moyen.

La longueur du solénoïde suivant l'axe (appelée $2E$ au § 102) est mesurée au cathétomètre. On a donc les éléments nécessaires pour le calcul de l'attraction, quand la bobine mobile est symétriquement placée par rapport aux bobines fixes.

4°. — Pas de difficulté pour les connexions des bobines fixes. Pour les bobines mobiles, on utilise du fil d'argent de 20μ de

diamètre, enroulé suivant une spirale de 200μ de diamètre. On obtient ainsi un ressort souple, élastique et se refroidissant aisément.

Deux groupes de 4 spirales en parallèles, longues de 15 centimètres, correspondent à chacune des bobines mobiles.

On a trouvé pour la force totale, quand un courant, dont l'intensité vaut un C. G. S., passe dans les six bobines :

$$414 \times 192 \times 26 \text{ dynes environ,}$$

soit pour un ampère :

$$414 \times 192 \times 0,26 \text{ dynes} = 20670 \text{ dynes,}$$

ou encore :

$$20670 : 981 = 21^{\text{gr}}, 07.$$

La constante de l'appareil a , c'est-à-dire le poids à ajouter dans un des plateaux pour rétablir, après renversement du courant dans les bobines mobiles, l'équilibre précédemment établi, est double du poids précédent. En fait, elle était exactement :

$$38,831 \text{ grammes-force à Paris.}$$

5°. — Le réglage des bobines en positions relatives résulte, en grande partie, de la construction de l'appareil dont les pièces sont tournées avec soin. Les bobines fixes, dont les joues sont parfaitement dressées, sont assemblées au moyen de trois colonnes de bronze de même longueur. Le système repose sur un plateau dans lequel un logement est obtenu au tour; au centre de ce plateau est une colonne C, elle-même ajustée au tour. Elle permet de placer convenablement la bobine mobile dont la joue inférieure est percée d'un trou de diamètre peu supérieur à celui de l'extrémité de la colonne.

Le réglage du plateau P en position sur le plateau Q se fait au moyen de vis de rappel (non représentées); le réglage horizontal des bobines fixes est obtenu avec les vis calantes V.

Enfin les trois tiges qui relient la bobine mobile à l'étrier de la balance sont réglables en longueur.

6°. — L'emploi de deux bobines fixes aussi identiques que possible, et d'une bobine mobile placée symétriquement par rapport aux premières, rend sans inconvénient un réglage *en hauteur* approximatif de cette dernière. En effet, la position exacte correspond à un maximum des attractions. Une variation d'un millimètre ne donne guère qu'une erreur de 1 : 5000 sur la force; par suite, de 1 : 10000 sur l'intensité du courant.

Même conclusion pour une erreur de parallélisme entre la direction des plans des spires de la bobine mobile et celle des plans des spires des bobines fixes.

Les deux groupes de trois bobines A, A, B; A', A', B' ne sont pas tellement éloignés que les bobines A n'aient aucune action sur B', les bobines A' sur B. Pour éliminer cette action parasite, on renverse le courant dans les trois bobines d'un groupe et l'on prend la moyenne des résultats obtenus. On vérifie immédiatement que si l'action parasite augmente le résultat dans la première opération, elle le diminue d'une quantité égale dans la seconde.

Nous parlerons plus loin des résultats, à propos des forces électromotrices.

CHAPITRE IX

MESURES DES RESISTANCES, DES FORCES ÉLECTROMOTRICES ET DES INTENSITÉS

Résistances.

167. Résistivité. Résistances.

La loi d'Ohm revient à poser que toute matière homogène isotrope est caractérisée par un paramètre ρ qu'on appelle *résistivité*; il peut être défini comme le quotient de la chute de potentiel par l'ampérage, quand le courant passe normalement aux faces d'un cube d'un centimètre de côté. Dans la formule : $R = \rho l : s$, du § 105, relative aux conducteurs cylindriques, on fait :

$$l = s = 1.$$

La résistivité est très variable suivant les corps.

Voici quelques nombres pour fixer les ordres de grandeur; ils sont exprimés en microhms ou millionièmes d'ohm (10^{-6}).

Argent	Cuivre	Fer	Maillechort.
1,49	1,58	9,6	20

Par exemple, un kilomètre de fil de cuivre d'un centimètre carré de section (diamètre 1^{cm},123) a une résistance de 0,158 ohms. Un kilomètre de fil de fer de 4 millimètres de diamètre a une résistance de 7^m,68 : c'est la grosseur des fils ordinaires employés en télégraphie.

La résistivité croît généralement avec la température. On pose :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t + \beta t^2 + \dots).$$

Pour les métaux purs, le coefficient α (*coefficient de température*) est de l'ordre du coefficient de dilatation de l'air 0,00367 : la résistance croît d'un tiers environ quand on passe de 0 à 100 degrés.

Nous avons dit dans notre *Cours de Thermodynamique*, première partie, § 38, comment on utilise ces variations de résistance pour la

mesure des températures; nous reviendrons là-dessus plus loin (bolomètre, § 181).

Pour certains alliages, le coefficient de température α est quasiment nul :

Manganine	(Cu, 84; Mn, 12; Ni, 4),
Constantan	(Cu, 50; Ni, 50),
Maillechort	(Cu, 50; Zn, 30; Ni, 20).

La majeure partie de l'appareillage électrique étant en laiton, voici la composition moyenne et les paramètres caractéristiques de cet alliage :

1 ^{er} titre	(Cu, 66; Zn, 34)	$\rho = 5,5$ microhms-centimètres,
2 ^e titre	(Cu, 60; Zn, 40)	$\rho = 8,5$ microhms-centimètres.

168. Rhéostats.

On appelle *rhéostat* tout appareil qui permet d'introduire dans un circuit une résistance variable d'une manière continue ou discontinue.

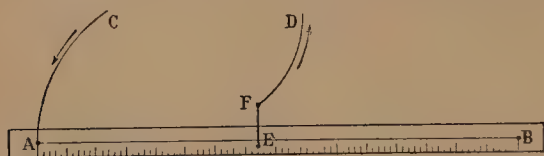


Fig. 185.

1°. — Le rhéostat le plus simple est représenté dans la figure 185.

Un fil AB est tendu sur une règle de bois; le contact mobile E permet d'en prendre une longueur quelconque. Si le fil

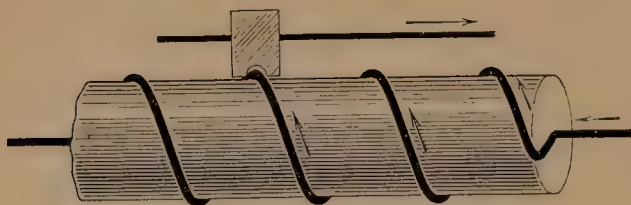
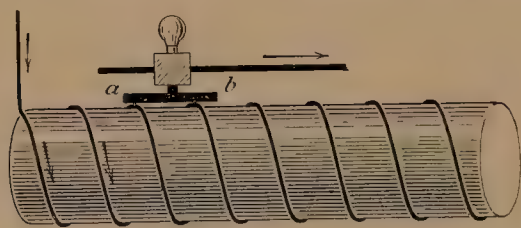


Fig. 186.

est cylindrique et homogène, la résistance est proportionnelle à la longueur. On emploie l'appareil pour obtenir deux résistances dans un rapport connu :

$$\overline{AE} : \overline{EB}.$$

Le contact se fait à la main, ou à l'aide d'un couteau, glissant le long d'une tige, qu'on laisse appuyé sur le fil.

Le défaut de ce rhéostat est de ne faire varier la résistance que de quantités très petites, à moins de prendre un fil si fin qu'on risque de le rompre ou de le détériorer en produisant le contact.

2°. — Un fil nu est enroulé sur un cylindre isolant (que parfois l'on supprime quand le fil est par lui-même suffisamment

rigide); les spires très rapprochées ne se touchent pas. Un contact ab appuie dessus et se déplace suivant une génératrice. La résistance varie (en théorie) spire par spire.

L'appareil est transformable en rhéostat *continu* : le contact métallique se déplace le long du fil et décrit une hélice. Ce dispositif serait incommode : on préfère rendre le fil et le cylindre isolant solidairement mobiles autour de l'axe de celle-ci (qui sert à amener le courant), et permettre au contact métallique de glisser sur une tige immobile parallèle à l'axe; elle sert à emmener le courant. Le contact est creusé d'une encoche où passe le fil. Quand le cylindre tourne, le fil entraîne le contact le long de la tige, comme une vis fait de son écrou.

169. Appareillage ordinaire.

L'appareillage ordinaire se ramène à deux types.

1°. — L'une des formes du premier type est représenté fig. 187. Une manette Oab (métallique, mais tenue par un manche isolant) tourne autour de l'axe O . Elle s'appuie sur des *plots* de laiton 1, 2, ... 7, que relient les résistances généralement égales 1, 2, ... 6. La partie ab est assez longue pour ne pas quitter un plot sans déjà toucher le suivant. Le courant arrive par l'axe O et sort par le plot 7 (ou passe en sens inverse, peu importe).

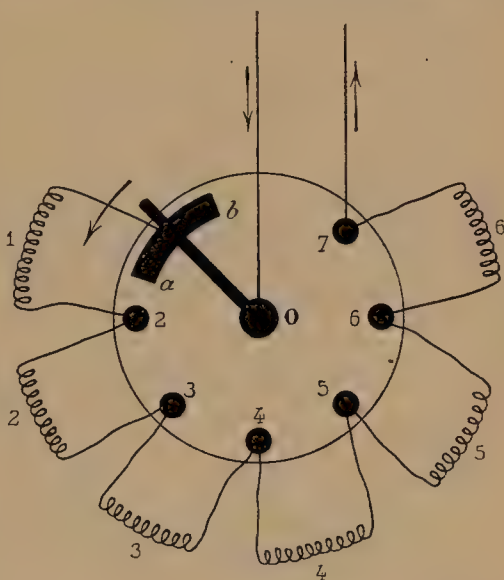


Fig. 187.

Dans la position représentée, toutes les résistances sont en circuit. En tournant la manette dans le sens de la flèche, on les supprime une à une.

Une remarque est nécessaire. Quand, la manette tournant dans le sens de la flèche, la pièce ab touche simultanément les plots 1 et 2 (le plot 1 est caché par elle), la résistance équivalente à la dérivation formée par elle et par la résistance 1 est *plus petite* que sa propre résistance. Quand elle quitte le plot 1, la résistance *augmente* donc; mais cette augmentation est insignifiante, la résistance de la pièce ab étant de quelques millièmes d'ohm, et les résistances 1, 2, ... étant de l'ordre de l'ohm.

Une seconde forme de ce type est représentée dans la figure 188.

Au lieu d'une manette, on utilise une fiche conique qui établit le contact entre la barre AD et l'un des plots 1, 2, 3, ... reliés par

les résistances à intercaler. Suivant le trou où se loge la fiche, on met en circuit les résistances 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$,...

Deux cas à considérer.

Avec l'appareil figuré, on ne peut changer la fiche de place sans rompre le circuit. Si le plot 5 communique une fois pour toutes avec la barre A, on ne peut changer la fiche de place sans mettre en circuit toutes les résistances de la ligne de plots.

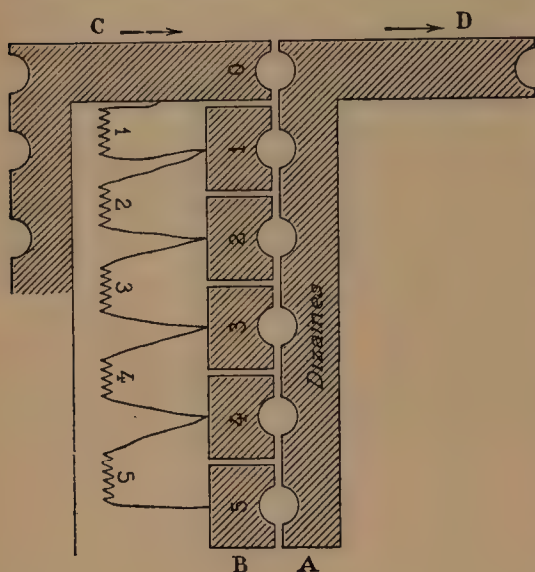


Fig. 188.

2°. — Le second type est représenté dans la figure 189.

Les résistances 1, 2, 3,... sont soudées aux tiges de laiton 1, 2, 3,... On utilise des fiches en nombre égal à celui des trous séparant les différents plots. Pour mettre une résistance en circuit, on supprime la fiche correspondante : les résistances sont donc inter-

calées une à une et dans l'ordre qu'on veut.

La partie métallique représentée par les figures 188 et 189 est généralement fixée sur le couvercle (en ébonite) d'une boîte en bois paraffiné. Le second type présente l'inconvénient suivant. Si, après

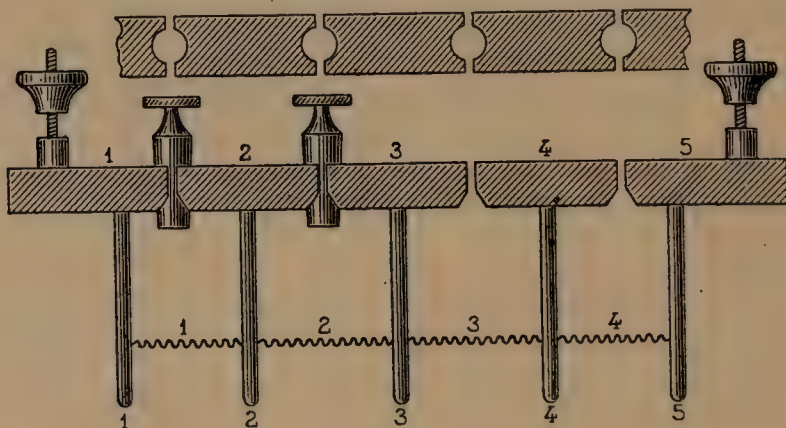


Fig. 189.

avoir serré n fiches, on en supprime une, les autres fiches se desserrent à cause de l'inévitable jeu des pièces : d'où la nécessité de renfoncer toutes les fiches après suppression d'une seule. Comme on oublie généralement cette précaution, les contacts sont mauvais et les mesures faussées.

170. Boîtes de résistances.

Il s'agit de mettre à volonté en circuit des résistances représentées par les nombres successifs et de manière que les divisions de l'appareil correspondent au système décimal. Intentionnellement je n'ajoute pas *avec la plus grande économie de matière* : l'économie de la matière brute passe ici après la facilité du réglage et la commodité de l'emploi.

Les carcasses métalliques des boîtes de résistances sont décrites au paragraphe 169.

1°. — On monte sur la même boîte (en ébonite ou en bois paraffiné) plusieurs fois le dispositif 1° du paragraphe 169. Chaque division de l'appareil forme un arc de cercle ou une ligne ; elle comporte neuf ou dix résistances respectivement égales à 1, 10, 100, ... ohms (*décades*). Dans le premier cas, pour compléter la décade, il faut recourir à la décade suivante.

Avec le premier système, on doit toujours craindre que le ressort qui pousse la manette contre les plots ne faiblisse : auquel cas les contacts sont mauvais. Sous ce rapport, le second système est préférable : nous avons dit son défaut.

2°. — Avec le dispositif 2° du paragraphe 169, on procède comme pour les boîtes de poids. On utilise une des séries suivantes :

1, 2, 2, 5;	10, 10, 20, 50;	100, 100, 200, 500;...
1, 2, 2, 5;	10, 20, 20, 50;	100, 200, 200, 500;...
1, 2, 3, 4;	10, 20, 30, 40;	100, 200, 300, 400;...

Il y a toujours quatre résistances par décades. La première série (qui est celle des boîtes de poids) n'est guère utilisée. Les autres donnent, avec chaque décade, l'unité d'ordre supérieur :

$$1 + 2 + 2 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Elles fournissent donc toutes les résistances de 1 à 10, 110, 1110, ... avec 4, 8, 12, ... résistances.

3°. — La figure 190 montre qu'il est possible de réaliser les résistances de 0 à 9 avec quatre résistances (1, 1, 3, 4) en n'utilisant qu'une fiche comme au 1°. Quand aucune fiche n'est introduite, on a la résistance 9. On économise ainsi cinq résistances et cinq réglages sur neuf, soit plus de la moitié. Les connexions marquées d'un trait doivent avoir une résistance négligeable.

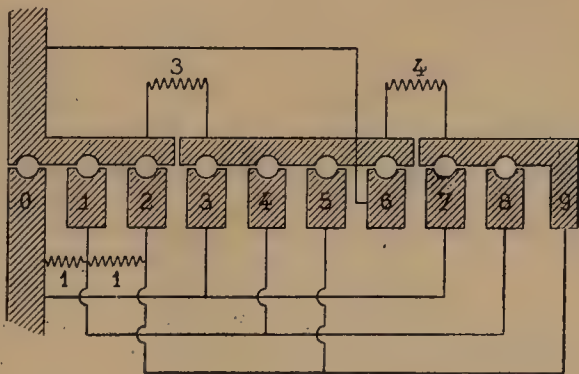


Fig. 190.

4°. — INSTALLATION DES BOBINES.

Le fil employé à la confection des bobines doit avoir un coefficient de température quasi nul : d'où l'emploi d'alliages spéciaux (constantan, manganine,...). Il est soigneusement isolé par deux couches

de soie. Pour éviter les phénomènes d'induction, on le double avant de l'enrouler, comme le montre la figure 191. Ses extrémités sont soudées aux plots après réglage sur des résistances étalons. Parfois on soude au fil (toujours fin) un bout de fil plus gros, qui permet un réglage commode et précis.

Les bobines sont étalonnées au millième; si on désire une précision plus grande, il est bon de ne pas se fier aux constructeurs et de réétalonner (c'est du reste un précepte général).

La surface de la plaque d'ébonite sur laquelle la carcasse métallique est fixée s'altère à la longue et devient conductrice; il faut la nettoyer. La résistance propre du contact produit par une fiche est de l'ordre de 0,0001 ohms; il faut tenir les fiches propres et ne pas les graisser en en tenant la partie métallique avec les doigts.

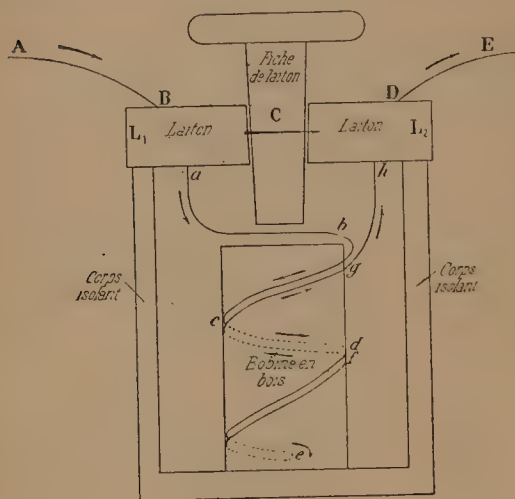


Fig. 191.

171. Rhéostats de lampes.

Les rhéostats de lampes sont très commodes dans les laboratoires.

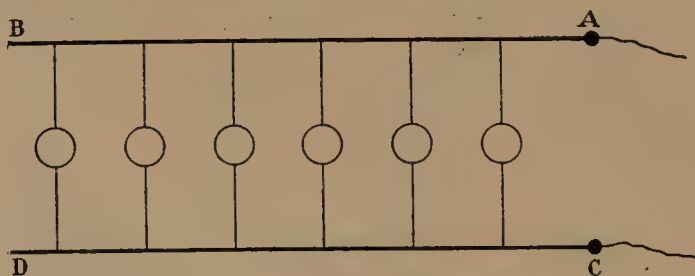


Fig. 192.

Elles fournissent à très bon compte des résistances de l'ordre de 200 ohms à froid.

Pour les installer en série, on emploie l'un des dispositifs 1° du paragraphe 169. On trouve dans le commerce des appareils tels que celui de la figure 187; il suffit de monter les lampes dessus.

Généralement on installe les lampes en parallèle. Pour cela, les

douilles (à vis) sont en dérivation sur deux gros fils AB, CD, qui servent d'électrodes; on met les lampes en circuit, et on les sort du circuit en les vissant dans leur douille et en les dévissant.

On obtient ainsi des résistances approximatives R , $R : 2$, $R : 3, \dots$

Pour faire du luxe, on emploie des interrupteurs ordinaires d'éclairage.

L'installation en parallèle est très commode pour utiliser le voltage des secteurs (110 à 125 volts) au fonctionnement des appareils de cours : autant de lampes en parallèle, autant de fois une certaine fraction d'ampère (approximativement, bien entendu).

On règle ainsi directement l'intensité du courant.

On n'oubliera pas (§ 131) que *la résistance des lampes à filament de carbone diminue quand la température s'élève*; c'est l'inverse pour les lampes à filament métallique.

172. Mesure des résistances par le pont ordinaire de Wheatstone.

Le lecteur trouvera aux paragraphes 110 et 115 la théorie complète du pont de Wheatstone. Il s'agit de savoir comment opérer et comment obtenir les meilleurs résultats.

1°. — Pour que le pont (fig. 131) soit équilibré, il faut qu'entre les résistances a , b , c , d (reliées par des résistances négligeables)

existe la relation : $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$, $d = \frac{a}{b} \cdot c$

D'où deux méthodes fondamentales.

a) Nous donnons le rapport $a : b$; la mesure de la résistance inconnue d revient à faire varier la résistance c jusqu'à ce que le pont soit équilibré. On utilise, dans ce cas, trois boîtes de résistances.

Deux d'entre elles (placées en a et b) contiennent chacune les résistances 1, 10, 100, 1000; elles permettent d'obtenir pour le rapport $a : b$ les valeurs 1, 10, 100, 1000, et les rapports inverses.

En c on dispose une boîte donnant toutes les résistances de 1 à 10000 ohms, par exemple.

Nous verrons plus loin quel rapport fixe $a : b$ il faut choisir.

b) Nous donnons la résistance c ; la mesure de la résistance inconnue d revient à faire varier le rapport $a : b$.

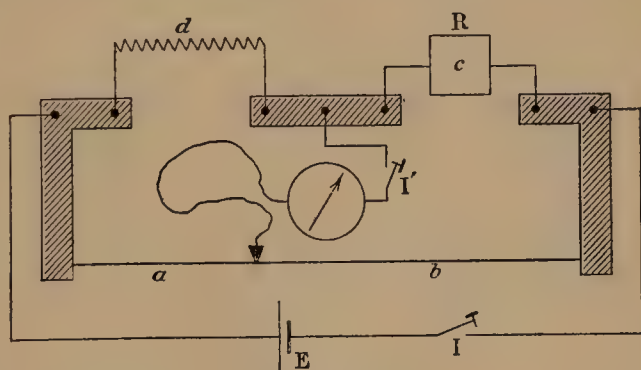


Fig. 193.

On utilise le pont à corde (§ 168). Les résistances a et b sont entre elles comme les longueurs correspondantes du fil calibré (fig. 193).

En c on met une boîte contenant les résistances 1, 10, 100, 1000 ohms.

2°. — MODE OPÉRATOIRE.

Quelle que soit la méthode, on procède toujours de même.

Pour ne pas envoyer de courant trop fort dans le galvanomètre, il est prudent de commencer le réglage avec le galvanomètre shunté; on augmente la sensibilité apparente à mesure qu'on s'approche de l'équilibre.

On doit fermer le circuit de la pile (interrupteur I) avant de fermer le circuit du galvanomètre (interrupteur I'). Nous verrons (§ 529) que l'équilibre obtenu pour l'état permanent ne l'est pas pour l'état variable si l'une des résistances est inductive (bobine contenant du fer). Quand alors on néglige la précaution susdite, l'aiguille est déplacée pendant l'état variable; on perd le temps nécessaire à l'arrêter, outre l'incertitude provenant d'une variation possible du zéro.

On ne doit fermer le circuit de la pile que juste au moment de la mesure; sinon le courant risque d'échauffer les résistances et de les faire varier.

Peu importe que la pile soit polarisable ou non, puisque sa force électromotrice n'intervient pas.

3°. — INTERPOLATION.

L'équilibre est facile à obtenir, parce que le courant dans le galvanomètre change de sens quand la différence $bd - ac$ change de signe. On a en effet (§ 115) :

$$G = \frac{E}{\Delta} (bd - ac).$$

D'où un procédé d'interpolation proportionnelle qui dispense d'avoir des boîtes contenant un grand nombre de décades.

Supposons que pour n ohms sur la boîte, la déviation permanente du galvanomètre soit α divisions; pour $n + 1$ ohms, elle est α' en sens contraire. La résistance qui équilibrerait exactement le pont, est $n + v$:

$$v = \alpha : (\alpha + \alpha').$$

4°. — CONDITIONS OPTIMA.

On peut discuter la formule générale du paragraphe 115 pour en déduire les conditions optima.

Tâchons de comprendre pourquoi c'est du temps perdu.

Opérons suivant la première méthode. Nous avons intérêt à utiliser toute l'étendue de la boîte placée en c . Si elle va de 1 à 1000 ohms et si la résistance à mesurer est voisine de 8 ohms (exactement 8,06 par exemple), nous sommes forcés de prendre le rapport $a : b$ égal

à 1 : 100. L'équilibre aura lieu avec 806 ohms sur la boîte de résistance. Avec le rapport 1 : 10, la déviation serait d'un sens pour 80 ohms, de l'autre sens pour 81 : nous devrions opérer par interpolation pour dépasser la précision de 1 ‰.

Le lecteur variera les hypothèses; il verra que le choix du rapport $a : b$ est quasiment imposé.

Opérons suivant la seconde méthode. Il est clair que le contact doit être au voisinage du milieu du fil pour ne pas exagérer les erreurs ($a = b$ approximativement); ce qui impose la résistance fixe c .

Au surplus, quand deux procédés paraissent également bons, il faut les employer tous deux et comparer les résultats.

C'est bien plus intelligent que de faire de l'algèbre.

173. Obtention d'un ohm légal.

1°. — On considère habituellement les constructeurs comme des gens exceptionnels ayant à leur disposition des moyens extraordinaires. On leur achète des boîtes de résistances, des étalons, tout ce qui passe par la tête de demander, sans trop s'inquiéter de savoir comment ils vous satisfont, en apparence le plus souvent. Or, le seul avantage qu'ils ont sur le physicien est une installation fonctionnant d'une manière permanente, et des employés, décorés du nom d'ingénieurs (tout le monde l'est aujourd'hui), qui font tous les jours la même besogne. Est-il nécessaire de dire que leurs méthodes sont celles des physiciens? Pour tous les étalonnages de précision, ils ont recours aux bureaux officiels où se maintiennent les excellentes traditions de la métrologie envisagée comme une fin. Il est heureux que ces traditions existent, et si la plupart des physiciens préféreraient de beaucoup la relégation, avec régime du pain sec et de l'eau pure, au calibrage des tubes, ils se félicitent que d'aucuns y trouvent des joies pures.

Du reste, ils seraient inexcusables d'ignorer comment on calibre un tube.

Je désire montrer au lecteur un aperçu schématique de l'opération complète : obtention d'un ohm étalon, obtention d'une boîte de résistance.

Je rappelle les définitions.

L'OHM VRAI est un milliard (10^9) d'unités électromagnétiques C. G. S. Il est défini par les deux formules :

$$EIt = \text{Énergie}, \quad IR = E.$$

L'unité d'intensité est définie (§ 70) au moyen du feuillet équivalent, l'unité de force électromotrice par la condition que Ei représente une puissance en C.G.S.

L'OHM INTERNATIONAL est la résistance d'une colonne de mercure

à 0°, de section uniforme, de 106^{cm},300 de longueur et de masse 14,4521 grammes.

L'OHM LÉGAL ANCIEN est la résistance d'une colonne de mercure à 0° de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur.

2°. — CALIBRAGE DU TUBE.

Les tubes de verre se fabriquent par étiration (voir notre *Thermodynamique*, § 36). On ne peut songer à calibrer qu'un tube dont les variations de section sont continues. Supposons le tube divisé en parties d'égale longueur, en centimètres pour simplifier l'écriture. Soit n le numéro d'ordre du trait compté à partir d'une origine servant de zéro. En raison de notre hypothèse, posons qu'entre l'origine et le trait n , le volume est représenté par la formule :

$$v = an + bn^2 + cn^3,$$

où a , b , c sont des constantes.

Nous nous limitons à trois termes; le raisonnement est général.

Le calibrage consiste (comme pour les thermomètres) à promener dans le tube un index de mercure, à le déplacer d'un bout à l'autre, la température demeurant invariable, enfin à déterminer par quels traits n_0 et n_1 il est limité dans ses diverses positions.

Soit φ le volume (inconnu) de l'index.

Chaque groupe de déterminations fournit une équation :

$$\varphi = a(n_1 - n_0) + b(n_1^2 - n_0^2) + c(n_1^3 - n_0^3).$$

A la rigueur, trois expériences suffisent pour déterminer a , b , c , en fonction de φ ; les autres servent de vérifications. Plus exactement, on les combine toutes par la méthode des moindres carrés (*Math. Gén.*, § 263). En définitive on a :

$$v = \varphi(\alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3),$$

où α , β , γ , sont complètement déterminés.

La section (variable) du tube est :

$$s = \frac{dv}{dn} = \varphi(\alpha + 2\beta n + 3\gamma n^2).$$

Soit ρ la résistivité du mercure.

La résistance de la longueur dn est :

$$dR = \frac{\rho dn}{s} = \frac{\rho}{\varphi} \frac{dn}{\alpha + 2\beta n + 3\gamma n^2}.$$

Pour aller plus loin, introduisons la définition de l'ohm légal.

Soit δ la densité du mercure à 0°; soit σ la section uniforme du tube qui correspond à la définition; on a :

$$1^\omega = \frac{\rho \cdot 106,3}{\sigma}, \quad \sigma \times 106,3 \times \delta = 14,4521;$$

$$\text{d'où} \quad \sigma = \frac{14,4521}{\delta \times 106,3}, \quad 1^\omega = \rho \delta \cdot \frac{106,3^2}{14,4521}.$$

Posons pour abrégé : $\rho\delta = k$;

k est une constante déterminée par la définition de l'ohm international.

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour calculer la résistance d'une longueur N quelconque de notre tube. Remplissons cette longueur de mercure et pesons; soit m la masse :

$$m = v\delta = \varphi\delta(\alpha N + \beta N^2 + \gamma N^3) = k \frac{\varphi}{\rho} (\alpha N + \beta N^2 + \gamma N^3).$$

$$R = \frac{\rho}{\varphi} \int_0^N \frac{dn}{\alpha + 2\beta n + 3\gamma n^2}$$

$$= \frac{k}{m} (\alpha N + \beta N^2 + \gamma N^3) \int_0^N \frac{dn}{\alpha + 2\beta n + 3\gamma n^2},$$

formule dans laquelle tout est connu.

Elle se généralise immédiatement si nous employons un développement ayant plus de trois termes.

Quand on adopte 13,595 comme masse spécifique δ du mercure, on trouve :

$$\rho = 94,076 \cdot 10^{-6}; \quad \text{d'où :} \quad k = 1,27812 \cdot 10^{-3}.$$

30. — Le tube calibré, dont on a déterminé la résistance à



Fig. 194.

partir de la définition, est placé de manière à aboutir librement dans deux vases de dimensions relativement grandes, pleins de mercure et dont la résistance soit négligeable.

La figure 194 représente une coupe de l'appareil.

La prise du courant se fait avec de grosses tiges de cuivre platinées.

Il faut tenir compte du *facteur d'épanouissement*. A la sortie du tube, le milieu conducteur a beau être quasiment indéfini, les lignes de courant ne s'écartent que progressivement : la résistance hors du tube reste notable (§ 120). On démontre que le tube à chacune de

ses extrémités doit être fictivement allongé de 0,82 fois son diamètre. La correction totale, de l'ordre de 2 millimètres, est loin d'être négligeable.

174. Comparaison de deux résistances voisines.

La figure 195 représente l'appareil utilisé.

C'est le pont ordinaire à résistances, complété par un fil calibré.

Soit x et $l-x$ les résistances des deux parties du fil.

Quand l'équilibre est atteint, on a les conditions équivalentes :

$$\frac{r}{r'} = \frac{a+x}{b+l-x}.$$

1°. — OBTENTION D'ÉTALONS SECONDAIRES ; OBTENTION D'UNE RÉSISTANCE ÉGALE A UNE AUTRE.

On emploie la méthode de substitution qui ne suppose aucune résistance connue.

Utilisons en r , r' , b , des résistances quelconques, mais dont l'une soit variable. Équilibrons le pont pour la résistance a (qui sera, par exemple, l'ohm international), de manière que le contact C soit

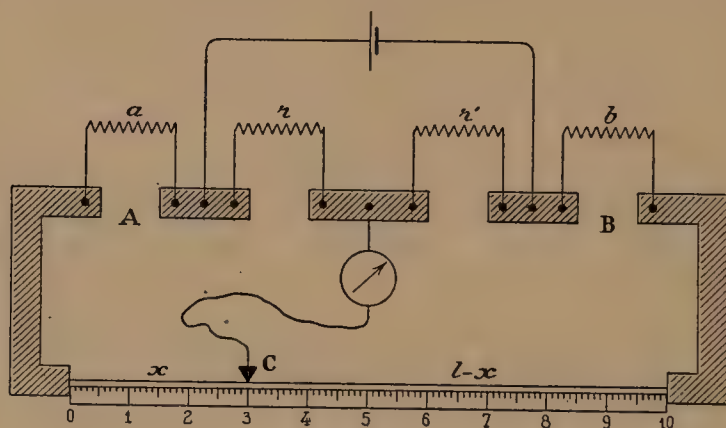


Fig. 195.

alors à peu près au milieu du fil Aa.

A la résistance a , substituons la résistance a_1 que nous voulons lui rendre égale. Il suffit d'obtenir l'équilibre du pont pour la même position du contact C, sans toucher aux résistances (inconnues) r , r' , b .

Le fil permet de suivre commodément la marche du réglage.

2°. — Exprimons la différence $a_1 - a$ en fonction de la résistance de l'unité de longueur du fil. Les deux opérations faites ci-dessus donnent :

$$\frac{r}{r'} = \frac{a+x}{b+l-x} = \frac{a_1+x_1}{b+l-x_1} = \frac{(a-a_1) + (x-x_1)}{x_1-x}. \quad (1)$$

Recommençons en échangeant la place des résistances a et b . Appelons y et y_1 ce que deviennent x et x_1 quand le pont est équilibré avec les résistances a et a_1 ; on a :

$$\frac{r}{r'} = \frac{b+y}{a+l-y} = \frac{b+y_1}{a_1+l-y_1} = \frac{y-y_1}{(a-a_1)-(y-y_1)}. \quad (2)$$

La comparaison des équations (1) et (2) donne :

$$a - a_1 = (y - y_1) - (x - x_1).$$

3°. — CALIBRAGE D'UN FIL.

Supposons nulle la résistance b . Équilibrons le pont en plaçant la résistance a soit en A, soit en B. Nous avons :

$$\frac{r}{r'} = \frac{a+x}{l-x} = \frac{y}{l-y+a}; \quad \text{d'où} \quad a = y - x.$$

Recommençons l'expérience en donnant à $r:r'$ une série de valeurs; nous mesurons la résistance invariable a au moyen de portions différentes du fil. C'est exactement comme quand au paragraphe 173, 2°, nous déplaçons un index de mercure dans un tube, et déterminons la longueur qu'il occupe pour diverses positions.

Par commodité, les résistances r et r' sont constituées par un second fil sur lequel court un contact. La résistance de ce fil n'intervient pas; il peut ne pas être homogène.

175. Vérification d'une boîte de résistances.

L'opération consiste à comparer l'une des résistances à une résistance étalon, puis à comparer entre elles les diverses résistances. Cette dernière opération est possible avec la méthode du paragraphe 174, parce que les résistances sont telles qu'on peut obtenir la même somme de deux manières différentes (si la boîte est parfaite).

Utilisons, par exemple, la première série (§ 170).

Désignons la résistance de 50 ohms par le symbole (50); les deux résistances de 10 ohms s'écrivent (10) et (10').

Si la boîte était parfaite, on aurait, par exemple :

$$(50) = (20) + (10) + (10') + (5) + (2) + (2') + (1).$$

En fait, on aura :

$$(50) = (20) + (10) + (10') + (5) + (2) + (2') + (1) + \alpha,$$

$$(20) = (10) + (10') + \beta,$$

$$(10') = (10) + \gamma$$

$$(5) + (2) + (2') + (1) = (10) + \delta$$

D'où aisément en fonction de la résistance (10) :

$$(50) = 5 \cdot (10) + \alpha + \beta + 2\gamma + \delta,$$

$$(20) = 2 \cdot (10) + \beta + \gamma,$$

$$(10') = (10) + \gamma,$$

$$(5) + (2) + (2') + (1) = (10) + \delta.$$

On aura de même :

$$(5) = (2) + (2') + (1) + a,$$

$$(2') = (2) + b.$$

Réalisons une résistance $(1')$ exactement égale à (1) .

Nous pourrions comparer (2) et $(1) + (1')$.

D'où la relation : $(2) = 2(1) + c$.

D'où ensuite les relations :

$$(2) = 2(1) + c,$$

$$(2') = 2(1) + c + b,$$

$$(5) = 5(1) + a + 2c + b.$$

En définitive, nous obtenons toutes les résistances en fonction de la résistance (1) ; les corrections sont exprimées en centimètres du fil du pont que représente la figure 195.

Pour avoir les corrections en ohms, il faut comparer ce fil avec un ohm étalon.

2°. — Ces opérations sont difficiles à effectuer avec une boîte ordinaire, parce qu'il est impossible de grouper les bobines. Mais chaque constructeur a besoin d'une boîte parfaitement étalonnée dont les résistances soient séparées et groupables, et dont les connexions sont de résistance négligeable.

L'obtention d'une telle boîte à partir de l'ohm international ne demande que de la patience.

Par substitution on réalise autant de résistances (1) *correctes* qu'on le désire. Groupant deux résistances (1) , on réalise des résistances (2) *correctes*. Groupant les résistances (1) et (2) , on réalise des résistances (5) *correctes*. Et ainsi de suite.

Une telle boîte permet en particulier d'étalonner le fil du pont à corde et d'évaluer en ohm international les corrections dont il est parlé ci-dessus.

176. Résistance d'un galvanomètre, d'une pile.

1°. — RÉSISTANCE D'UN GALVANOMÈTRE.

Mettons le galvanomètre sur l'un des bras d'un pont de Wheatstone. Si le pont est équilibré, le courant n'est pas modifié par l'ouverture ou la fermeture (ou mieux la mise en court-circuit) de la diagonale g (sur laquelle se trouve le galvanomètre dans l'expérience habituelle).

C'est évident; au surplus, cela résulte de la fin du paragraphe 115 : les deux expériences correspondent à $g = 0$, $g = \infty$.

Inversement, on peut équilibrer le pont en obtenant que l'indication du galvanomètre placé sur l'un des bras reste la même, quelle que soit la résistance de la diagonale g , en particulier, pour $g = 0$ (g très petit) ou $g = \infty$. La relation $ac = bd$ est alors satisfaite; d'où la résistance du galvanomètre.

La méthode est mauvaise. Il est préférable de traiter le galvanomètre comme une résistance quelconque (après en avoir calé la partie mobile), et d'utiliser comme *galvanoscope* un appareil quelconque. Pour peu sensible qu'il soit, la précision sera plus grande qu'avec la méthode précédente.

2°. — RÉSISTANCE D'UNE PILE.

a) On met la pile sur un des bras du pont et le galvanomètre sur sa diagonale habituelle. L'expérience consiste à ouvrir ou à fermer (ou mieux à mettre en court-circuit) l'autre diagonale; si le pont est équilibré, l'indication du galvanomètre reste invariable, comme il résulte immédiatement du paragraphe 114 (fig. 130).

La méthode ne vaut pas grand'chose.

A la vérité, la résistance d'une pile est un paramètre si variable, qu'une grande précision dans la méthode de mesure est un luxe.

b) Le plus souvent on se contente de mesurer les ampérages en reliant successivement la pile de résistance r inconnue, à un ampèremètre de résistance R , à travers deux résistances R_1 et R_2 connues :

$$i_1 = \frac{E}{R + R_1 + r}, \quad i_2 = \frac{E}{R + R_2 + r}, \quad r = \frac{i_2(R + R_2) - i_1(R + R_1)}{i_1 - i_2}.$$

La mesure relative des intensités suffit.

La méthode n'est susceptible de quelque précision que si R , R_1 , R_2 , sont du même ordre que r (quelques ohms pour les piles usuelles).

177. Méthode de Matthiessen.

Elle sert à mesurer de très petites résistances. Elle revient à employer quatre fois de suite la méthode ordinaire du pont.

Dans celle-ci, on a (fig. 131) :

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c+d}.$$

Maintenons $a+b$ et $c+d$ invariables : le premier rapport sera constant.

L'une des branches du pont (fig. 196) se compose de deux boîtes complémentaires R et R' ; c'est dire que nous reportons sur l'une des boîtes la résistance que nous enlevons à l'autre :

$$R + R' = \text{Constante} = C.$$

L'autre branche du pont se compose du gros fil de nickel PQ (qui

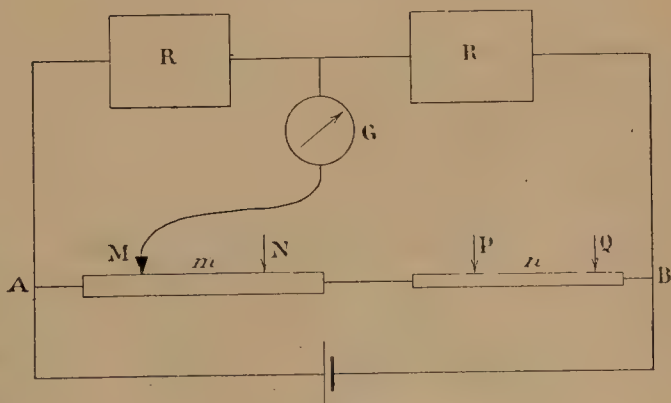


Fig. 196.

sert de terme de comparaison), de la résistance à mesurer MN, enfin des fils de connexion.

Les résistances des deux branches sont donc invariables.

L'expérience consiste à équilibrer le pont quand un contact s'appuie successivement en M, N, P, Q.

Les résistances sur les boîtes sont alors :

$$\begin{aligned} R &= R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\ R' &= C - R_1 & C - R_2 & C - R_3 & C - R_4 \end{aligned}$$

On démontrera aisément les relations :

$$\frac{\overline{AM}}{R_1} = \frac{\overline{AN}}{R_2} = \frac{\overline{AP}}{R_3} = \frac{\overline{AQ}}{R_4}.$$

D'où
$$\frac{\overline{AN} - \overline{AM}}{\overline{AQ} - \overline{AP}} = \frac{m}{n} = \frac{R_2 - R_1}{R_4 - R_3}.$$

Peu importe que la force électromotrice de la pile soit constante ou non : j'insiste, parce que certains auteurs disent le contraire.

La résistance au contact avec le couteau servant à fermer le circuit du galvanomètre n'intervient pas : lors de l'équilibre il n'y passe aucun courant.

178. Méthode du double pont.

1°. — Il s'agit de comparer entre elles deux résistances m et n (de 1 microhm à 1 ohm) assez petites pour qu'il soit impossible de négliger les résistances des fils de connexion.

La méthode doit éviter de les faire intervenir.

n est un gros fil de maillechort placé devant une règle divisée

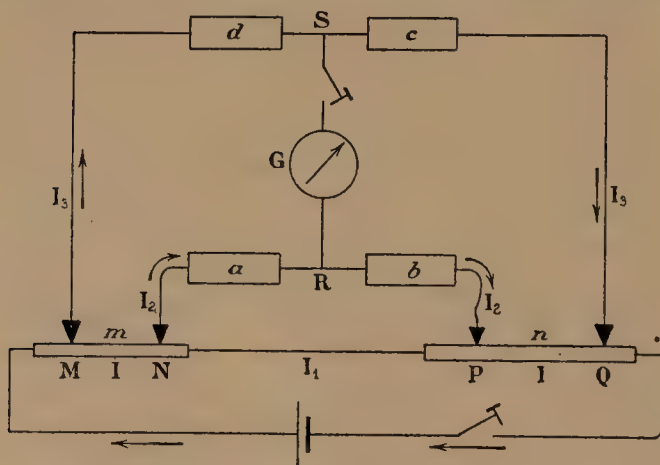


Fig. 197.

et qui sert de terme de comparaison; m est la barre ou le solide dont nous voulons la résistance entre deux points M et N (§ 119) en cen-

timètres du fil de maillechort. Deux paires de contacts (sortes de couteaux) appuient sur les conducteurs aux points M, N, P, Q. Pour faire la mesure, on déplace les couteaux P ou Q. La méthode revient à comparer les chutes de potentiel $M-N$, $P-Q$, quand nous sommes assurés que le même courant I traverse les conducteurs m et n .

Nous posons que, dans le fil de comparaison, les surfaces équipotentielles sont des sections droites et que la prise de courant au moyen des couteaux M et N n'en modifie pas la forme; d'où la proportionnalité de la résistance m à la longueur.

2^o. — Écrivons qu'il ne passe rien dans le galvanomètre.

Les potentiels en S et R sont égaux : $S=R$.

Les courants sont constants respectivement d'un bout à l'autre des circuits $a, b; d, c$; le même courant circule entre MN et PQ.

$$\text{D'où} \quad I = \frac{M-N}{m} = \frac{P-Q}{n};$$

$$I_3 = \frac{M-S}{d} = \frac{S-Q}{c}, \quad I_2 = \frac{N-R}{a} = \frac{R-P}{b}.$$

Les résistances a, b, c, d , sont prises sur des boîtes de résistances de manière qu'on ait :

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}.$$

$$\text{Il vient :} \quad \frac{N-R}{R-P} = \frac{M-S}{S-Q} = \frac{M-N}{P-Q};$$

le troisième rapport s'obtient en retranchant les deux premiers et en appliquant la condition $S=R$. Remplaçons les quantités par les quantités proportionnelles; il vient enfin :

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{m}{n},$$

équation qui donne le rapport $m:n$ au moyen des rapports égaux $a:b, d:c$, arbitrairement choisis. Si on coupe le fil où passe le courant I_1 , on retombe sur le pont simple.

179. Méthode du galvanomètre différentiel.

Les deux enroulements d'un galvanomètre différentiel (§ 154) sont en dérivation sur le circuit d'une pile (fig. 198). Si les résistances des deux branches de la dérivation sont égales, l'aiguille reste au zéro; d'où la méthode.

La résistance r à mesurer est intercalée sur une des branches; sur l'autre se trouve une boîte de résistance R .

La méthode est incommode si la résis-

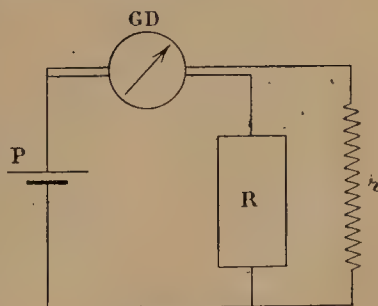


Fig. 198.

tance à mesurer est inductive : l'aiguille ne reste au zéro que pour l'état permanent ; elle commence par être déviée même si les résistances sont égales.

180. Mesure de la résistance par le voltage et l'ampérage.

1°. — La mesure de la résistance résulte de la mesure simultanée de l'ampérage et du voltage aux bornes de l'appareil :

$$A - B = ri.$$

Nous conseillons au lecteur de déterminer par cette méthode la variation de la résistance d'une lampe à incandescence (filament de

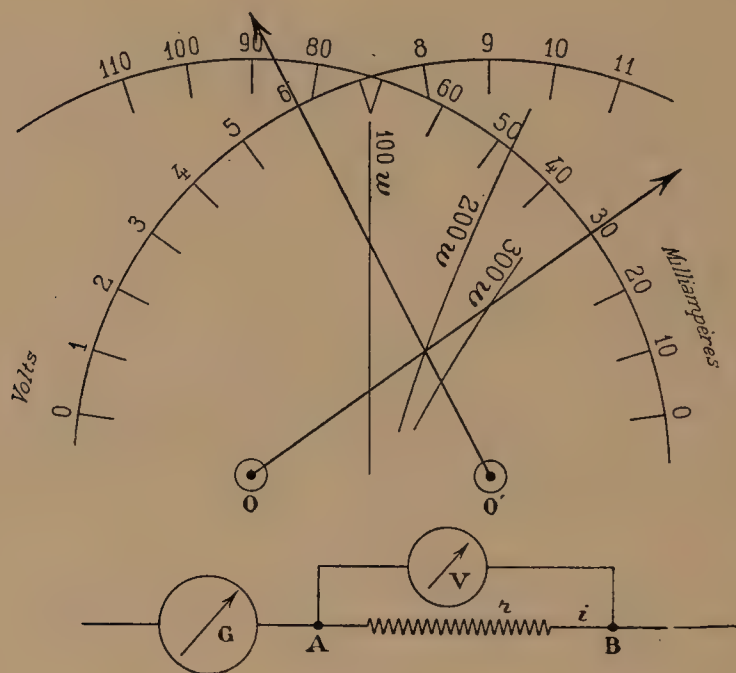


Fig. 199.

charbon, filament métallique) à mesure que i croît, par suite que la lampe s'échauffe (fig. 138).

2°. — OHMMÈTRE FERRIÉ.

Une idée ingénieuse permet de lire la résistance (fig. 199). Les centres O , O' des aiguilles des deux appareils sont au voisinage l'une de l'autre. Sur la glace de la graduation, on trace les courbes que décrit le point d'intersection des aiguilles, quand le rapport $r = (A - B) : i$ est constant ; elles ont pour cotes les résistances. Leur forme varie suivant la loi de graduation des deux appareils et la position relative des centres.

181. Variation de la résistance avec la température. Bolomètre.

La résistance des métaux purs croît avec la température.

L'accroissement de température d'un corps qui reçoit un faisceau calorifique constant suit une loi exponentielle :

$$\Delta T = A(1 - e^{-kt}).$$

On peut admettre que le facteur A est proportionnel à l'intensité du faisceau.

Sur ces principes repose la théorie du bolomètre.

Un pont de Wheatstone est équilibré. Chauffons l'une des résistances du pont en projetant dessus un faisceau calorifique : l'équilibre est détruit. Dans des conditions expérimentales toujours les mêmes, la variation de résistance, par suite l'intensité du faisceau, sont mesurées par l'intensité du courant dans le galvanomètre. Par exemple, elles sont mesurées par l'arc de première impulsion de l'aiguille du galvanomètre au moment où le faisceau tombe sur l'une des résistances.

On constitue généralement les résistances par une lame très mince de platine déposée sur du verre ; elle est convenablement découpée à la machine à diviser, pour augmenter la résistance. La figure 200 donne une idée du mode de découpage. Les quatre branches sont identiques, ce qui permet de laisser varier la température ambiante sans que le pont se dérègle.

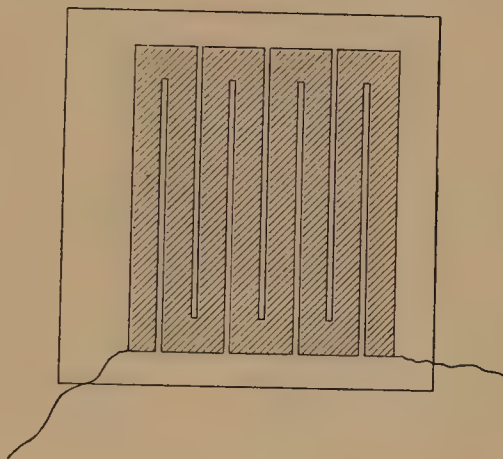


Fig. 200.

Le faisceau calorifique tombe sur une des lames dont les dimensions sont de l'ordre du centimètre carré. On peut évaluer des variations de température inférieures à un dix-millième de degré, par exemple, on peut mettre en évidence la chaleur rayonnée par la Lune.

182. Résistance des fils de cuivre pur recuit.

Parmi les nombres que renferme cette table, ceux qui donnent des grandeurs géométriques sont naturellement exacts ; les autres dépendent de la densité et de la résistivité choisies.

La densité choisie est 8,9. La résistivité est 1,598 microhms-centimètre.

Le métal auquel la table s'applique est très voisin du cuivre pur recuit, à 0° centigrade.

DIAMÈTRE	SECTION	POIDS	LONGUEUR	RÉSISTANCE	LONGUEUR
en	EN MILLIMÈTRES	EN GRAMMES	EN MÈTRES	EN OHMS	EN MÈTRES
MILLIMÈTRES	CARRÉS	par mètre	par kilogramme	par kilomètre	par ohm
0,1	0,0079	0,0699	14 306,0	2034,2	0,49
0,2	0,0314	0,2796	3 576,5	508,23	1,97
0,3	0,0707	0,6291	1 589,6	226,02	4,42
0,4	0,1257	1,1184	894,13	127,14	7,87
0,5	0,1963	1,7475	572,24	81,367	12,29
0,6	0,2827	2,5164	397,39	56,504	17,70
0,7	0,3848	3,4251	291,96	41,514	24,09
0,8	0,5027	4,4736	223,53	31,784	31,46
0,9	0,6362	5,6619	176,62	25,113	39,82
1,0	0,7854	6,9900	143,06	20,342	49,16
1,1	0,9503	8,4580	118,23	16,811	55,51
1,2	1,1310	10,066	99,348	14,126	70,79
1,3	1,3273	11,813	84,651	12,036	83,08
1,4	1,5394	13,700	72,990	10,378	96,35
1,5	1,7671	15,728	63,582	9,0407	110,61
1,6	2,0106	17,895	55,883	7,9460	126
1,7	2,2698	20,201	49,502	7,0386	142
1,8	2,5447	22,648	44,155	6,2783	159
1,9	2,8353	25,234	39,629	5,6348	177
2,0	3,1416	27,960	35,765	5,0854	197
2,1	3,4636	30,826	32,440	4,6126	217
2,2	3,8013	33,832	29,558	4,2028	238
2,3	4,1548	36,977	27,044	3,8453	260
2,4	4,5239	40,263	24,837	3,5315	283
2,5	4,9087	43,688	22,890	3,2547	307
2,6	5,3093	47,253	21,163	3,0091	332
2,7	5,7256	50,957	19,624	2,7904	358
2,8	6,1575	54,802	18,248	2,5946	385
2,9	6,6052	58,786	17,011	2,4188	413
3,0	7,0686	62,910	15,896	2,2550	443

DIAMÈTRE	SECTION	POIDS	LONGUEUR	RÉSISTANCE	LONGUEUR
en	EN MILLIMÈTRES	EN GRAMMES	EN MÈTRES	EN OHMS	EN MÈTRES
MILLIMÈTRES	CARRÉS	par mètre	par kilogramme	par kilomètre	par ohm
3,1	7,5477	67,17	14,887	2,1167	472
3,2	8,0425	71,58	13,971	1,9865	503
3,3	8,5530	76,12	13,137	1,8679	535
3,4	9,0792	80,80	12,375	1,7597	568
3,5	9,6211	85,63	11,678	1,6605	602
3,6	10,1788	90,59	11,039	1,5696	637
3,7	10,7521	95,69	10,451	1,4859	673
3,8	11,3412	100,94	9,907	1,4087	710
3,9	11,9459	106,32	9,406	1,3374	748
4,0	12,5664	111,84	8,941	1,2714	787
4,1	13,2025	117,50	8,510	1,2101	826
4,2	13,8544	123,30	8,110	1,1532	867
4,3	14,5220	129,24	7,737	1,1001	909
4,4	15,2053	135,33	7,390	1,0507	952
4,5	15,9043	141,55	7,065	1,0045	995
4,6	16,6190	147,91	6,761	0,96133	1 040
4,7	17,3494	154,41	6,476	0,92085	1 086
4,8	18,0956	161,05	6,209	0,88289	1 133
4,9	18,8574	167,83	5,958	0,84722	1 180
5,0	19,6350	174,75	5,722	0,81367	1 229
5,1	20,4282	181,81	5,500	0,78207	1 279
5,2	21,2372	189,01	5,291	0,75055	1 332
5,3	22,0618	196,35	5,093	0,72416	1 381
5,4	22,9022	203,83	4,917	0,69759	1 433
5,5	23,7583	211,45	4,729	0,67245	1 487
5,6	24,6301	219,21	4,562	0,64865	1 542
5,7	25,5176	227,11	4,403	0,62609	1 597
5,8	26,4208	235,14	4,253	0,60489	1 654
5,9	27,3397	243,32	4,110	0,58436	1 711
6,0	28,2743	251,64	3,974	0,56505	1 770

DIAMÈTRE	SECTION	POIDS	LONGUEUR	RÉSISTANCE	LONGUEUR
en MILLIMÈTRES	EN MILLIMÈTRES CARRÉS	EN GRAMMES par mètre	EN MÈTRES par kilogramme	EN OHM par kilomètre	EN MÈTRES par ohm
6,1	29,2247	260,10	3,845	0,54607	1 829
6,2	30,1907	268,70	3,722	0,52918	1 890
6,3	31,1725	277,43	3,605	0,51251	1 951
6,4	32,1699	286,31	3,493	0,49662	2 013
6,5	33,1831	295,33	3,386	0,48146	2 077
6,6	34,2120	304,49	3,284	0,46697	2 141
6,7	35,2565	313,78	3,187	0,45314	2 206
6,8	36,3168	323,22	3,087	0,43992	2 273
6,9	37,3930	332,80	3,000	0,42726	2 340
7,0	38,4845	342,51	2,920	0,41514	2 408
7,1	39,5928	352,37	2,838	0,40352	2 478
7,2	40,7150	362,36	2,760	0,39239	2 548
7,3	41,8539	372,50	2,685	0,38172	2 619
7,4	43,0085	382,78	2,613	0,37138	2 692
7,5	44,1786	393,19	2,545	0,36163	2 765
7,6	45,3646	403,74	2,477	0,35218	2 839
7,7	46,5663	414,44	2,413	0,34309	2 914
7,8	47,7836	425,27	2,351	0,33435	2 990
7,9	49,0167	436,25	2,292	0,32594	3 068
8,0	50,2655	447,36	2,235	0,31784	3 146
8,1	51,5300	458,62	2,181	0,31004	3 225
8,2	52,8102	470,01	2,128	0,30252	3 305
8,3	54,1061	481,54	2,077	0,29528	3 386
8,4	55,4177	493,22	2,028	0,28829	3 468
8,5	56,7450	505,03	1,980	0,28155	3 551
8,6	58,0881	516,98	1,934	0,27504	3 635
8,7	59,4468	529,08	1,890	0,26875	3 720
8,8	60,8212	541,31	1,847	0,26268	3 807
8,9	62,2114	553,68	1,806	0,25681	3 894
9,0	63,6173	566,19	1,766	0,25113	3 982

DIAMÈTRE	SECTION	POIDS	LONGUEUR	RÉSISTANCE	LONGUEUR
en	EN MILLIMÈTRES	EN GRAMMES	EN MÈTRES	EN OHMS	EN MÈTRES
MILLIMÈTRES	CARRÉS	par mètre	par kilogramme	par kilomètre	par ohm
9,1	65,0388	578,85	1,728	0,24564	4 071
9,2	66,4761	591,64	1,690	0,24033	4 160
9,3	67,9291	604,57	1,654	0,23519	4 251
9,4	69,3978	617,64	1,619	0,23021	4 343
9,5	70,8822	630,85	1,585	0,22539	4 436
9,6	72,3823	644,20	1,552	0,22072	4 530
9,7	73,8981	657,69	1,521	0,21620	4 625
9,8	75,4297	671,32	1,490	0,21180	4 721
9,9	76,9769	685,09	1,460	0,20755	4 818
10,0	78,5398	699,00	1,431	0,20342	4 936

Forces électromotrices.

Nous allons étudier les méthodes de comparaison des forces électromotrices indépendamment des causes qui produisent les différences de potentiel : celles-ci feront l'objet d'une étude complète dans la troisième partie de ce Cours, consacrée au *Champ électrique*.

Nous parlerons des étalons de force électromotrice quand le lecteur pourra suivre le détail de leur établissement.

Commençons par les méthodes les plus simples.

183. Méthodes applicables aux piles non polarisables.

1°. — EMPLOI D'UN AMPÈRE-MÈTRE (fig. 201).

Soit à comparer les forces électromotrices E_1 et E_2 de deux piles *non polarisables*, c'est-à-dire dont les forces électromotrices ne dépendent pas des courants qui les traversent ou les ont traversées. (Nous étudierons le phénomène dans la troisième partie de ce Cours.)

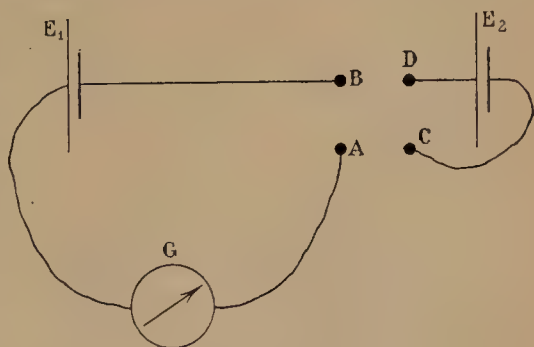


Fig. 201.

Elles sont placées dans le circuit d'un ampèremètre, d'abord dans le même sens, puis en sens opposés.

On utilise pour cela l'intervertisseur du paragraphe 69.

On mesure successivement les intensités :

$$i_1 = \frac{E_1 + E_2}{R}, \quad i_2 = \frac{E_1 - E_2}{R};$$

d'où
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_1 + i_2}{i_1 - i_2}.$$

2°. — MÉTHODE DE POGGENDORFF (fig. 202).

La figure 202 indique le montage. Les piles qui doivent être impolarisables, sont en série sur un circuit qui comprend deux boîtes de résistances. On règle les résistances de manière qu'il ne passe rien dans le galvanomètre.

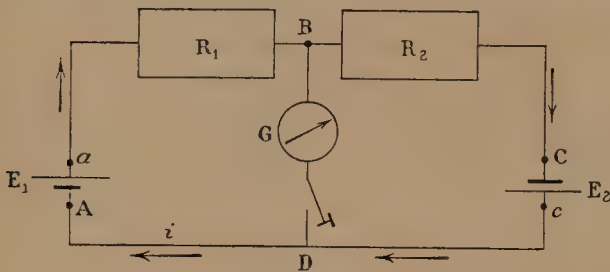


Fig. 202.

L'application des lois de Kirchhoff donne immédiatement (en négligeant les résistances des piles et des fils de connexion) :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Voici comment on se rend compte de la méthode.

Partons du point A, dont nous prendrons arbitrairement le potentiel pour zéro. Traversons l'électromoteur 1; le potentiel devient E_1 , puisque nous négligeons la résistance de celui-ci. Pendant la traversée de la résistance R_1 , le potentiel baisse de iR_1 ; en B il est $E_1 - iR_1$.

Pendant la traversée de la résistance R_2 , il baisse de iR_2 , puisque le courant de part et d'autre de B est le même (il ne passe rien dans G). Enfin, pendant la traversée de l'électromoteur 2, il remonte de E_2 .

Les potentiels étant les mêmes en B et D, il faut écrire :

$$E_1 - iR_1 = E_1 - iR_1 - iR_2 + E_2;$$

d'où
$$i = \frac{E_2}{R_2} = \frac{E_1}{R_1}.$$

184. Méthode d'opposition.

1°. — Quand la résistance d'un circuit est invariable, ainsi que la force électromotrice qu'il contient, la chute de potentiel le long du circuit par unité de résistance est une constante caractéristique du circuit dans son état actuel.

D'où une méthode simple de comparaison des forces électromotrices.

La pile P (accumulateurs) est impolarisable; nous n'avons pas besoin de connaître sa force électromotrice, pourvu qu'elle reste constante. Elle envoie un courant dans la résistance invariable AB constituée par un fil homogène et cylindrique.

Il s'agit de comparer les forces électromotrices E_1 et E_2 .

Nous installons l'appareil comme le montre la fig. 203.

Nous déplaçons le contact C jusqu'à ce qu'il ne passe rien dans le galvanomètre. La longueur $\overline{AC} = l_1$ mesure E_1 .

Nous recommençons avec E_2 , et trouvons une nouvelle longueur $\overline{AC} = l_2$.

On a évidemment :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

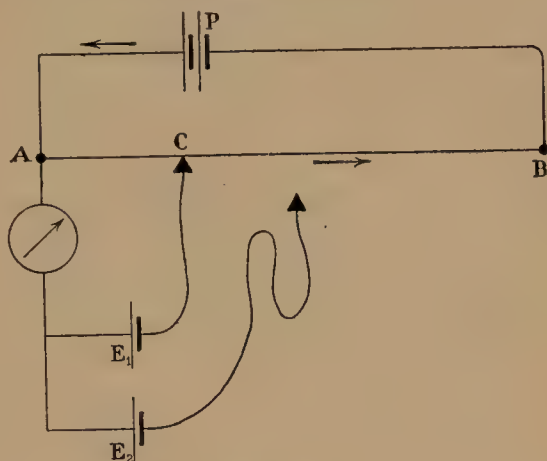


Fig. 203.

Nous pouvons constituer la résistance AB au moyen de deux boîtes de résistances R et R' complémentaires (§ 177) :

$$R + R' = \text{Constante} = C.$$

Soit R_1 et R_2 les résistances de l'une des boîtes quand il ne passe rien dans le galvanomètre, après introduction de l'une ou l'autre forces électromotrices E_1 et E_2 ; on a :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

2°. — La méthode sert à comparer des résistances.

Dans les circuits alimentés par les piles P et P' (fig. 204), dont les résistances sont invariables, le principe rappelé ci-dessus s'applique.

En MN, PQ, sont les résistances m, n à comparer. On relie A et A' de manière que les potentiels de ces points soient les mêmes.

Les boîtes R et R' sont complémentaires.

Un contact permet de

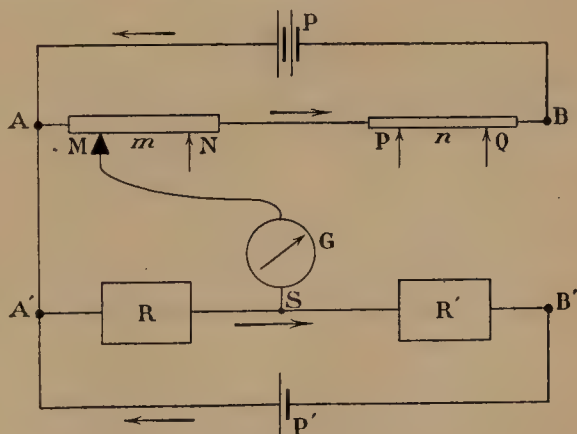


Fig. 204.

fermer le circuit du galvanomètre en touchant successivement les points M, N, P, Q. Dans chaque cas, on modifie les résistances R et R' de manière qu'il ne passe rien dans le galvanomètre.

Soient R_1, R_2, R_3, R_4 les résistances ainsi obtenues, on a :

$$\frac{m}{n} = \frac{R_2 - R_1}{R_4 - R_3}.$$

Comme vérification, on recommence l'expérience après avoir rompu le conducteur AA, et joint les points B et B'.

Au lieu du système toujours coûteux des boîtes *complémentaires*, on peut utiliser un simple fil calibré.

185. Potentiomètre.

1°. — Le potentiomètre se compose d'un circuit ayant, entre deux points B et C, une résistance invariable (égale à 20100 ohms dans la disposition figurée). Il est alimenté par une pile A impolarisable.

Ses résistances comprennent :

11	bobines de	1000	ohms,
10	—	—	200 ohms,
11	—	—	10 ohms,
10	—	—	2 ohms.

Deux doubles ponts P et P' permettent de mettre en dérivation sur deux bobines des milliers ou des dizaines, le système des dix bobines de 200 ohms ou des dix bobines de 2 ohms. Les résistances équivalentes de ces dérivations sont évidemment 1000 ohms et 10 ohms. C'est donc comme si nous réduisions à 10 le nombre des bobines des milliers et des dizaines. D'où la résistance totale indiquée.

Il est clair qu'elle ne dépend pas des bobines (milliers ou dizaines) mises en dérivation; en d'autres termes, nous ne la modifions pas, en déplaçant les doubles ponts, pourvu qu'ils restent en dérivation sur deux bobines.

2°. — Ceci posé, évaluons la différence de potentiel entre deux plots, l'un pris sur le système des centaines, l'autre sur le système des unités; par exemple, entre les plots 4 et 3 (fig. 205). Prenons comme unité de différence de potentiel, la différence e qui correspond à un ohm; par exemple, celle qui existe entre les points K et I, entre lesquels se trouve une résistance d'un ohm (différence de potentiel ohmique).

La différence de potentiel entre deux plots consécutifs de la boîte des milliers est 1000 . e , *sauf entre les plots 6 et 7, 7 et 8, où elle est moitié moindre*, puisque la résistance équivalente à la dérivation est seulement 1000 ohms. D'où résulte que la différence entre les plots extrêmes de la boîte des centaines est 1000 . e , et que la différence

entre deux plots consécutifs est $100 . e$, bien que la résistance comprise entre eux soit 200 ohms .

De même la différence de potentiel entre deux plots consécutifs

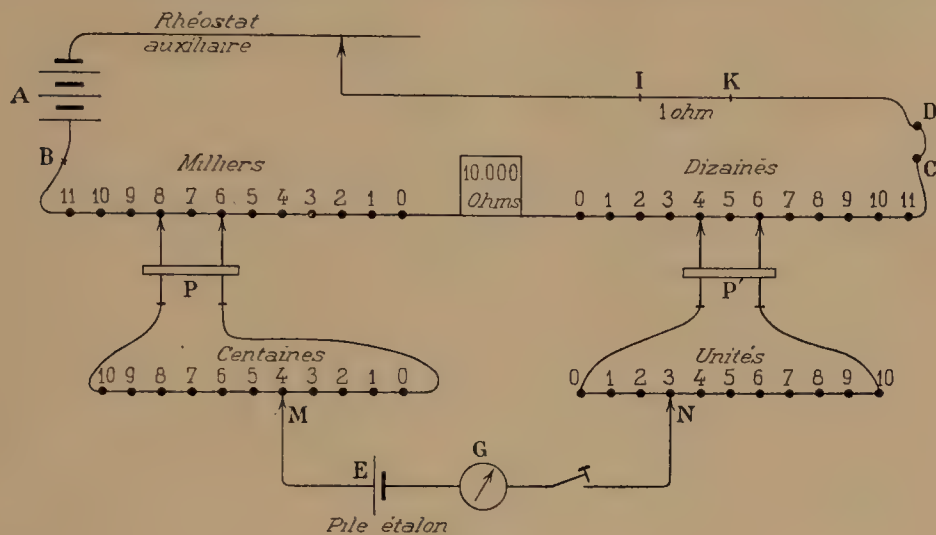


Fig. 205.

de la boîte des dizaines est $10 . e$, sauf entre les plots 4 et 5, 5 et 6, où elle est moitié moindre, puisque la résistance équivalente à la dérivation est seulement 10 ohms . D'où résulte que la différence entre les plots extrêmes de la boîte des unités est $10 . e$, et que la différence entre deux plots consécutifs est e , bien que la résistance comprise entre eux soit 2 ohms .

En définitive, la différence de potentiel comprise entre les points M et N de la figure est :

$$(400 + 6 \cdot 000 + 10 \cdot 000 + 40 + 3)e = 16 \cdot 443 . e = Re,$$

c'est-à-dire précisément le produit de e par la résistance lue sur l'appareil.

3°. — CIRCUIT COMPENSÉ ET ÉTALONNAGE.

Plaçons en E une pile étalon, en G un galvanoscope (galvanomètre ne servant qu'à indiquer le passage d'un courant, appareil de zéro), et établissons les communications avec les points M et N.

Si la différence $M-N$ est égale à la force E, il ne passe rien dans le circuit, qui est *compensé* ou *équilibré*.

Si E est connu, si R est la résistance lue sur l'appareil, la différence de potentiel ohmique e et l'intensité i du courant dans le circuit principal sont déterminées par les relations :

$$E = Re, \quad i = e = \frac{E}{R}.$$

On peut s'arranger de manière que e (ou i) ait une valeur numérique simple.

Employons, par exemple, une pile étalon Weston de force égale à $1^{\text{v}},0186$. Utilisons le rhéostat auxiliaire de manière que le circuit du galvanomètre soit équilibré pour $R = 10 \cdot 186$ ohms.

La formule donne :

$$i = e = \frac{1,0186}{10 \cdot 186} = 10^{-4}.$$

L'intensité du courant dans le circuit principal est un dix-millième d'ampère; la variation du potentiel, quand on se déplace d'un point I à un point K de ce circuit entre lesquels la résistance est d'un ohm, est de un dix-millième de volt (différence de potentiel ohmique).

Remarquons que cet étalonnage n'est pas essentiel; il simplifie seulement les calculs ultérieurs.

4°. — MESURE D'UNE FORCE ÉLECTROMOTRICE.

Pour mesurer la force E' d'une pile, on la substitue à la pile étalon et on compense le circuit du galvanomètre par déplacement des ponts P, P', et des contacts M, N.

Soit R' la résistance de compensation; on a :

$$i = e = \frac{E}{R} = \frac{E'}{R'}.$$

Nous supposons implicitement que la pile A est bien constante, de manière que les quantités égales entre elles i ou e demeurent invariables d'une expérience à l'autre.

Si la pile E' a une force électromotrice inférieure à la pile étalon, on enlève la résistance de $10 \cdot 000\omega$ de la place où elle est figurée, et on l'intercale entre les points C et D.

Si la force à mesurer est considérable, on l'installe sur un circuit comprenant deux résistances connues r et r' , r de l'ordre d'une centaine de mille d'ohms, r' de l'ordre de quelques ohms ou de quelques dizaines. On mesure la différence de potentiel aux bornes de la résistance r' ; on en conclut la différence de potentiel totale, c'est-à-dire la force électromotrice à mesurer.

Les appareils permettent ordinairement de mesurer les forces électromotrices de 0 à 600 volts.

5°. — MESURE D'UNE RÉSISTANCE.

Soit x la résistance à mesurer. On la monte en série avec une résistance connue r et une pile à laquelle on ne demande que de demeurer identique à elle-même. On compare les différences de potentiel aux bornes de ces résistances : elles sont entre elles dans le rapport même des résistances.

6°. — MESURE D'UNE INTENSITÉ.

On la fait passer dans une résistance connue r , et on détermine la différence de potentiel aux bornes de cette résistance.

186. Mesure d'une force électromotrice en valeur absolue.

1°. — Le problème est de déterminer la force électromotrice de certains éléments par la mesure d'une intensité en valeur absolue et d'une résistance en ohms internationaux.

A proprement parler, on ne mesure pas ainsi une force électromotrice en valeur absolue, puisque l'ohm international n'est qu'une définition conventionnelle. Si en fait il diffère peu de l'ohm vrai, théoriquement il n'est pas identique.

La mesure d'une force électromotrice en valeur absolue exige la mise en œuvre d'une expérience soit thermique, soit d'induction, se ramenant à une mesure d'énergie. Nous y reviendrons plus tard.

Au 2° du paragraphe 166, nous disons que l'électrodynamomètre absolu mesure l'intensité d'un courant *caractérisé simultanément par quelque autre effet*. En effet, l'emploi de l'électrodynamomètre ne peut être qu'exceptionnel, vu la difficulté des expériences et le prix des appareils. La mise en œuvre d'une telle méthode a pour but la recherche des valeurs numériques de paramètres permettant ultérieurement des mesures plus simples. Telles sont les forces électromotrices d'éléments convenablement choisis.

2°. — A quelques détails près, la figure 206 représente les connexions.

La méthode est celle d'opposition (§ 184). On maintient invariable la résistance du circuit d'une pile P impolarisable (à laquelle on ne

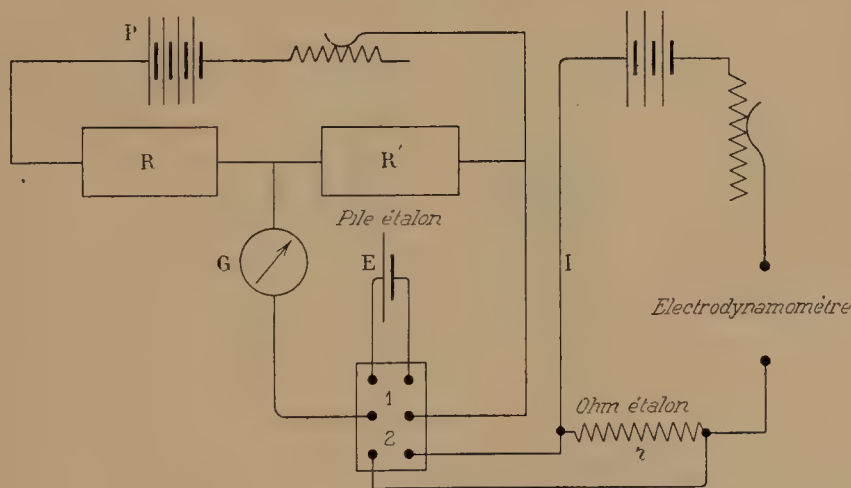


Fig. 206.

demande que de rester constante) : on utilise pour cela deux boîtes de résistances *complémentaires* R et R' . On oppose successivement la différence de potentiel aux bornes d'une des boîtes avec la force électromotrice de l'élément étalon et avec la différence de potentiel

que produit le courant I aux bornes d'un ohm international. Simultanément on mesure ce courant I en valeur absolue.

On peut même, par un choix convenable du courant I et de la résistance r connue en valeur absolue, obtenir l'égalité $E = rI$. Les résistances R et R' étant alors choisies telles que le galvanomètre G soit au zéro quand on établit les connexions 1, il est au zéro quand à la place des premières on établit les connexions 2. Dans ce cas, il est inutile d'avoir en R et R' des résistances étalonnées; des rhéostats suffisent.

187. Étalons de force électromotrice.

Comme nous n'écrivons pas un historique de la question et que le Latimer Clark est à peu près abandonné (après avoir été quasiment légal en France), nous n'en dirons rien.

L'élément actuellement considéré comme le meilleur est le *Weston*.

Le pôle négatif est constitué par un amalgame de cadmium

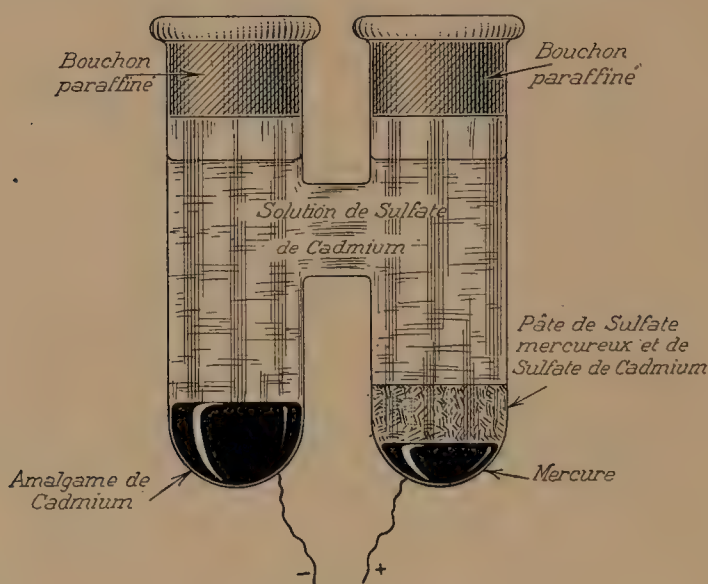


Fig. 207.

à 12,5 % de cadmium; le pôle positif est en mercure. L'électrolyte est une solution de sulfate de cadmium ($C_d \cdot SO_4$) saturée à 4°.

Enfin au-dessus du mercure est une pâte formée d'un mélange de sulfate mercurieux (SO_4Hg^2) et de sulfate de cadmium.

Il nous est impossible d'insister sur les précautions à prendre pour obtenir l'amalgame et les sulfates. En particulier, l'action décomposante de l'eau (hydrolyse) rend très difficile la suppression de l'acidité du sulfate mercurieux.

L'expérience montre que les forces électromotrices des éléments construits par divers expérimentateurs concordent à 1 ou 2 dix-millièmes près; les différences doivent provenir du sulfate mercurieux. Le coefficient de température est petit; on a trouvé au voisinage de 20° :

$$E_t = E_{20} - 0,000 \cdot 038(t - 20).$$

Enfin la valeur absolue est :

$$E_{20} = 1,0185.$$

Comme ce nombre paraît très probable, la mesure d'une intensité en valeur absolue devient immédiate par la méthode potentiométrique, pourvu qu'on possède un ohm bien étalonné.

188. Équivalent électrochimique de l'argent.

En Allemagne, par définition *légal*, l'ampère est l'intensité du courant qui, traversant une solution aqueuse de nitrate d'argent pur, dépose à la cathode 1,118 milligramme d'argent par seconde (67,08 milligrammes par minute; 49r,025 par heure).

Voici comment on opère pour déterminer ce nombre, quand on prend comme intermédiaire la force électromotrice d'un élément étalon, déterminée comme il est expliqué dans les paragraphes précédents. J'emprunte ce qui suit aux travaux du Laboratoire central d'électricité.

La cathode est une capsule de platine hémisphérique de 10 centimètres de diamètre. L'anode est un hémisphère concentrique d'argent pur (ou de platine recouvert d'argent pur par électrolyse, ce qui revient au même). Son diamètre est de 5 centimètres environ; le courant arrive par une tige épaisse radiale rivée.

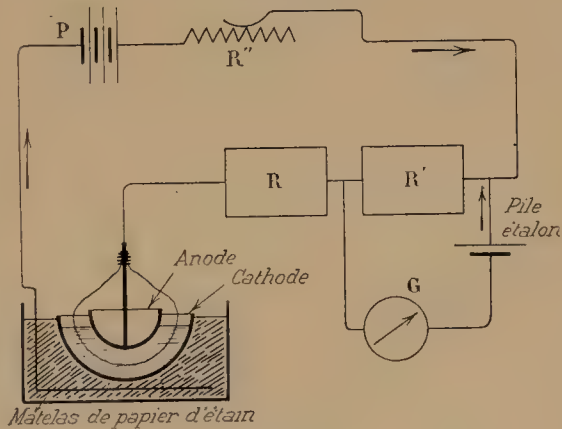


Fig. 208.

Pour avoir un dépôt adhérent, il ne faut pas dépasser la densité de 0,02 ampère par centimètre carré; mais on reste très au-dessous de cette limite en utilisant un courant total de 0,5 ampère.

L'anode et la cathode sont séparées par un papier filtre qui, sans gêner le passage du courant, empêche les impuretés ou les parcelles détachées de l'anode de tomber sur la cathode.

L'électrolyte est le nitrate pur du commerce recristallisé deux fois; on le dissout dans six fois son poids d'eau distillée.

Pour maintenir l'intensité I du courant constante et connue en

valeur absolue, on oppose à la force électromotrice E de la pile étalon, la différence de potentiel aux bornes d'une résistance dont la valeur R' a été comparée à l'ohm international. On a :

$$E = IR'.$$

Pendant toute la durée de l'expérience, on maintient le galvanomètre G au zéro en agissant sur une résistance lentement variable R'' . On compense ainsi les petites variations de la force électromotrice de la batterie P qui est d'environ 108 volts.

Le réglage est facile, grâce aux grandes résistances intercalées.

On a trouvé pour l'équivalent électrochimique de l'argent (en milligrammes par coulomb) 1,11821, résultat qui concorde très bien avec les derniers nombres obtenus par les précédents expérimentateurs. Ajoutons que, vers 1890, on donnait 1,1192 comme nombre probable, ce qui prouve la minutie de l'expérience, peut-être aussi une imperfection des électrodynamomètres ou des résistances alors utilisées.

CHAPITRE X

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX D'INDUCTION

Aux excellentes personnes, d'habitude ignorantes comme des carpes, qui préconisent la méthode historique, je me permets de recommander l'induction comme test de leur pédagogie. Ce qu'on a écrit de choses incohérentes sur le sujet, pendant les trente années qui ont suivi la découverte de Faraday, tient du prodige. Des expériences qui nous apparaissent aujourd'hui comme des conséquences immédiates de la loi générale (découverte depuis), ont été le sujet d'hypothèses et de commentaires qu'il serait impossible de soupçonner si l'on n'avait pas les mémoires sous les yeux. Faire revivre ce fatras serait d'une sottise sans nom. Je suis candide d'employer le conditionnel : c'est à faire revivre ce fatras que bon nombre de traités usent leurs pages.

189. Règles générales et expériences fondamentales.

1°. — Voici les lois plus ou moins clairement énoncées par Faraday.

Quand un conducteur se déplace dans un champ magnétique de manière à couper les lignes de force de ce champ, il se produit des forces électromotrices dites d'induction.

Leur durée est celle du déplacement.

Leur sens est tel que les effets électromagnétiques dus aux courants qu'elles produisent (*quand elles en produisent*) s'opposent aux déplacements qui leur donnent naissance (loi de Lenz).

Les phénomènes ne dépendent que du mouvement relatif.

Enfin les forces électromotrices sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles à la vitesse du déplacement.

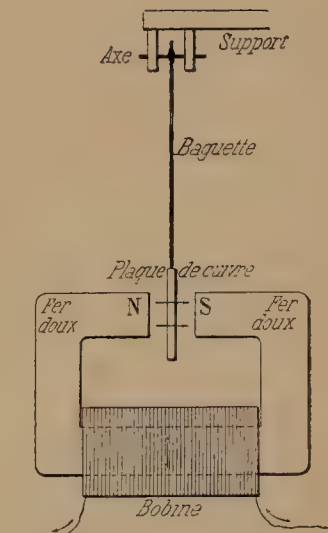


Fig. 209.

Commençons par établir expérimentalement ces propositions.

Nous conseillons au lecteur de répéter les expériences : ce sont d'excellentes manipulations.

Les règles doivent s'appliquer quel que soit le conducteur; par suite, abordons d'emblée le cas général. Peu nous importe pour le moment quelles sont les trajectoires des courants induits.

2°. — PLAQUE DE CUIVRE OSCILLANT ENTRE LES PÔLES D'UN ÉLECTRO-AIMANT.

Le conducteur mobile est une plaque de cuivre rouge, en forme de secteur annulaire, montée symétriquement à l'extrémité de la tige

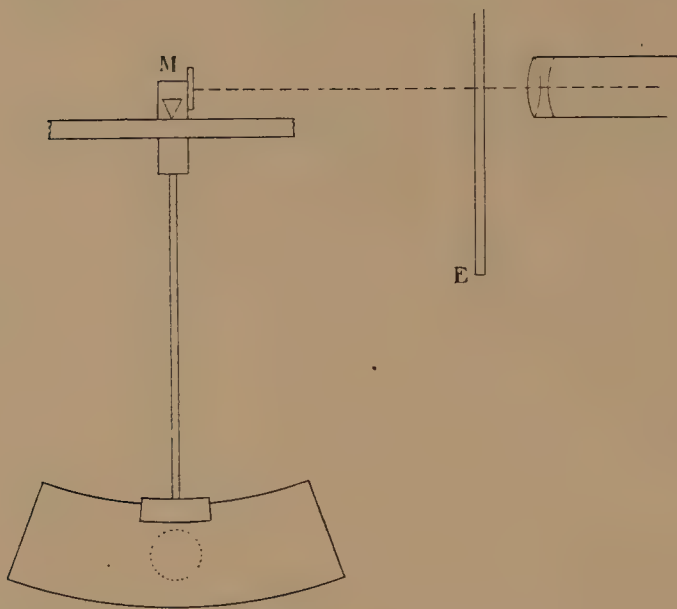


Fig. 210.

d'un pendule (fig. 209 et 210); le pendule est en bois pour éviter toute complication. Un miroir M et une échelle verticale E permettent de déterminer la loi de décroissance des amplitudes (§ 147), en particulier le paramètre δ qui mesure le frottement supposé proportionnel à la vitesse.

La partie annulaire oscille entre les pôles d'un électro-aimant, par suite dans un champ *quelconque*, dont nous avons seulement besoin de savoir que, *pour des oscillations assez petites de la plaque*, il se présente toujours de la même manière par rapport à celle-ci. Quelles que soient donc à chaque instant les trajectoires des courants induits dans la plaque, nous pouvons admettre qu'elles restent sensiblement les mêmes *dans l'espace*; seule varie la vitesse avec laquelle les diverses parties de la plaque coupent les lignes de force du champ.

Lançons le pendule; envoyons dans l'électro un fort courant : le frein est assez puissant pour rendre le pendule apériodique (§ 148); il revient lentement à sa position d'équilibre et y reste.

Envoyons des courants faibles : nous constatons que l'amortissement, d'autant plus grand que le courant est plus intense, est tel que l'exige un frottement proportionnel à la vitesse : les amplitudes décroissent en progression géométrique; δ est constant.

Remplaçons le disque de cuivre par un disque identique de forme et d'épaisseur, mais de métal moins conducteur (laiton, zinc...; le fer et le nickel, magnétiques, sont naturellement exceptés) : nous trouvons pour le même champ des amortissements d'autant plus faibles que la résistivité est plus grande. Preuve que le phénomène immédiat est la production d'une force électromotrice.

3°. — DISQUE TOURNANT ENTRE LES PÔLES D'UN ÉLECTRO-AIMANT.

La figure 211 montre comment il est possible d'installer une manipulation *quantitative*.

Le disque monté sur pivots est entraîné par un poids; on enregistre les tours avec un chronographe à bande C, en même temps que la seconde.

L'expérience consiste à déterminer la vitesse uniforme limite.

Si le frottement est proportionnel à la vitesse, la vitesse limite

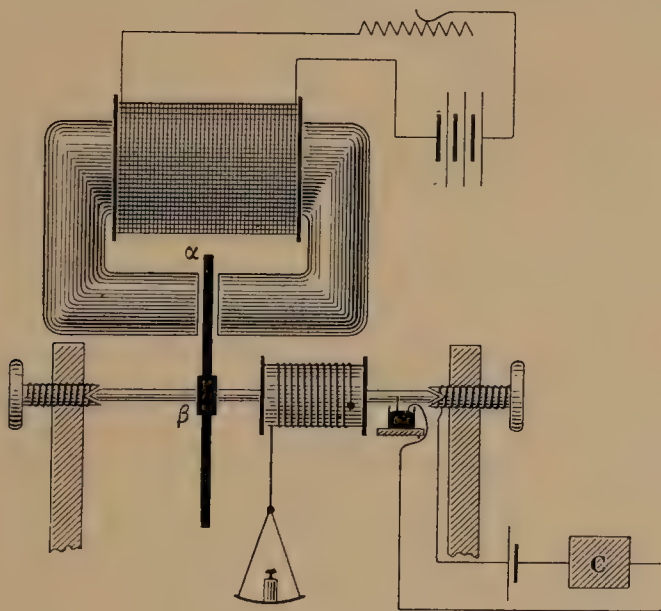


Fig. 211.

est, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du frottement.

On fera varier le champ, la résistivité du disque; on vérifiera les lois générales.

Si la vitesse imprimée au disque est assez grande, on constate au

toucher un échauffement notable. Il est dû à l'effet Joule des courants induits (§ 124).

190. Entraînement d'un aimant par un disque tournant; expérience inverse.

1°. — Faisons tourner un aimant NS parallèlement à un disque de cuivre D monté sur pivot (fig. 212) : le disque se met à tourner dans le sens de l'aimant, avec une vitesse qui croît et finit par devenir peu inférieure à celle de l'aimant; nous avons créé ce qu'on appelle un moteur *asynchrone* (voir seconde partie de ce Cours). Pour que l'expérience soit probante et qu'on ne puisse attribuer la rotation du disque au courant d'air créé par la rotation de l'aimant, on tend une feuille de papier *ab* entre l'aimant et le disque.

Inversement, si nous montons l'aimant sur pivot et faisons tourner le disque, l'aimant est entraîné.

Un disque non conducteur n'agit pas; un disque métallique agit d'autant mieux qu'il est plus conducteur. Serait-il en cuivre rouge, il n'agit pas si on y découpe des fentes radiales qui empêchent les courants de passer.

Enfin si on touche deux points du disque mobile avec les extrémités du fil d'un galvanomètre, la déviation accuse la présence d'une force électromotrice. Nous reviendrons plus loin là-dessus.

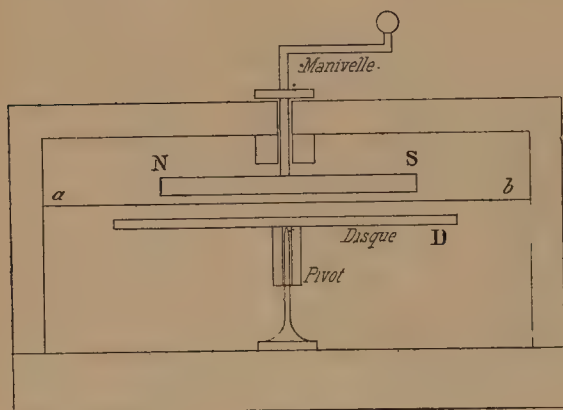


Fig. 212.

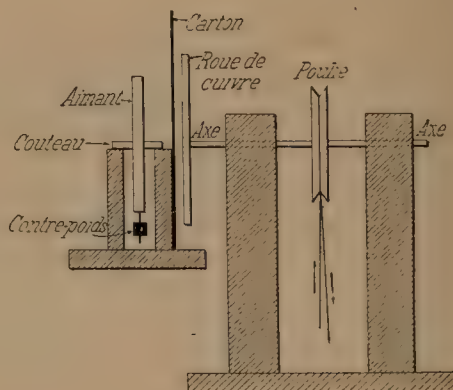


Fig. 213.

Seul intervient le mouvement relatif. D'ailleurs, si le mouvement absolu jouait un rôle, comme nous sommes entraînés dans le mouvement général de la Terre avec une vitesse énorme, nous observerions des résultats différents suivant l'orientation de l'appareil par rapport à l'écliptique et au Soleil, *ce qui n'a pas lieu*.

2°. — On peut transformer l'expérience en une expérience quantitative (fig. 213).

Fixons l'aimant sur un couteau qui le traverse normalement en

son milieu. Suspendons à l'une de ses extrémités un léger contre-poids, de manière qu'il ait une position d'équilibre stable. Faisons tourner parallèlement un disque de cuivre vertical dont l'axe soit dans le prolongement de l'axe du couteau. Un carton évite l'effet des courants d'air. Déterminons par le procédé du paragraphe 189 la vitesse angulaire de rotation ω du disque.

L'expérience montre que le couple auquel l'aimant est soumis est proportionnel à ω . Soit θ l'angle dont l'aimant dévie; on a :

$$\sin \theta = \omega k.$$

Pour éliminer l'action du champ terrestre sur le disque, on le dispose dans le plan méridien magnétique.

191. Règle quantitative : circuits linéaires.

Ces expériences, et bien d'autres que nous rencontrerons plus loin, établissent les règles générales qualitatives.

Il s'agit maintenant de déterminer la grandeur de la force électromotrice induite sur chaque élément du conducteur, en fonction de champ.

Comme pour les champs dus aux courants et pour les actions des champs sur les courants, la force électromotrice produite par le déplacement d'un circuit *linéaire* dans un champ est calculable au moyen d'une loi applicable aux circuits fermés et d'une loi applicable aux éléments de circuit.

Inutile de démontrer pour la troisième fois qu'elles sont équivalentes pour les circuits fermés, et qu'on ne peut déduire la seconde de la première qu'en vertu d'une hypothèse auxiliaire.

1°. — CIRCUITS FERMÉS.

Un circuit fermé (de forme invariable ou variable) se déplace dans un champ; la variation du flux d'induction \mathcal{F} à travers une surface quelconque, limitée au circuit, crée dans le circuit une force électromotrice E dont la valeur absolue est donnée en volts par la relation :

$$E = 10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt};$$

t représente le temps. Cette force électromotrice est dirigée de manière que le courant qu'elle tend à produire serait la cause de forces électromagnétiques s'opposant au déplacement.

Pour obtenir une formule qui donne E en grandeur et en signe, choisissons un sens de circulation sur le circuit : par convention, si la force électromotrice E est positive, elle tend à pousser le courant dans le sens de circulation choisi : si elle est négative, elle tend à pousser le courant dans le sens inverse.

Un flux d'induction traversant le circuit est positif quand le bonhomme d'Ampère, placé sur le circuit dans le sens de circulation, voit le flux aller vers sa gauche à *travers le circuit*.

S'il passe effectivement un courant dans le sens de circulation, le

déplacement tend à se faire de manière que le flux d'induction \mathcal{F} augmente.

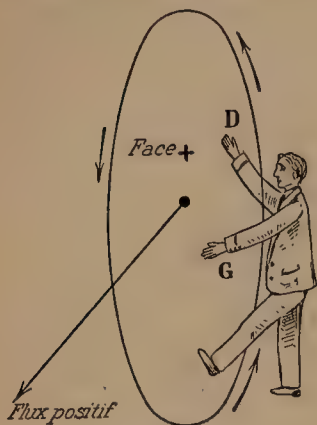


Fig. 214.

Ceci rappelé, la force électromotrice E tend (d'après la règle) à pousser un courant gênant le déplacement; donc elle est donnée en grandeur et en signe par la formule :

$$E = -10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Ces conventions rentrent dans notre convention générale exposée au paragraphe 2.

En effet, pour savoir le sens du flux d'induction, nous choisissons sur le circuit un sens de circulation; il définit, d'après la règle du bonhomme, une face négative et

une face positive pour toute surface limitée par le circuit; il définit donc ce qu'on doit appeler flux positif et flux négatif.

Le flux est positif, quand il pénètre par la face négative et sort par la face positive, c'est-à-dire quand il est dans le sens du vecteur aimantation du feuillet équivalent à un courant allant dans le sens de circulation choisi. Il revient au même de dire qu'un flux est positif quand le bonhomme d'Ampère (placé sur le circuit de manière que le *sens de circulation* le traverse des pieds à la tête) voit les lignes de force aller vers sa gauche à travers l'espace limité par le circuit.

Ceci posé, la force électromotrice d'induction est dirigée dans le sens de circulation si le flux décroît pendant le déplacement : c'est précisément ce qu'exprime la formule.

Je m'excuse d'avoir à prévenir mon lecteur qu'il faut un d droit dans l'expression de la dérivée. Il est honteux qu'un membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, traîne des d ronds pendant un volume entier, avouant implicitement : ou qu'il ignore le premier mot de l'induction, ou qu'il ignore ce qu'est une dérivée partielle. On ne s'étonnera pas d'apprendre que le gouvernement l'a chargé de juger du mérite des professeurs de Faculté.

2°. — CIRCUITS OUVERTS.

Voici maintenant la règle applicable à un élément de circuit.

Un élément \overline{OA} se déplace dans un champ H .

Le bonhomme d'Ampère est placé sur cet élément, les pieds en O , la tête en A ; il regarde dans la direction des lignes de force.

Donnons à l'élément un petit déplacement; il coupe un certain nombre de lignes, balaye un certain flux \mathcal{F} .

La force électromotrice d'induction est en grandeur absolue :

$$E = 10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Si le déplacement se fait vers la droite du bonhomme (le point O vient dans le demi-espace limité par le plan zOx et contenant l'axe Oy'), E est dirigée de manière à pousser un courant de ses pieds à sa tête, c'est-à-dire dans le sens OA. En effet, un courant effectivement dirigé suivant OA tend à se déplacer vers la gauche du bonhomme regardant dans le sens des lignes de force; la force électromagnétique est OF. Donc le courant que tend à pousser la force électromotrice d'induction précédemment définie, tend bien à gêner le mouvement.

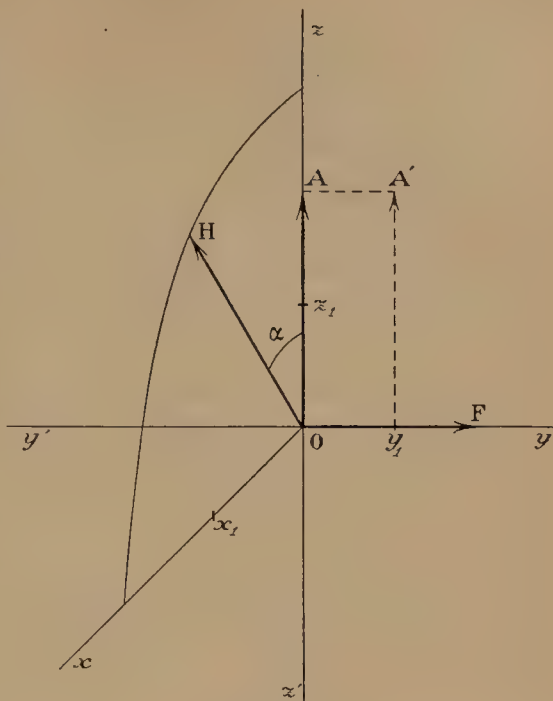


Fig. 215.

192. Conservation de l'énergie.

1°. — Les lois précédentes ne découlent du principe de la conservation de l'énergie que grâce à une hypothèse supplémentaire. Jusqu'à présent, nous n'avons pas précisé l'origine de l'énergie mise en jeu, quand un circuit, siège d'un courant, se déplace dans un champ magnétique. Le travail dû aux forces électromagnétiques dans le passage de la position 1, où le flux est \mathcal{F}_1 , à la position 2 où le flux est \mathcal{F}_2 , est en ergs (§ 80) :

$$0,1 \cdot I (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1);$$

d'où provient-il?

Le principe de la conservation de l'énergie ne nous apprend rien à cet égard : il pourrait y avoir refroidissement du circuit, modification des aimants qui produisent le champ, modification du milieu où existe le champ lui-même... L'expérience montre, et l'on sait depuis Faraday et Helmholtz, qu'il faut chercher toute l'énergie équivalente au travail dans les effets d'une force électromotrice, dite d'induction, qui se produit le long du circuit sur lequel agissent les forces électromagnétiques.

S'il en est ainsi, et je répète qu'aucun raisonnement ne le peut faire prévoir, il devient facile de déterminer la grandeur de cette force électromotrice.

Soit E la force électromotrice qui produit le courant actuel I; soit

R la résistance. L'équation :

$$E = RI, \quad EIt = RI^2t,$$

exprime que l'énergie voltaïque fournie par l'électromoteur se retrouve sous forme d'échauffement du conducteur.

Écrivons qu'elle fournit en outre le travail produit par les forces électromagnétiques, c'est-à-dire :

$$0,4 \cdot I'(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) \text{ ergs,}$$

ou, puisque l'erg vaut 10^{-7} joules :

$$10^{-8} I'(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) \text{ joules;}$$

I' est l'intensité du courant dans la nouvelle hypothèse.

Nous avons la relation :

$$EIt = RI^2t + 10^{-8} I'(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1); \quad \text{d'où} \quad IR = E - 10^{-8} \frac{\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1}{t}.$$

Le long du circuit qui se déplace dans un champ magnétique, naît donc une force électromotrice de valeur moyenne (en volts) :

$$10^{-8} \frac{\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1}{t}.$$

Pour connaître la force électromotrice à chaque instant, il suffit de considérer une durée Δt petite; le flux subit pendant ce temps une variation $\Delta \mathcal{F}$; d'où, pour la force électromotrice vraie :

$$10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}.$$

Elle est indépendante du courant I' qui existe dans le circuit; d'après le raisonnement même qui a servi à en calculer la valeur, elle tend à produire un courant tel que le mouvement du circuit soit gêné (loi de Lenz).

Insistons là-dessus.

2°. — Imaginons d'abord que les forces électromagnétiques tendent à produire le mouvement de la position initiale 1 à la position finale 2. C'est donc un travail *positif* \mathcal{E}_1^2 qu'effectuent les forces, une énergie *disponible* que nous pouvons utiliser à faire monter des poids, par exemple. Il faut en payer le prix. Les lois de l'induction nous disent que, pour une même quantité de corps combinés dans la pile, il y aura moins de chaleur dégagée dans le circuit : la force électromotrice de la pile subit une diminution apparente. La force électromotrice d'induction s'oppose donc à celle de la pile, elle tend à pousser un courant opposé au courant actuel, par suite à diminuer le courant actuel et le travail \mathcal{E}_1^2 produit par les forces électromagnétiques. Elle tend à gêner le mouvement actuel.

Si les forces électromagnétiques s'opposent au mouvement du circuit, il faut, pour produire le déplacement, dépenser de l'énergie;

par exemple, il faut utiliser la chute de certains poids. Cette énergie que nous perdons, doit se retrouver dans un excès de l'échauffement du circuit sur celui qui correspond à sa résistance et à la force électromotrice de la pile. Il naît une force électromotrice d'induction de même sens que celle de la pile : elle augmente l'intensité du courant, augmente donc les forces électromagnétiques; elle tend à gêner le mouvement qui en est la cause.

En définitive, si le mouvement du circuit tend à se produire seul, la force électromotrice d'induction diminue l'intensité du courant; si le mouvement du circuit est imposé contre les forces électromagnétiques, la force électromotrice d'induction augmente l'intensité du courant.

Dans tous les cas, elle a pour expression en valeur absolue :

$$10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}.$$

193. Conservation de l'énergie dans l'application de la loi de Laplace.

La loi de Laplace, qui précisait la distribution des forces électromagnétiques, détermine le long du circuit la distribution des forces électromotrices d'induction.

DÉFINITION.

Une courbe ABC quelconque (fig. 216) prend une série de positions $A_1B_1C_1$, ..., $A_3B_3C_3$. Les courbes $CC_1...C_3$ et $AA_1...A_3$ sont les trajectoires de ses extrémités. Par définition, le flux balayé par cette courbe entre deux positions quelconques, 1 et 3 par exemple, est le flux qui traverse la courbe fermée $A_1C_1C_3A_3$.

Ceci posé, considérons l'élément de circuit OA dans le champ H (fig. 215); prenons-le comme axe des z. Prenons comme plan zOx le plan qui passe par OA et par le champ. Si le courant i va de bas en haut suivant OA, la force est dirigée suivant Oy. Elle est égale à :

$$0,1 \cdot \overline{OA} \cdot iH \sin \alpha \text{ dynes.}$$

Quand l'élément OA subit un petit déplacement, on peut admettre dans le calcul de l'aire balayée qu'il reste sensiblement parallèle à lui-même. La trajectoire du point O est une petite droite décomposable en trois composantes Ox_1 , Oz_1 , Oy_1 . Déterminons pour chacun de ces déplacements le travail et le flux balayé.

Pour les déplacements Ox_1 et Oz_1 , qui se font normalement à la force, le travail et le flux balayé sont nuls.

Pour le déplacement Oy_1 , le travail est :

$$\mathcal{E} = 0,1 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{Oy_1} \cdot iH \sin \alpha \text{ ergs.}$$

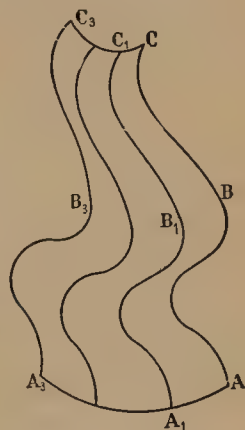


Fig. 216.

Le flux balayé est :

$$\Delta \mathcal{F} = \overline{Oy_1} \cdot \overline{OA} \cdot H \sin \alpha \quad \text{en C.G.S.}$$

On a donc :

$$\mathcal{E} = 0,4 \cdot i \cdot \Delta \mathcal{F} \text{ ergs} = 10^{-8} i \cdot \Delta \mathcal{F} \text{ joules.}$$

Écrivons que la force électromotrice d'induction e qui naît dans cet élément, a précisément comme effet de compenser le travail que les forces électromagnétiques produisent sur cet élément d'après la loi de Laplace; il vient :

$$ei\Delta t = 10^{-8} i \Delta \mathcal{F}, \quad e = 10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}.$$

La force électromotrice est égale au flux balayé, divisé par le temps nécessaire pour produire le mouvement et multiplié par 10^{-8} .

D'après la loi de Lenz, le courant qu'elle tend à produire gêne le mouvement; par conséquent, si le mouvement a lieu suivant Oy , la force électromotrice est dirigée suivant AO (de manière à diminuer le courant actuel). Si le mouvement se fait suivant Oy' , elle est dirigée suivant OA (de manière à augmenter le courant actuel).

Peu importe le sens des composantes Ox_1 et Oz_1 du mouvement; elles n'interviennent pas.

Nous pouvons reproduire ici la remarque du paragraphe 73; il est possible de déplacer *isolément* un élément de circuit dans un champ magnétique, et de vérifier que la loi de Laplace est conforme à l'expérience.

194. Phénomènes dans un circuit non traversé par un courant au début de l'expérience.

Nous avons trouvé que la force électromotrice d'induction a pour expression : $10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}$, *quelle que soit l'intensité du courant qui parcourt le circuit au début de l'expérience*. On est tenté de conclure qu'elle est représentée par la même formule, si au début de l'expérience le courant est nul. Cependant le raisonnement basé sur le principe de la conservation de l'énergie ne subsiste plus. En l'absence d'un courant, il n'y a pas d'actions électromagnétiques; les phénomènes d'induction ne sont donc plus nécessaires pour satisfaire au principe de la conservation de l'énergie.

L'expérience répond que la formule est applicable, qu'il naît un courant.

Le principe de la conservation de l'énergie ne s'y oppose pas.

En effet, soit :
$$e = 10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t},$$

la force électromotrice d'induction qui se produit pendant un dépla-

cement, soit r la résistance du circuit; l'intensité du courant est :

$$i = \frac{e}{r} = \frac{10^{-8}}{r} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t};$$

l'énergie dépensée dans le circuit est :

$$ei\Delta t = 10^{-8}i\Delta \mathcal{F}.$$

D'autre part, le travail des forces électromagnétiques est pendant le même temps : $0,1 \cdot i\Delta \mathcal{F}$ ergs, soit : $10^{-8}i\Delta \mathcal{F}$ joules, c'est-à-dire équivalent.

Comme le courant est nul au début, comme sous l'influence des forces électromotrices d'induction il y a production d'un courant et dégagement de chaleur dans le circuit, le courant créé gêne le mouvement; on dépense, pour produire ce mouvement, l'équivalent de l'énergie rendue disponible dans le circuit par la force électromotrice d'induction.

195. Expression du flux balayé par un élément de circuit.

Un élément ∂s de circuit (de composantes $\partial x, \partial y, \partial z$) se meut avec une vitesse v (de composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$).

Il coupe dans son mouvement un vecteur de composantes a, b, c .

On demande le flux balayé par unité de temps.

L'aire balayée est le produit vectoriel de l'élément de circuit et du vecteur figurant sa vitesse (§ 3); elle a pour composantes :

$$\frac{dy}{dt} \partial z - \frac{dz}{dt} \partial y, \quad \frac{dz}{dt} \partial x - \frac{dx}{dt} \partial z, \quad \frac{dx}{dt} \partial y - \frac{dy}{dt} \partial x.$$

Le flux balayé par unité de temps est la projection du vecteur a, b, c , sur le vecteur que nous venons de calculer :

$$d\mathcal{F} = a \left(\frac{dy}{dt} \partial z - \frac{dz}{dt} \partial y \right) + b \left(\frac{dz}{dt} \partial x - \frac{dx}{dt} \partial z \right) + c \left(\frac{dx}{dt} \partial y - \frac{dy}{dt} \partial x \right).$$

Nous pouvons écrire :

$$d\mathcal{F} = \partial x \left(b \frac{dz}{dt} - c \frac{dy}{dt} \right) + \partial y \left(c \frac{dx}{dt} - a \frac{dz}{dt} \right) + \partial z \left(a \frac{dy}{dt} - b \frac{dx}{dt} \right).$$

$d\mathcal{F}$ est positif si l'élément se déplace vers la gauche du bonhomme d'Ampère convenablement placé sur le circuit et regardant dans la direction du champ. L'expression précédente est correcte en signe, les axes étant supposés à droite (§ 2).

Plaçons l'élément suivant Oz ($\partial x = \partial y = 0$);

soit : $b = c = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0;$

il reste :

$$d\mathcal{F} = a \delta z \frac{dy}{dt};$$

le flux est positif : on vérifiera sur une figure que le déplacement se fait bien vers la gauche du bonhomme.

196. Réciprocité des phénomènes d'électromagnétisme et d'induction.

Les phénomènes d'induction nous apparaissent donc comme la réciproque des phénomènes mécaniques entre le champ magnétique et le courant. Il est essentiel de bien comprendre cette réciprocité.

1^o. — RENVERSEMENT DE L'EXPÉRIENCE DU PARAGRAPHE 84, 1^o.

Quand le conducteur souple vertical est traversé par un courant vertical *de bas en haut*, il est repoussé hors du fer à cheval. Réciproquement, remplaçons l'électromoteur par un galvanomètre et retirons brusquement le conducteur hors du fer à cheval. L'aiguille du galvanomètre subit une brusque répulsion et revient ensuite à sa position d'équilibre; elle indique le passage d'un courant (de faible durée : la durée du déplacement), allant *de haut en bas*, c'est-à-dire s'opposant au mouvement qui le produit.

2^o. — RENVERSEMENT DE L'EXPÉRIENCE DE LA ROUE DE BARLOW (§ 84, 3^o).

Nous insistons sur le renversement de cette expérience, parce qu'elle est susceptible de prendre une haute précision (§ 286).

On remarquera d'abord que l'expérience du paragraphe 189, 3^o, reproduit presque sans modification une roue de Barlow. Il suffirait d'envoyer un courant avec deux frotteurs α et β , pour que le disque tendît à tourner sous l'action du champ magnétique.

Mais supposons le disque sans frotteurs placé dans un champ magnétique uniforme et normal à sa surface, ou dans un champ admettant comme axe de révolution l'axe même du disque.

Faisons-le tourner : *aucun courant ne prend naissance.*

En effet, par raison de symétrie, les forces électromotrices induites sont dirigées suivant les rayons du disque; elles n'ont d'autre effet que de porter le centre et le pourtour à des potentiels différents. Les courants qu'elles poussent ne peuvent se fermer nulle part.

Appelons M le flux total à travers le disque, flux à travers la circonférence qui le limite extérieurement. Soit ω la vitesse angulaire, T la période. Pendant le temps T , chaque rayon coupe le flux M ; la différence de potentiel aux bouts du rayon est donc (en volts) :

$$10^{-8} \cdot M : T = 10^{-8} \cdot \frac{M\omega}{2\pi}. \quad (1)$$

Cette formule ne suppose absolument rien sur la loi de variation du champ, pourvu qu'il satisfasse à la condition d'être de révolution autour de l'axe du disque.

Si alors nous joignons (par un conducteur extérieur glissant) le centre du disque et un point de la périphérie, nous détruisons la symétrie de révolution. Un courant passe dans le conducteur extérieur; un système de courants s'établit dans le disque. Nous verrons comment on peut mesurer la force électromotrice induite (1) en lui opposant une force électromotrice extérieure convenable (§ 286).

197. Coefficient d'induction mutuelle de deux circuits linéaires.

Ainsi les phénomènes d'induction dans un circuit linéaire dépendent du flux reçu par ce circuit. Comme cas particulier, le champ peut être dû à un courant passant dans un autre circuit; nous voici donc ramenés au calcul du flux envoyé par un circuit fermé dans un autre circuit fermé.

Nous avons montré *qu'il y a réciprocité* (§ 99); autrement dit, si le courant d'un ampère passe dans le circuit 1, le circuit 2 reçoit un flux total M précisément égal à celui qu'il envoie dans 1 quand le courant d'un ampère le traverse.

Le paramètre M est le *coefficient d'induction mutuelle* des deux circuits linéaires fermés, dans leurs formes et leurs positions actuelles.

Le flux envoyé par l'un des circuits dans l'autre est, en grandeur

et en signe :

$$M = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' ;$$

ds, ds' sont comptés positivement dans les sens de circulation choisis sur les deux circuits.

Le signe de M dépend donc de ces sens de circulation.

Le flux envoyé dans le circuit s' par le circuit s traversé par le courant i est : iM . Il est de même signe que M , si i est positif (c'est à-dire dirigé dans le sens de circulation choisi sur s), le signe du flux étant déterminé par la règle ordinaire, d'après le sens choisi sur s' .

M s'appelle le *coefficient d'induction mutuelle*.

La force électromotrice d'induction dans s' est : $-\frac{d(Mi)}{dt}$;

— — — — — s est : $-\frac{d(Mi')}{dt}$.

Cette expression englobe les variations de position et de forme des circuits et les variations simultanées d'intensité des courants.

Mais tant s'en faut que cette généralisation aille d'elle-même.

Nous devons la justifier plus loin (§§ 244 et sq.), l'assimilation que nous avons faite entre les courants et les feuillets n'ayant de sens que si le courant est constant.

198. Définition de l'henry.

La force électromotrice *évaluée en volts* est donnée par une expression contenant le facteur 10^{-8} . Quand la force électromotrice est due à la variation de l'intensité d'un courant *évalué en ampères*, elle contiendra donc le facteur 10^{-9} . On est ainsi conduit à évaluer les coefficients d'induction mutuelle et de self-induction au moyen d'une unité pratique, *l'henry*, dont la valeur est 10^9 C.G.S.

D'après leur forme, les coefficients d'induction (§ 197) ont les dimensions d'une longueur. Prendre *l'henry* comme unité revient, dans l'évaluation de ces coefficients, à choisir 10^9 centimètres, soit 10^4 kilomètres pour unité de longueur. C'est justement le quart de la longueur d'un méridien terrestre; d'où le nom de *quadrant* qu'on donne quelquefois à cette unité.

L'henry est le coefficient de self-induction d'un circuit où la force électromotrice induite est un volt, quand le courant varie d'un ampère par seconde (§ 200).

Énergie électrocinétique de l'éther.

199. Énergie d'aimantation de l'éther.

1°. — Les phénomènes d'induction se présentent jusqu'à présent comme les réciproques des phénomènes électromagnétiques.

Nous imaginons le déplacement relatif d'un circuit (ouvert ou fermé) et d'un champ dû à des courants constants ou à des aimants permanents. Ces déplacements entraînent des travaux : il faut chercher l'équivalent de ces travaux dans la production d'une force électromotrice qui fait varier l'intensité des courants traversant les circuits.

Une réciprocité analogue n'existe pas *de plano* dans les cas suivants.

Deux circuits fermés et indépendants 1 et 2 sont placés l'un à côté de l'autre. Lançons un courant dans le circuit 1 : il envoie à travers le circuit 2 un flux de force M_{12} . *A priori*, aucun travail ne résulte de l'établissement de ce flux. Il n'est donc pas contradictoire de supposer que cette variation de flux (qui résulte, non plus d'un déplacement relatif d'un circuit et d'un champ, dans des conditions où ce déplacement implique un travail, mais simplement de la production d'un champ sans travail électromagnétique) ne produit aucun phénomène d'induction.

Autre exemple : un circuit n'est d'abord le siège d'aucun courant. Fermons-le sur une force électromotrice; un courant s'installe; simultanément le circuit envoie dans lui-même un flux $L_1 i_1$.

Ici encore il n'est pas contradictoire de supposer que cette variation

de flux, qui ne semble correspondre à aucun travail, n'entraîne aucun phénomène d'induction.

On peut conclure de même chaque fois que la variation du champ provient, non d'un déplacement, mais d'une véritable création sur place.

L'expérience répond que les lois précédentes sont encore applicables en grandeur et en signe.

Une conclusion s'impose : *l'aimantation de l'éther, généralement d'un milieu quelconque, correspond à une certaine dépense d'énergie dont il s'agit de trouver la forme.*

Pour des raisons que nous verrons plus loin, Maxwell appelle cette énergie d'aimantation *énergie électrocinétique*.

2°. — Voici à ce sujet une expérience fondamentale (fig. 217).

Sur un rouleau de fil de fer doux formant un tore, on enroule régulièrement du fil de cuivre guipé de soie.

Soit N le nombre total des spires.

Quand le pôle unité décrit la circonférence de rayon r , par suite effectue le chemin $2\pi r$, le travail total en ergs est :

$$\mathcal{C} = 0,4\pi Ni,$$

où i est exprimé en ampères (§ 78).

Le champ (uniforme par raison de symétrie) est donc :

$$H = \frac{\mathcal{C}}{2\pi r} = \frac{0,4\pi Ni}{2\pi r} = 0,2 \frac{Ni}{r}.$$

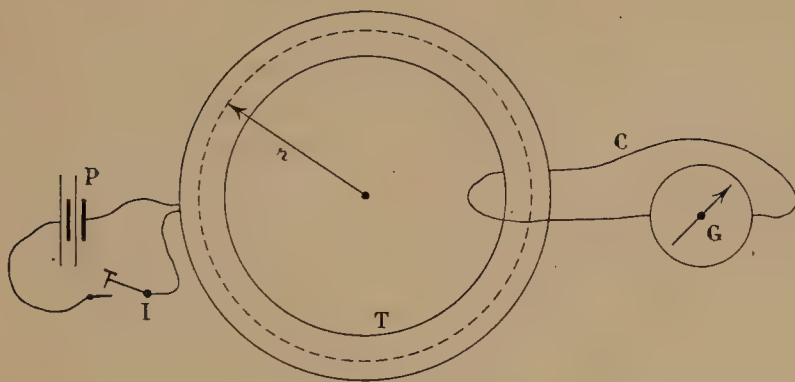


Fig. 217.

Sous l'influence du champ H , le fer s'aimante.

Nous posons pour l'induction B :

$$B = H\mu,$$

où μ (perméabilité) est une fonction de H que nous aurons à déterminer (seconde partie de ce Cours).

Par raison de symétrie, tout le long d'une circonférence, l'aimantation du fer est tangentielle et constante; la divergence du vec-

teurs \vec{J} est par conséquent nulle (*Méc. ration.*, § 48). *Aucune polarité ne se manifeste; en tout point de l'espace extérieur au tore, le champ est nul, quelle que soit la fonction μ , uniforme ou non.*

Ceci posé, un courant est induit dans le circuit C du galvanomètre G quand on ferme et quand on ouvre le circuit de la pile P. Cependant l'action électromagnétique entre le tore et le circuit C est identiquement nulle quand le circuit C est le siège d'un courant : c'est évident, puisqu'en vertu de la conservation du flux d'induction, les mouvements et déformations du circuit C ne modifient pas le flux qui le traverse.

Il faut bien admettre que les phénomènes d'induction peuvent être tout autre chose que la contre-partie des forces électromagnétiques; évidemment ici ils ne sont plus régis par la loi de Lenz sous sa forme ordinaire.

200. Énergie d'un système de courants.

1°. — Les résultats expérimentaux sont conformes à l'hypothèse générale suivante : *L'énergie disponible du fait de l'existence d'un système de courants dont les intensités actuelles sont i_1, i_2, \dots et qui sont traversés par des flux d'induction totaux $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ est :*

$$U = \frac{1}{2} \sum i \mathcal{F},$$

quel que soit le milieu, homogène ou non, où ils se trouvent, que ce milieu soit aimantable ou non, que son aimantation soit à hystérésis ou non.

Dans le cas particulier où le milieu est caractérisé par une valeur uniforme et constante de la perméabilité μ (voir la seconde partie de ce Cours), on peut exprimer les flux en fonction des intensités des courants.

On appelle *coefficients de self-induction* L_j d'un courant j le facteur par lequel il faut multiplier son intensité i_j pour obtenir le flux qu'il s'envoie dans lui-même; L_j ne dépend que de la forme du circuit j .

On appelle *coefficient d'induction mutuelle* M_{ij} de deux courants i et j , le facteur par lequel il faut multiplier le courant de l'un d'eux pour obtenir le flux qu'il envoie dans l'autre : M_{ij} ne dépend que de la forme des circuits i et j . La définition est complète, parce qu'à partir des lois de l'électromagnétisme, on démontre la réciprocité

(§ 99) :
$$M_{ij} = M_{ji}.$$

Le flux reçu par le circuit 1 est donc :

$$L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 + \dots$$

De même pour les autres circuits.

D'après l'hypothèse générale ci-dessus énoncée, l'énergie U du système de courants est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} 2U &= L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + \dots + 2M_{12} i_1 i_2 + 2M_{13} i_1 i_3 + \dots \\ &= \sum L i^2 + 2 \sum M_{ij} i_i i_j, \end{aligned} \quad (1)$$

dans l'hypothèse où le milieu est de perméabilité uniforme (milieu magnétiquement homogène) et constante (perméabilité indépendante du champ).

2°. — Reste à préciser sous quelle forme l'énergie U est emmagasinée. Démontrons l'identité générale :

$$U = \frac{1}{2} \sum i \mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \iiint (Xa + Yb + Zc) dv = \frac{1}{8\pi} \iiint \mathcal{B} H \cos \theta . dv,$$

où les intégrales sont étendues à l'espace entier; X, Y, Z , sont les composantes de la force magnétique; a, b, c , celles de l'induction; θ est l'angle que font les vecteurs force et induction.

En effet, considérons un tube d'induction infiniment mince quelconque, dont la section droite (variable d'un point à l'autre) est $d\sigma$. Repérons les points d'une des lignes d'induction qui le limitent, par une variable s comptée dessus. Considérons l'intégrale limitée à ce tube; enfin rappelons que le flux d'induction est conservatif (§ 42).

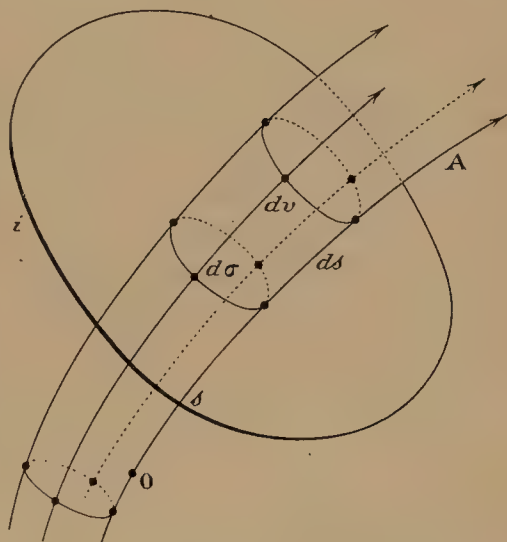


Fig. 218.

On a pour toutes les sections droites :

$$\mathcal{B} d\sigma = d\mathcal{F} = \text{Constante}; \quad \text{de plus :} \quad ds \cdot d\sigma = dv$$

d'où
$$\iiint \mathcal{B} H \cdot \cos \theta \, dv = d\mathcal{F} \int H \cos \theta \cdot ds.$$

Cette dernière intégrale est le travail d'un pôle qui décrit *en son entier* la ligne d'induction OA .

Deux cas à considérer.

Si cette ligne d'induction ne pénètre à l'intérieur d'aucun circuit siège de courant, l'intégrale est nulle.

Si elle pénètre à travers des circuits sièges des courants i_1, i_2, i_3, \dots

on a (§ 78) :

$$\int H \cos \theta \cdot ds = 4\pi \sum i.$$

D'où, pour le tube d'induction considéré :

$$\iiint \mathfrak{B}H \cos \theta \cdot dv = 4\pi d\mathcal{F} \cdot \Sigma i.$$

L'intégrale étendue à l'espace entier vaut donc :

$$4\pi \Sigma \mathcal{F}i.$$

Le champ magnétique est constitué d'une manière quelconque (courants, fer, aimants permanents).

Dans le cas où il n'existe pas d'hystérésis (où par suite les vecteurs \mathfrak{B} et H ont même direction, $\theta = 0$), où de plus la perméabilité est uniforme (ce qui implique qu'elle soit indépendante du champ), on a :

$$\mathfrak{B} = \mu H, \quad U = \frac{\mu}{8\pi} \iiint H^2 dv. \quad (2)$$

Dans tous les cas, nous devons considérer l'énergie emmagasinée comme le résultat de l'aimantation du milieu.

Elle est restituée lors de la suppression du courant.

201. Énergie électrocinétique. Comparaison des feuillets et des courants.

1°. — Nous représentons l'énergie des courants par l'expression :

$$2U = \Sigma Li^2 + 2\Sigma M_{ij}i_i i_j,$$

ou par l'intégrale :

$$U = \frac{\mu}{8\pi} \iiint H^2 dv,$$

dans le cas d'un milieu à perméabilité constante (voir la seconde partie de ce Cours).

Les déplacements relatifs des circuits et leurs déformations, quand ils ne sont pas rigides, se font de manière que les L et les M augmentent, c'est-à-dire *de manière que l'énergie d'aimantation du milieu croisse*.

Ainsi lorsque deux circuits s'attirent et qu'on leur permet de céder à cette attraction, on recueille du travail du fait de l'attraction; de plus, l'énergie d'aimantation du milieu *croît* : double gain qui doit être compensé par une absorption d'énergie équivalente. Les forces électromotrices d'induction servent précisément à cela.

On comprend pourquoi Maxwell voit dans l'énergie qui existe du fait de l'aimantation une énergie cinétique. L'énergie potentielle tend à devenir minima; l'énergie cinétique tend au contraire à devenir maxima. Or ici les déplacements des circuits se font spontanément dans un sens tel, que la quantité U soit maxima; d'où la conclusion qu'elle représente de l'énergie cinétique.

2°. — Revenons sur l'assimilation des courants et des feuillets. Comparons les forces qui s'exercent entre deux feuillets et entre deux courants.

Dans les deux cas intervient la quantité :

$$M = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'.$$

L'énergie potentielle de deux feuillets de puissances i_1 et i_2 est :

$$W = -i_1 i_2 M.$$

Ils se déplacent de manière que W diminue, c'est-à-dire que M augmente.

L'énergie électrocinétique des courants i_1 et i_2 passant dans les pourtours des feuillets est :

$$U = i_1 i_2 M.$$

Ils se déplacent de manière que U augmente, c'est-à-dire que M augmente.

Les mouvements se font de même, mais pour des raisons opposées.

Ce ne sont pas là des manières de parler arbitraires, puisque nous avons dans les courants induits l'équivalent de l'augmentation de U et du travail simultanément disponible.

202. Application des lois de Kirchhoff.

1°. — L'interprétation précédente permet de spécifier dans quel cas il est possible de parler de self-induction et d'induction mutuelle pour des circuits ouverts, et de leur appliquer les lois de Kirchhoff.

Ai-je besoin de dire que tous les traités d'Électricité sautent à pieds joints sur ces difficultés, au point qu'on peut sans hardiesse penser que leurs auteurs n'y comprennent rien ?

Voici les propositions qu'il faut légitimer, plus exactement, dont il faut préciser les conditions d'application, *car en général elles sont absurdes.*

Nous admettons que, *dans des conditions à préciser*, un *circuit ouvert* est caractérisé par un certain paramètre L (coefficient de self-induction), qui ne dépend que de sa forme, son diamètre et sa longueur.

Nous admettons de même que, *dans des conditions à préciser*, les réactions de deux *circuits ouverts* l'un sur l'autre sont caractérisées par un paramètre M (coefficient d'induction mutuelle) qui ne dépend que de ces deux conducteurs.

Dès lors, nous pouvons généraliser les lois de Kirchhoff (§ 111).

Soit 1, 2, 3, ... des *circuits ouverts* en nombre quelconque, de résistances r_1, r_2, \dots , traversés par des courants i_1, i_2, \dots , généralement fonctions du temps. Soit E_1, E_2, \dots la somme des forces électromotrices de nature quelconque qu'ils renferment.

Nous écrivons pour le circuit 1 :

$$i_1 r_1 = E_1 + A_1 - B_1 - \frac{d}{dt} (L_1 i_1 + \sum M_{1j} i_j), \quad (1)$$

et des équations analogues pour les autres circuits.

A et B sont les potentiels aux points terminaux des circuits ouverts.

On a : $\sum i = 0$, aux points multiples.

2°. — Cherchons sous quelles restrictions ces propositions sont admissibles; montrons d'abord *qu'elles sont en général parfaitement absurdes*.

Considérons un circuit unique fermé; coupons-le en morceaux 1, 2, ...; appliquons à ces morceaux l'équation (1). Additionnons les équations obtenues : les différences de potentiel disparaissent. Il reste :

$$i \sum r = \sum E - \frac{d}{dt} \sum L i = \sum E - \frac{d}{dt} (i \sum L).$$

La conséquence immédiate des équations (1) est donc que les self-inductions distribuées tout le long d'un circuit non dérivé jouissent de la propriété associative et de la propriété commutative, comme les résistances : CE QUI EST EN GÉNÉRAL GROSSIÈREMENT ERRONÉ. La self-induction n'est définie que pour un circuit fermé; elle dépend de la position de tous les éléments de ce circuit pris deux à deux.

Mais supposons que, sur un circuit de forme simple, on intercale un certain nombre de bobines suffisamment éloignées les unes des autres pour que l'intégrale :

$$\iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' \quad (2)$$

soit négligeable chaque fois que les éléments ds, ds' , sont empruntés à des bobines *différentes*. Autrement dit, envoyons un courant dans le circuit; supposons que le champ qu'il crée soit négligeable sauf au voisinage des bobines.

Nous aurons un certain nombre d'îlots pour lesquels l'intégrale :

$$\frac{1}{8\pi} \iiint H^2 dv,$$

n'est pas nulle, séparés par des régions où cette intégrale est négligeable. A chacun de ces îlots correspond un paramètre L, défini

par la condition :

$$Li^2 = \frac{1}{4\pi} \iiint H^2 dv.$$

Peu importe que le circuit de chacune des bobines soit ouvert; car nous pouvons le fermer en ajoutant un petit nombre d'éléments

modifiant à peine la valeur de l'intégrale (2) appliquée à tous les éléments pris deux à deux de la bobine considérée.

Dans ces conditions, il est clair que l'on peut intervertir l'ordre des bobines, en considérer deux comme formant un groupe : ce qui revient à commuter et associer leurs selfs. Mais il faudra bien nous garder d'en enfiler deux l'une dans l'autre ; car les coefficients L' et L'' , qui leur correspondent quand elles sont séparées, seraient alors remplacés par un coefficient Λ unique n'ayant aucun rapport nécessaire avec les premiers. Par exemple, Λ peut être nul (§ 203), alors que ni L' ni L'' ne le sont.

3°. — Ce que nous venons de dire des self-inductions peut être répété des inductions mutuelles. Chacun des deux circuits 1, 2 considérés se compose d'un circuit simple sur lequel sont intercalées des bobines $B'_1, B''_1, B'''_1, \dots$; $B'_2, B''_2, B'''_2, \dots$. Nous pouvons supposer que B'_1 envoie un flux non négligeable seulement dans B'_2 ; nous pouvons alors calculer l'intégrale (2) pour ces deux bobines *en les fermant par quelques éléments surajoutés* qui ne changent pas sensiblement la valeur du résultat. Nous définissons ainsi une série de coefficients d'induction mutuelle M', M'', M''', \dots relatifs aux parties des circuits 1 et 2, coefficients qui jouissent des propriétés associative et commutative.

4°. — Plus généralement, cela revient à diviser le système total en un certain nombre de systèmes dont nous calculons à part les énergies :

$$L'_1 i_1^2 + L'_2 i_2^2 + 2M'_{12} i_1 i_2,$$

$$L''_1 i_1^2 + L''_2 i_2^2 + 2M''_{12} i_1 i_2, \dots$$

Nous avons le droit de les considérer comme isolés, par suite fermés ; car une petite modification de l'un des circuits ne peut amener qu'une petite modification du champ, par suite une variation petite de l'énergie de déformation de l'éther.

5°. — Regardons le même problème sur une autre face.

Admettons que l'énergie d'aimantation de l'éther corresponde à une déformation fonction, du reste quelconque, du champ en chaque point. Pour calculer l'énergie, il faut donc calculer le champ. Pas de difficulté quand le circuit est fermé. Mais, quand il est ouvert, nous retombons dans l'incertitude de la loi élémentaire à appliquer. Or la loi élémentaire nous est absolument inconnue ; celle de Biot et Savart est l'une de celles, en nombre infini, que nous pouvons choisir.

A la vérité, quand le circuit est à *peu près* fermé, nous avons le droit de le fermer sans modifier le champ ; cela résulte de l'identité des résultats expérimentaux et corrélativement de l'identité des résultats fournis par la loi élémentaire et la loi intégrale.

203. Cas de deux solénoïdes.

1°. — S'il n'existe que deux circuits, on démontre la relation :

$$L_1 L_2 - M^2 \geq 0.$$

D'où le corollaire : si le coefficient de self-induction d'un circuit est nul, son coefficient d'induction mutuelle sur un autre circuit est également nul.

Quand la condition : $L_1 L_2 = M^2$, est satisfaite, on dit que le système est *sans fuites magnétiques*. Dans le cas contraire, il y a fuite.

Par exemple, les fils des bobines de résistance sont enroulés de manière que la self-induction de la bobine soit sinon nulle, du moins extrêmement petite. Corrélativement, nous pouvons déplacer les bobines dans un champ quelconque; nous n'induirons aucun courant dedans.

2°. — On réalise très exactement la condition limite

$$L_1 L_2 = M^2$$

en enroulant deux fils sur le même cylindre, de manière que les spires des deux enroulements soient mélangées le plus régulièrement possible. Les bobines ont même longueur l , même section droite moyennes; n_1 et n_2 sont les nombres de spires par centimètre.

On a (§ 140) :

$$M_{12} = 4\pi n_1 n_2 l s; \quad L_1 = 4\pi n_1^2 l s, \quad L_2 = 4\pi n_2^2 l s;$$

par conséquent :

$$M_{12}^2 = L_1 L_2.$$

3°. — De l'égalité (2) du paragraphe 200 résulte une méthode de calcul des coefficients L et M .

Soit un circuit unique, siège d'un courant i . Si nous connaissons en tous les points de l'espace le champ H , nous pouvons calculer l'intégrale triple U_M . La valeur du coefficient de self-induction L est donnée par l'équation :

$$\frac{1}{2} L i^2 = U.$$

Quand les deux enroulements dont il est parlé plus haut sont le siège des courants i_1 et i_2 , le champ intérieur est sensiblement constant et égal à :

$$H = 4\pi(n_1 i_1 + n_2 i_2);$$

le champ extérieur est sensiblement nul. On a donc, pour $\mu = 1$:

$$U_M = \frac{H^2 l s}{8\pi} = 2\pi l s (n_1 i_1 + n_2 i_2)^2 = \frac{L_1 i_1^2}{2} + M i_1 i_2 + \frac{L_2 i_2^2}{2}.$$

L'identification des deux dernières expressions donne les valeurs de L_1 , L_2 , M , écrites plus haut.

4°. — Soit enfin deux solénoïdes coaxiaux. Le solénoïde 2 est moins long, de moindre diamètre que le solénoïde 1, et placé dans 1

de manière qu'en tous ses points, le champ de 1 puisse être considéré comme uniforme.

Les coefficients de self-induction sont approximativement :

$$L_1 = 4\pi n_1^2 l_1 s_1, \quad L_2 = 4\pi n_2^2 l_2 s_2;$$

$l_1, l_2; s_1, s_2$, sont les longueurs et les sections droites moyennes des bobines.

Évaluons le coefficient d'induction mutuelle.

Pour le courant unité, le champ créé par la première bobine en tout point intérieur suffisamment éloigné des extrémités est $4\pi n_1$ (en unités C. G. S.). Le flux total à travers la seconde bobine est donc :

$$M = 4\pi n_1 n_2 l_2 s_2.$$

Le raisonnement ne vaut plus rien si on échange les bobines.

On trouverait : $M' = 4\pi n_1 n_2 l_1 s_1$, et l'on sait (§ 99) que M a la même valeur, quel que soit le circuit considéré comme inducteur.

Du reste, on voit immédiatement pourquoi M' est trop grand : dans M' on évalue le flux envoyé par 2 dans 1, comme si le champ produit par 2 était uniforme en tous les points de 1, ce qui est évidemment erroné.

$$L_1 L_2 (= 16\pi^2 n_1^2 n_2^2 \cdot l_1 l_2 \cdot s_1 s_2) > M^2 (= 16\pi^2 n_1^2 n_2^2 \cdot l_2^2 s_2^2),$$

conformément à la règle énoncée ci-dessus.

Si les bobines sont extrêmement voisines et de même longueur, les deux valeurs deviennent identiques.

204. Circuit unique; établissement du courant.

1°. — On ferme brusquement un circuit sur une force électromotrice constante E ; la résistance totale est r .

Pour savoir comment s'établit le courant, appliquons le principe de la conservation de l'énergie, auquel nous avons montré que toutes les lois particulières obéissent.

Pendant le temps dt , la pile fournit l'énergie $Eidt$; elle se retrouve sous forme de chaleur, $ri^2 dt$, et sous forme d'accroissement d'énergie cinétique :

$$Eidt = ri^2 dt + \frac{1}{2} d(Li^2), \quad E = ri + L \frac{di}{dt},$$

quand L reste constant, c'est-à-dire quand le circuit ne se déforme pas.

Intégrons; écrivons que le courant est nul à l'origine des temps. Posons :

$$\tau = L : r, \quad I = E : r;$$

il vient :

$$i = I \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

La constante $\tau = L : r$ s'appelle *constante de temps*.

C'est le temps nécessaire pour que le courant arrive aux $632/1000$ de sa valeur limite.

En effet, pour $t = \tau$, on a :

$$\frac{i}{I} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} = \frac{1,718}{2,718} = 0,632.$$

Par exemple, un relais de l'État a comme constantes :

$$r = 400 \text{ ohms}, \quad L = 4 \text{ henrys};$$

il fonctionne avec une intensité de 0,5 milliampères.

Sa constante de temps est :

$$\tau = L : r = 4 : 400 = 0^s,01.$$

La courbe OAB représente la loi d'établissement. Le courant tend asymptotiquement vers la valeur I .

La tangente à l'origine passe par le point d'intersection de l'asymptote

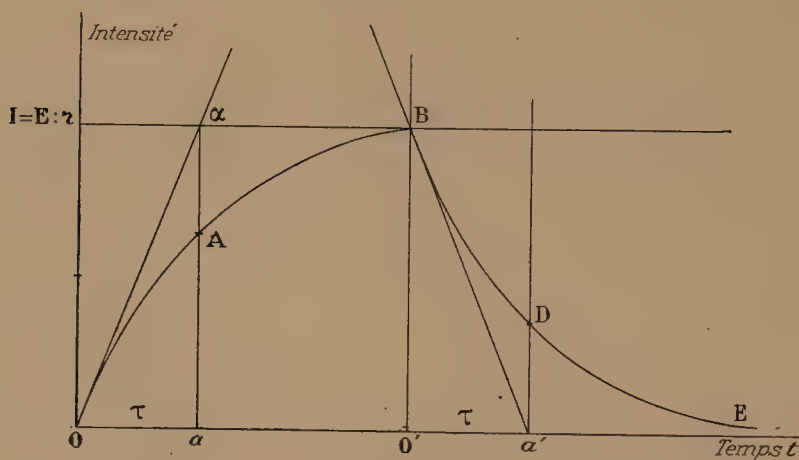


Fig. 219.

tote avec la verticale menée par le point a tel qu'on ait $\overline{Oa} = \tau$.

La courbe est donc caractérisée par la *valeur de la constante de temps*.

On réduit τ soit en augmentant la résistance, soit en diminuant la self. Ainsi τ est plus grand quand l'armature de l'électro est en contact : la self d'un récepteur Morse de l'État passe de 6 à 41 henrys, suivant que l'armature est éloignée ou rapprochée de l'électro.

Il ne s'agit ici que d'ordres de grandeur ; les électros ayant un noyau de fer et l'hystérésis n'étant pas négligeable, en toute rigueur le coefficient L n'existe pas (§ 244).

L'étude de la self et des moyens de la diminuer a une importance capitale en télégraphie, quand il s'agit d'augmenter la rapidité des signaux.

Quand les bobines contiennent du fer, l'équation différentielle devient :

$$ri + \frac{dF}{dt} = E;$$

F est à chaque instant le flux d'induction à travers le circuit. Il n'est plus proportionnel à l'intensité du courant. Le phénomène a toujours même allure; mais la loi d'établissement n'est plus une exponentielle.

En utilisant des circuits magnétiques fermés (voir la seconde partie de ce Cours) et des enroulements contenant un grand nombre de spires, on peut faire en sorte que le courant mette plusieurs secondes à atteindre sa valeur limite.

2°. — QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ TRANSPORTÉE.

Multiplions par dt les deux membres de l'équation :

$$\frac{E}{r} - i = \frac{L}{r} \frac{di}{dt},$$

et intégrons de 0 à t . Il vient :

$$It - \int i dt = \frac{Li}{r}.$$

Nous évaluons ainsi l'aire comprise entre la courbe OAB et l'asymptote; autrement dit, la quantité d'électricité qui manque en raison de la non-instantanéité de l'établissement du courant.

Le résultat est un cas particulier d'un théorème général sur lequel nous reviendrons (§ 207).

3°. — MANIPULATION.

Une lame de fer, dont les vibrations sont entretenues électriquement, interrompt un grand nombre de fois par seconde (100, par

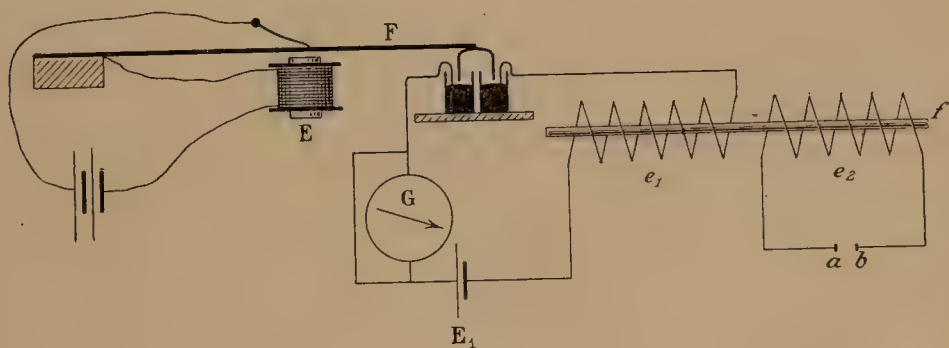


Fig. 220.

exemple) le circuit de la pile E_1 qui contient un galvanomètre et l'enroulement e_1 .

L'enroulement e_2 est ouvert : son rôle est ici nul (voir § 207).

Nous verrons que le galvanomètre peut être shunté : le courant moyen qui le traverse est la même fraction du courant total que si les courants étaient permanents (§ 211). Cette proposition est importante; car, pour que les phénomènes soient nets, la résistance totale du circuit doit être petite.

L'expérience montre que l'indication du galvanomètre dépend de la self du circuit, par suite de la quantité de fer qu'on introduit dans la bobine e_1 .

205. Circuit unique; suppression du courant.

1°. — Supposons pratiquement possible la suppression brusque de la force électromotrice et son remplacement par une résistance égale. Le courant ne disparaît pas instantanément; il diminue suivant l'équation (fig. 219, courbe BDE) :

$$ri = -L \frac{di}{dt}, \quad i = I \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

L'énergie $LI^2 : 2$ est récupérée sous forme d'effet Joule; on trouve en effet :

$$\int_0^\infty i^2 r dt = \frac{LI^2}{2}.$$

La force électromotrice de self-induction a pour valeur maxima (valeur de début) rI ; elle est précisément égale à celle de la pile de charge.

Nous trouverons, au § 208, une application de ce calcul.

2°. — Le cas précédent est schématique. Pendant la rupture du circuit, la résistance varie suivant une loi généralement compliquée et inconnue. Il est cependant nécessaire de préciser sur des hypothèses simples les conditions générales du phénomène.

Quelle que soit la loi de variation de la résistance, l'équation différentielle est :

$$ri = -L \frac{di}{dt}.$$

Le premier membre de l'équation est nécessairement positif; di est donc nécessairement négatif. Autrement dit, *la valeur maxima du courant est la valeur initiale I : le courant ne fait que décroître.*

Pour fixer les idées, posons que la résistance varie suivant la loi :

$$r = r_0 \exp \alpha t.$$

Il vient :

$$i = I \exp \left[\frac{r_0}{L\alpha} (1 - \exp \alpha t) \right].$$

La force électromotrice de self-induction est :

$$e = ri = Ir_0 \exp \alpha t \cdot \exp \left[\frac{r_0}{L\alpha} (1 - \exp \alpha t) \right].$$

Sa valeur initiale est naturellement encore :

$$e_0 = Ir_0.$$

Sa valeur maxima a lieu pour :

$$\exp \alpha t = \frac{\alpha L}{r_0}; \quad e_m = Ir_0 \cdot \frac{\alpha L}{r_0} \exp \left[\frac{r_0}{L\alpha} - 1 \right].$$

3°. — SUPPRESSION DE L'ÉTINCELLE DE RUPTURE AU MOYEN D'UNE DÉRIVATION.

De ce que l'intensité décroît toujours, quelle que soit la loi de variation de la résistance pendant la rupture, découle le moyen de supprimer l'étincelle de rupture en utilisant une dérivation permanente AB, rectiligne, par suite peu inductive.

Entre les bornes A et B de cette dérivation dont R est la résistance, par suite entre les points *a* et *b* entre lesquels le circuit est rompu, nous sommes assurés que la différence de potentiel n'excédera pas le produit RI, où I est l'intensité dans la bobine au moment de la rupture.

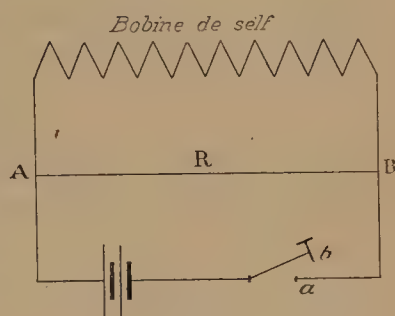


Fig. 221.

On utilise un fil de platine fin, ou même un trait de crayon de mine de plomb sur une surface rugueuse.

206. Vibrateurs électromagnétiques. Sonneries.

1°. — Comme application de ce qui précède, étudions le mécanisme de la sonnerie d'appartement dont on présente aux débutants une théorie absurde.

Montrons que l'inertie électrique joue, dans le fonctionnement de l'appareil, un rôle au moins aussi important que l'inertie mécanique; un troisième rôle essentiel est dévolu à l'hystérésis.

La théorie élémentaire est la suivante. Le courant passe quand le ressort DE touche la partie oscillante montée sur le ressort CB; l'armature est attirée par l'électro. D'où rupture du courant, fin de l'attraction, retour en arrière, nouveau contact avec DE, passage du courant et commencement des phénomènes.

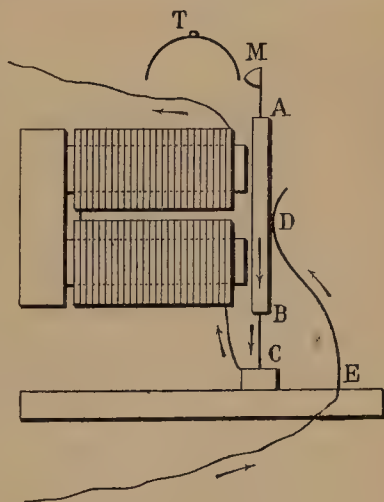


Fig. 222.

Admettons que le courant atteigne instantanément sa valeur limite et que l'aimantation soit une fonction uniforme de l'intensité du courant.

Dans ces hypothèses, l'attraction F sur l'armature est une fonction uniforme de la distance : $x = a + b \sin \omega t$, d'un point de l'armature au point correspondant des extrémités polaires. Le travail dépensé est donc : $\int_{x_0} F dx$, en appelant x_0 la distance pour laquelle le ressort ED cesse de toucher le vibreur MBC . Cette intégrale est évidemment nulle ; car, dans l'aller et le retour du vibreur, on retrouvera, pour chaque x déterminé, deux fois la même attraction F avec des déplacements dx s'effectuant en sens contraires. L'intégrale est composée d'éléments deux à deux égaux et de signes contraires. On ne fournit donc aucune énergie au vibreur, rien qui compense les frottements : le mouvement indéfini est impossible.

Il en va différemment si l'on tient compte de la self-induction. Quand le vibreur s'éloigne de l'armature, vient toucher le ressort DE et, *malgré l'attraction de l'armature*, poursuit son chemin en vertu de la vitesse acquise, le courant n'arrive pas instantanément à sa valeur limite. Pour un x déterminé l'attraction est donc moindre, quand le vibreur s'éloigne (l'attraction produit un travail négatif), que quand il s'approche (l'attraction produit un travail positif). Grâce à la self-induction de l'électroaimant, le travail fourni au vibreur n'est pas nul.

Une théorie complète tient compte du fait que le contact avec le ressort DE s'effectue un peu plus vers la droite au moment de la fermeture du courant qu'au moment de la rupture. Enfin les variations de la self pendant le déplacement et l'hystérésis interviennent. Le phénomène complexe n'est pas susceptible d'une étude quantitative ; il est très différent de celui que suppose la théorie élémentaire.

2°. — Le vibreur électromagnétique est utilisé dans les sonneries, généralement pour entretenir des mouvements oscillatoires (§ 204, diapason, ...). La période de l'oscillateur est plus ou moins modifiée par l'attraction sur l'armature, ce qui a de l'importance dans le cas des diapasons. On dit que l'appareil est *tonique*, en ce sens que la période est (au moins approximativement) imposée par l'inertie de l'oscillateur et l'élasticité du ressort qui le porte.

Le vibreur électromagnétique sert aussi à rompre périodiquement un circuit. Pour ce but, il entre dans la construction des bobines de Ruhmkorff. Mais il présente de graves inconvénients, qui l'ont fait rejeter et remplacer par des rupteurs *atoniques*.

Nous reviendrons là-dessus dans la seconde partie de ce Cours.

207. Équations générales.

Pour un nombre quelconque de circuits fermés immobiles, le système des équations différentielles devient :

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} + \dots = E_1,$$

$$r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt} + \dots = E_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

Intégrons ces équations entre le temps 0 et t ; posons :

$$\int_0^t i_1 dt = q_1, \quad \int_0^t i_2 dt = q_2, \dots$$

Il vient :

$$r_1 q_1 + L_1 \Delta i_1 + M_{12} \Delta i_2 + M_{13} \Delta i_3 + \dots = \int_0^t E_1 dt,$$

$$r_2 q_2 + L_2 \Delta i_2 + M_{21} \Delta i_1 + M_{23} \Delta i_3 + \dots = \int_0^t E_2 dt,$$

$$\dots \dots \dots$$

Par définition, q_1, q_2, \dots sont les quantités d'électricité transportées dans les circuits 1, 2, ... entre les temps 0 et t .

$\Delta i_1, \Delta i_2, \dots$ sont les variations des intensités entre les mêmes temps.

Dans les conditions habituelles, les courants sont tous nuls à l'origine des temps; sauf un, ils sont encore nuls au temps t pris assez grand. Les équations générales se simplifient beaucoup.

208. Cas de deux circuits.

1^o. — Bornons-nous au cas de deux circuits; supposons la force électromotrice E_2 nulle et la force électromotrice E_1 constante. On a :

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= E, \\ r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Les équations générales du paragraphe précédent deviennent :

$$r_1 q_1 - \int E dt = - (L_1 \Delta i_1 + M \Delta i_2),$$

$$r_2 q_2 = - (L_2 \Delta i_2 + M \Delta i_1).$$

Si les phénomènes d'induction n'existaient pas, on aurait simplement :

$$r_1 q_1 = \int E dt, \quad r_2 q_2 = 0.$$

Les seconds membres mesurent les quantités transportées par ce qu'on appelle quelquefois les *extra-courants*.

En particulier, le courant i_2 part de 0 pour revenir à 0 : $\Delta i_2 = 0$.

D'où les relations fondamentales que nous allons ci-dessous retrouver autrement :

$$r_1 q_1 - \int E dt = - L_1 \Delta i_1, \quad r_2 q_2 = - M \Delta i_1.$$

Avant d'aller plus loin, rappelons en quelques mots la manière de traiter les équations différentielles simultanées (*Math. Gén.*, §§ 297 et suivants).

Nous savons que les solutions sont des sommes d'exponentielles. Posons donc :

$$r_1 i_1 - E = A e^{\rho t}, \quad r_2 i_2 = A' e^{\rho t}.$$

Substituons dans les équations; il vient les conditions à *satisfaire identiquement* :

$$\begin{aligned} -A \left(1 + \frac{L_1}{r_1} \rho \right) &= A' \frac{M}{r_2} \rho, \\ -A' \left(1 + \frac{L_2}{r_2} \rho \right) &= A \frac{M}{r_1} \rho. \end{aligned} \quad (2)$$

Multiplions membre à membre; nous trouvons l'équation à laquelle ρ satisfait :

$$(L_1 L_2 - M^2) \rho^2 + (L_2 r_1 + L_1 r_2) \rho + r_1 r_2 = 0. \quad (3)$$

On vérifiera l'homogénéité en se rappelant que les coefficients L et M ont les dimensions d'une ligne, r les dimensions d'une vitesse, et que ρ est l'inverse d'un temps.

Posons : $\rho = -\alpha \pm k$.

En définitive, on a :

$$\begin{aligned} r_1 i_1 - E &= e^{-\alpha t} (A e^{kt} + B e^{-kt}), \\ r_2 i_2 &= e^{-\alpha t} (A' e^{kt} + B' e^{-kt}). \end{aligned}$$

Il n'y a que deux constantes arbitraires; car entre A et A' , B et B' existent l'une ou l'autre des conditions (2), qui sont compatibles en vertu de (3). On a :

$$\alpha = \frac{L_2 r_1 + L_1 r_2}{2\Delta}, \quad k = \sqrt{\frac{(L_2 r_1 + L_1 r_2)^2}{4\Delta^2} - \frac{r_1 r_2}{\Delta}},$$

en posant : $\Delta = L_1 L_2 - M^2$.

Nous savons que Δ est toujours positif; il en est de même de α ; on a nécessairement $k < \alpha$. En définitive, $-\alpha + k$, $-\alpha - k$, sont négatifs; l'état limite correspond à :

$$I_1 = E : r_1, \quad i_2 = 0,$$

ce qui était évident *a priori*.

Remarquons que, d'après ces formules, le phénomène a toujours une durée infinie. Pratiquement, le courant 1 prend sa valeur limite, le courant 2 revient à la valeur nulle, en un temps très court, une petite fraction de seconde. Le lecteur comprend, dès lors, ce que signifie la locution : *allonger le phénomène*; c'est rendre plus longue la *partie sensible* du phénomène.

2°. — COURANTS DE FERMETURE.

A l'origine des temps, les deux courants sont nuls. On ferme

brusquement le circuit 1. On demande comment la présence du circuit 2 réagit sur le mode d'installation du courant 1.

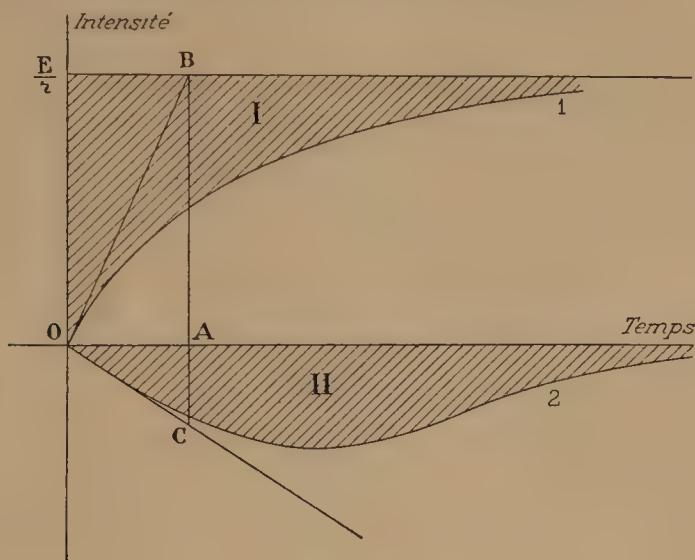


Fig. 223.

Les constantes d'intégration A et B sont complètement déterminées. Pour $t=0$, on a : $i_1=i_2=0$; d'où :

$$A+B+E=0, \quad A'+B'=0.$$

Représentons les courants 1 et 2 (fig. 223).

Les tangentes à l'origine O satisfont à la condition :

$$i_2=0, \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (4)$$

Menons une verticale quelconque CAB; elle coupe ces tangentes de manière qu'on ait (en valeur absolue) :

$$\overline{BA} : \overline{AC} = L_2 : M.$$

Substituons dans la première équation (1) la valeur $di_2:dt$ tirée de (4). Il vient :

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{EL_2}{L_1L_2 - M^2} = \frac{E}{L_1 - (M^2:L_2)}.$$

Ainsi la tangente OB se redresse à mesure qu'augmente le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits. A la limite pour $\Delta=0$ (circuits intimement mélangés), les tangentes sont verticales; nous reviendrons au §^o sur ce cas.

3°. — Intégrons les équations (1) entre le temps 0 et le temps t assez grand pour que i_2 soit redevenu nul, et i_1 soit à peu près constant et égal à $E:r_1$:

$$r_1 \int i_1 dt = Et - L_1 \frac{E}{r_1} \quad r_2 \int i_2 dt + \frac{ME}{r_1} = 0.$$

Les aires ombrées I et II de la figure 223 sont (en valeurs absolues) :

$$\text{aire I} = EL_1 : r_1^2, \quad \text{aire II} = EM : r_1 r_2.$$

En particulier, l'aire I est absolument indépendante de l'existence du circuit 2. Celle-ci modifie bien la loi suivant laquelle le courant 1 s'installe; mais elle ne change pas le manque définitif d'électricité transportée. A mesure que Δ devient plus petit, i_1 croît d'abord plus vite; mais, l'aire ombrée demeurant invariable, i_1 croît ensuite moins vite; la courbe s'approche plus lentement de son asymptote.

De même l'aire II est absolument indépendante du coefficient de self-induction du circuit II.

4°. — On s'explique ainsi l'espèce de retard à l'installation du courant dans un circuit, produit par l'existence d'un circuit voisin, retard si net que quelques physiciens l'avaient au début explicitement admis comme phénomène immédiat.

On s'explique aussi la curieuse expérience suivante.

Les vibrations d'une lame de fer F (fig. 220) sont entretenues par l'électro E. Elle interrompt périodiquement le circuit d'une pile E_1 , qui comprend le galvanomètre G et l'un des enroulements e_1 d'une bobine. Supposons d'abord l'enroulement e_2 ouvert.

L'indication du galvanomètre dépend de la self du circuit e_1 ; l'intensité moyenne du courant qui le traverse *diminue* quand on augmente la self par l'introduction de barreaux de fer doux f dans la double bobine.

Fermons le circuit e_2 .

Toutes choses égales d'ailleurs, l'indication du galvanomètre augmente.

On prévoit aisément que l'accroissement relatif du courant moyen, dû à la fermeture de e_2 , sera considérable si les interruptions sont très rapides; il deviendra insignifiant si la période des interruptions est relativement grande. Ce n'est, en effet, qu'au début que l'existence du circuit 2 intervient pour faciliter l'installation du courant dans le circuit 1.

5°. — Pour fixer les idées, insistons sur le cas limite où Δ est quasiment nul, condition non impossible à réaliser (§ 203).

Pour simplifier l'écriture, supposons les circuits identiques.

Une des racines $\rho' = -(\alpha + k)$, de l'équation caractéristique (3), devient infinie; l'autre $\rho = -(\alpha - k)$, a pour valeur :

$$\rho = -r : 2L.$$

On trouve aisément, à partir de (2) :

$$A = A', \quad B = -B'.$$

Les conditions $i_1 = i_2 = 0$, pour $t = 0$, deviennent :

$$A = B = A' = -B' = E : 2.$$

La solution générale s'écrit :

$$i_1 = \frac{E}{r} \left[1 - \frac{1}{2} e^{\rho t} - \frac{1}{2} e^{\rho' t} \right],$$

$$i_2 = - \frac{E}{2r} (e^{\rho t} - e^{\rho' t}).$$

Pour $t=0$, nous retrouvons $i_1 = i_2 = 0$, naturellement.

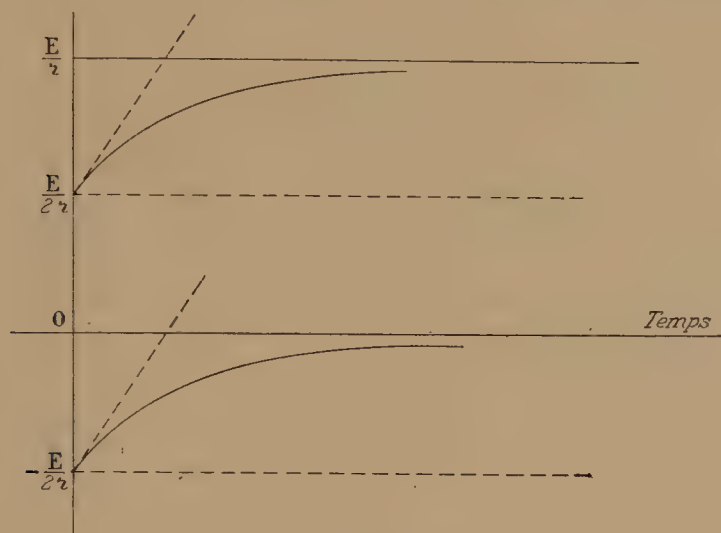


Fig. 224.

Mais faisons t très petit; ρ' étant très grand, l'exponentielle correspondante est nulle; donc, à partir d'un temps extrêmement petit, les équations se réduisent à :

$$i_1 = \frac{E}{r} \left[1 - \frac{1}{2} e^{\rho t} \right], \quad i_2 = - \frac{E}{2r} e^{\rho t}.$$

Tout se passe comme si les courants prenaient instantanément les valeurs finies égales et de signes contraires :

$$(t=0) \quad i_1 = E : 2r, \quad i_2 = - E : 2r.$$

Après quoi i_1 croît jusqu'à sa limite $E : r$, tandis que i_2 décroît jusqu'à 0. Mais, cela est essentiel, le coefficient du temps dans les exponentielles, au lieu d'être $-r : L$, comme dans le cas du circuit unique, est maintenant $-r : 2L$. De sorte que si le courant i_1 prend instantanément une valeur finie (égale à la moitié de la valeur limite dans le cas où les circuits sont identiques), il n'arrive pratiquement à cette valeur limite qu'en un temps plus long que si le circuit 1 était seul.

6°. — COURANT DE RUPTURE.

Il me paraît inutile de discuter l'expérience irréalisable, où l'on suppose le courant i_1 installé et où l'on supprime brusquement la

force électromotrice E en la remplaçant par une résistance égale. Il vaut mieux étudier l'expérience (au surplus irréalisable en toute rigueur) où l'on suppose le courant i_1 parvenu à sa valeur limite $I_1 = E : r_1$, et où *brusquement* on rompt le circuit 1; la résistance de ce circuit passe censément de 0 à ∞ *en un temps négligeable*.

i_1 étant nul, sauf à l'origine des temps, la première équation (1) disparaît. Reste la seconde :

$$r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0, \quad (3)$$

que nous avons étudiée au paragraphe 205. Le courant dans le circuit 2 est de la forme :

$$i_2 = I_2 \exp - (Lt : r_2).$$

Il faut déterminer la constante I_2 , c'est-à-dire la valeur initiale de ce courant. Sa discontinuité (il est nul avant le début de l'expérience et brusquement devient I_2) correspond à la discontinuité admise pour la résistance du circuit 1.

Afin de déterminer I_2 , remarquons qu'au début de l'expérience (i_2 est alors nul), le flux dans 2 est égal à Mi_1 . A la fin de l'expérience, le flux est nul. La variation de flux est donc Mi_1 ; c'est, au signe près, la somme des forces électromotrices induites. Puisque la résistance est constante, la quantité totale transportée par le courant 2 est :

$$-Mi_1 : r_2.$$

L'équation (3), multipliée par dt et intégrée entre 0 et ∞ , donne donc :

$$Mi_1 = L_2 I_2, \quad I_2 = i_1 (M : L_2).$$

La valeur initiale du courant dans 2 est à la valeur limite du courant dans 1 comme le coefficient d'induction mutuelle est au coefficient de self-induction du circuit 2.

Dans la pratique, la résistance du circuit 1 ne passe pas instantanément de r_1 à l'infini. La discontinuité du courant i_2 disparaît; la courbe représentative devient intermédiaire entre les courbes des figures 219 et 223.

Bien que la loi du courant de rupture dans le circuit 2 n'ait aucun rapport avec la loi du courant de fermeture (fig. 219 à droite et fig. 223 en bas), les deux courants transportent en sens inverses exactement la même quantité d'électricité $\pm Mi_1 : r_2$.

Leurs effets sur un galvanomètre balistique sont donc les mêmes; mais leurs effets sur un électrodynamomètre balistique sont différents. Le premier appareil mesure la quantité $\int i dt$, le second mesure la quantité $\int i^2 dt$.

7°. — BOBINES CONTENANT DU FER.

Quand les bobines contiennent du fer, il est impossible de parler

de coefficients de self-induction et d'induction mutuelle. Il n'est même plus possible dans les flux de faire le départ de ce qui est dû à l'un ou à l'autre circuit. Nous devons poser, en vertu de la loi générale de l'induction :

$$r_1 i_1 + \frac{dF_1}{dt} = E, \quad r_2 i_2 + \frac{dF_2}{dt} = 0,$$

où $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont les flux d'induction à chaque instant à travers les deux circuits.

Multiplions la seconde équation par dt , intégrons entre 0 et ∞ ; il vient :

$$r_2 q_2 + \Delta F_2 = 0.$$

Le courant produit dans le circuit 2 par la fermeture du circuit 1, et le courant produit par sa rupture ne transportent plus nécessairement les mêmes quantités d'électricité; car rien ne prouve que le fer reprend, à la fin de l'expérience complète, l'aimantation qu'il avait au début.

209. Courants de Foucault; écrans électromagnétiques.

1^o. — On sait depuis longtemps qu'une plaque conductrice épaisse, non magnétique pour ne rien compliquer, joue *en quelque sorte* le rôle d'écran par rapport aux variations de flux magnétique.

En particulier, tenons dans les mains (mouillées d'eau salée pour rendre la peau plus conductrice) deux cylindres métalliques C servant d'extrémités au fil d'une bobine 2.

Un courant passe dans la bobine 1 voisine.

On éprouve une brusque commotion quand on rompt le circuit de la bobine 1. Cette commotion s'affaiblit et disparaît quand on introduit entre 1 et 2 des plaques de cuivre P de plus en plus épaisses.

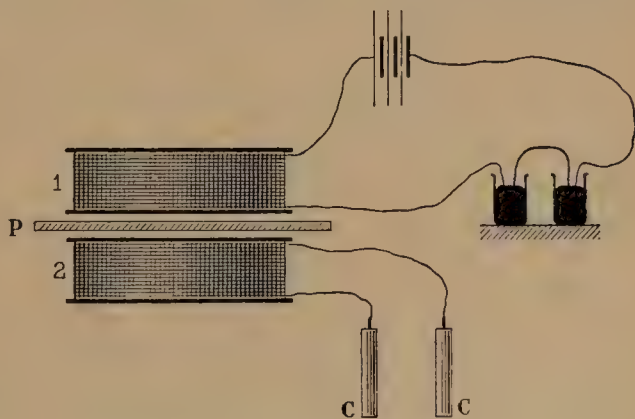


Fig. 225.

En raison de notre hypothèse fondamentale que *les forces magnétiques se transmettent de même à travers n'importe quel milieu*, la variation totale de flux à travers 2, quand on rompt le circuit de 1, ne dépend pas de l'existence de la plaque P. Si dans le circuit 2 on intercale un galvanomètre balistique, et si on recueille la quantité d'électricité induite (voir plus loin, § 222) pendant que le courant dans 1 passe de i_1 à 0, on trouve une impulsion qui mesure $M i_1 : r_2$;

r_2 est la résistance du circuit 2, et M le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines; *l'impulsion est indépendante de l'existence et de l'épaisseur de la plaque P.*

Si donc la commotion disparaît, c'est non parce que la plaque supprime le courant induit, mais parce que la loi de ce courant est modifiée. Pour qu'il y ait commotion, il faut une force électromotrice considérable : une force électromotrice de longue durée, mais petite, n'a pas d'action. En définitive, la plaque allonge le phénomène *sensible* qui devient incapable d'agir sur notre organisme.

2°. — L'expérience réussit quand on utilise, au lieu du courant induit de rupture, le courant induit de fermeture. Mais, *sans la plaque*, la commotion est moins forte que dans le premier cas, ce qui prouve un phénomène plus lent. L'interposition de la plaque supprime encore la commotion; mais l'expérience est moins démonstrative.

Le galvanomètre, au contraire, indique la même quantité d'électricité induite pour le courant induit de fermeture et le courant de rupture, *que la plaque existe ou non.*

L'expérience réussit quand on remplace la plaque conductrice par une bobine. Ouverte, son effet est quasiment nul; elle diminue la commotion quand on la ferme sur elle-même.

Au début, on utilisait des *spirales* plates constituées par un ruban de cuivre guipé de soie; deux spirales posées l'une sur l'autre constituaient les circuits primaire et secondaire. On ne voit pas bien l'avantage de ce dispositif, qui rend difficile la construction des bobines.

Les expériences précédentes montrent à l'évidence avec quel soin il faut préciser ce que détermine l'appareil de mesure employé. Avec les restrictions que nous dirons, le galvanomètre ordinaire mesure

la quantité :
$$q = \int i dt.$$

L'effet physiologique et l'aimantation (voir plus loin) mesurent une quantité toute différente; ils semblent plutôt liés à la valeur maxima de la force électromotrice induite, par suite à la valeur maxima du courant, puisque la résistance demeure invariable.

3°. — Nous supposons que la plaque n'est pas magnétique; nous excluons le fer, le nickel et le cobalt.

Si la plaque est magnétique, le phénomène se complique.

Assurément la plaque continue à jouer le rôle d'écran magnétique et, de ce chef, allonge les phénomènes; mais elle intervient aussi par ses propriétés magnétiques et augmente considérablement l'induction mutuelle. A la vérité, il n'est plus possible de définir entre les bobines un coefficient d'induction mutuelle (§ 229); mais l'allure du phénomène reste la même.

Suivant que l'un ou l'autre effet l'emporte, la commotion peut être diminuée ou augmentée.

210. Courants de différents ordres.

1°. — Voilà le type de la question d'intérêt médiocre, mais dont

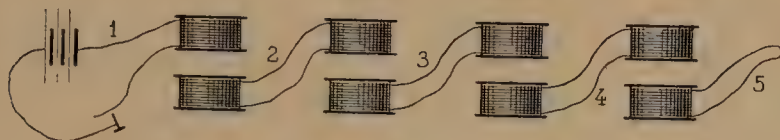


Fig. 226

il devient nécessaire de parler, parce qu'elle a été travaillée au début par nombre d'expérimentateurs, et parce que certains traités « classiques » énoncent des stupidités à son propos.

Une série de bobines (que, pour simplifier les notations, nous supposons identiques et identiquement placées) s'induisent les unes les autres : par hypothèse, il n'existe de force électromotrice imposée que dans la première; le premier circuit n'agit que sur le second, qui réagit sur le premier et agit sur le troisième. Celui-ci réagit sur le second et agit sur le quatrième, et ainsi de suite.

Les équations vont d'elles-mêmes :

$$r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = E,$$

$$r_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{d}{dt} (i_1 + i_3) = 0,$$

$$r_3 i_3 + L \frac{di_3}{dt} + M \frac{d}{dt} (i_2 + i_4) = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à la dernière (ici notée 5) :

$$r_5 i_5 + L \frac{di_5}{dt} + M \frac{di_4}{dt} = 0.$$

Pour préciser les idées, supposons que la force électromotrice imposée soit sinusoïdale : $E = E_0 \sin \omega t$; nous apprendrons plus tard à la produire. Il est évident que tous les courants sont eux-mêmes sinusoïdaux et de même période.

Posons, en effet : $i_1 = I_1 \sin(\omega t - \alpha_1)$, et ainsi de suite.

Substituons dans les équations précédentes.

Il vient cinq équations qui doivent être identiquement satisfaites. Développons les sinus et cosinus; égalons séparément à zéro les coefficients de $\sin \omega t$ et de $\cos \omega t$: nous aurons dix équations déterminant les I et les α .

On trouvera plus loin (§ 253) de tels calculs poussés à bout.

Voilà donc un cas très simple où le courant, étant sinusoïdal dans la première bobine, l'est dans toutes les autres *avec une période identique*.

2°. — Passons au cas, ordinairement mal traité, de l'établissement (ou de la suppression) d'un courant dans la première bobine; la force électromotrice E est constante.

On demande la loi des courants dans les autres bobines.

Nous avons des équations simultanées qui admettent comme solution générale une somme d'exponentielles. Les calculs sont inextricables. Mais voici quelques résultats généraux.

Quand un courant s'établit dans 1 et passe de 0 à i_1 , le flux varie dans 2 d'une quantité parfaitement déterminée et égale à Mi_1 . L'impulsion sur l'aiguille d'un galvanomètre balistique intercalé sur 2, impulsion qui mesure la quantité transportée q_2 , est donc bien déterminée *et indépendante de l'existence des circuits 3, 4, 5....* Cette existence modifie seulement la forme du courant $i_2 = f(t)$.

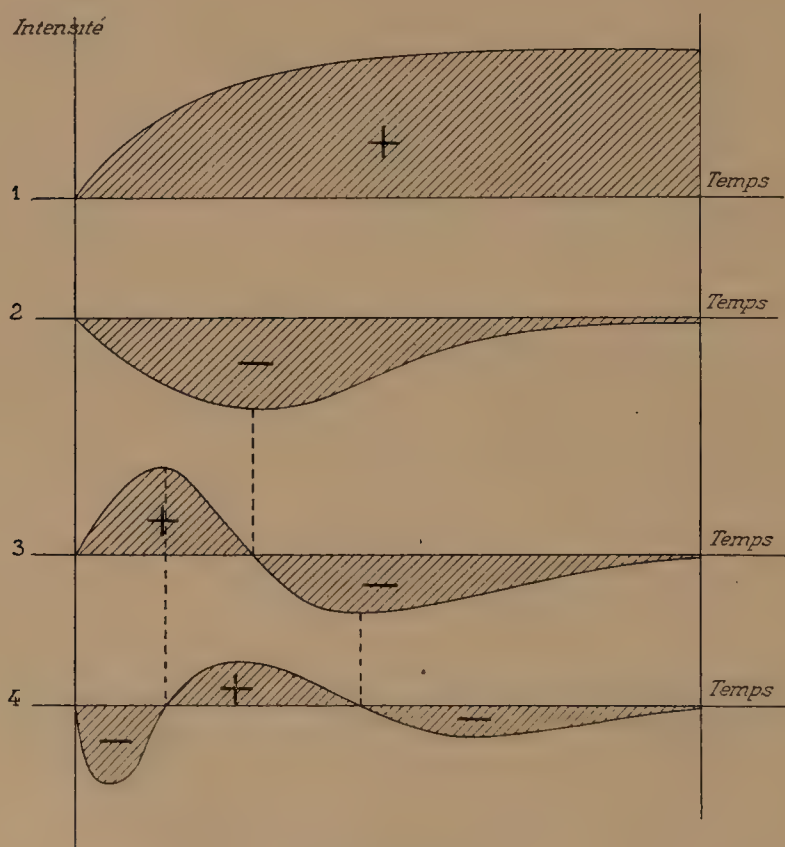


Fig. 226 bis.

Quand le courant dans 1 varie de i_1 à 0, la variation de flux dans 2 est égale à $-Mi_1$: l'impulsion sur l'aiguille du galvanomètre,

égale et contraire à la précédente, est encore indépendante de l'existence des circuits 3, 4, 5,.....

Passons aux circuits 3, 4, 5,.....

Quand un courant s'établit dans 1 et passe de 0 à i_1 , le courant 2 partant de 0 et revenant à 0, la variation totale du flux est nulle dans tous les autres circuits. Donc la quantité totale q_2 transportée par 2 n'est pas nulle; mais on a (§ 207) :

$$q_3 = q_4 = \dots = 0. \quad (1)$$

La figure 226 *bis* fixera les idées. Elle n'a aucune prétention à l'exactitude quantitative : les données me manquent pour en construire une exacte. C'est un phénomène bien remarquable que l'on ne termine jamais rien, que les savants dispersent leurs efforts, généralement inintelligents, sur une infinité de sujets qu'ils effleurent, et ne se soucient pas de connaître raisonnablement les phénomènes les plus simples. En tous cas, la figure que je donne n'est pas absurde : il faut m'en savoir gré.

Les aires délimitées par les courbes 1 et 2 ne sont évidemment pas nulles. Si la figure était quantitativement correcte, la somme des aires délimitées par chacune des courbes 3, 4, 5,..... en dessus et en dessous de l'axe des temps, devrait être *algébriquement* nulle. C'est ce qu'expriment les équations (1).

Aujourd'hui que l'on possède des oscillographes, en quelques jours on aurait des courbes correctes. Mais allez dire à nos professeurs de Paris qu'un tel travail serait plus utile aux étudiants que leurs sots petits mémoires sur les ions !

3°. — Le courant 1 part de 0 et arrive à sa valeur limite; nous dirons qu'il a un zéro.

Le courant 2 part de 0 et revient à 0; nous dirons qu'il a deux zéros.

La question se pose de savoir combien de zéros a le courant i_n .

Il semble bien que la réponse soit n . En effet, supposons absolument prédominant sur le courant i_n le flux de la bobine $n-1$; négligeons donc pour un instant la réaction de self du circuit n et la réaction mutuelle du circuit $n+1$. La force électromotrice induite par le circuit $n-1$ est nulle quand le courant i_{n-1} est maximum ou minimum. Or, si ce courant a $n-1$ zéros (y compris le début et la fin), il a vraisemblablement $n-2$ maximums ou minimums; donc le courant i_n a $n-2$ zéros, plus les zéros du commencement et de la fin, soit en tout n .

Si on se reporte au traité de M. Bouty, par exemple, on trouve indiqué $2^{n-2} + 1$ zéros, avec des courbes de courant présentant des rebroussements : c'est inepte. Comment veut-on qu'une courbe obtenue en sommant des exponentielles ait des rebroussements?

On remarquera qu'au début les courants ont des sens alternati-

vement opposés, qu'à la fin ils ont le même sens, inverse de celui du courant 1.

4°. — ÉTUDE DES COURANTS INDUITS D'ORDRE SUPÉRIEUR PAR LE GALVANOMÈTRE ET L'ÉLECTROLYSE.

Il est sûr qu'à partir du troisième circuit, les conditions :

$$q_3 = q_4 = \dots = 0,$$

sont satisfaites, lors de l'établissement et de la suppression du courant 1. Cependant l'aiguille du galvanomètre balistique intercalé sur l'un des circuits 3, 4, 5,.... ne reste généralement pas au zéro : preuve qu'il faut nous défier des indications de cet appareil pour des courants relativement intenses et alternativement de sens contraires (§ 325). Il suffit que la position d'équilibre de l'aiguille ne se trouve pas exactement dans le plan des spires pour qu'elle soit déviée dans le sens du courant initial.

Verdet a démontré que les courants induits d'ordre supérieur (circuits 3, 4,...) sont alternatifs, en leur faisant décomposer de l'eau acidulée. On trouve dans les deux éprouvettes du voltamètre un mélange explosif d'hydrogène et d'oxygène. Les proportions relatives des deux gaz varient très irrégulièrement, surtout quand on utilise comme électrodes des *lames* de platine, beaucoup moins avec des fils fins : ce qui n'a rien d'étonnant, vu la complexité des phénomènes d'électrolyse pour les courants alternatifs; surtout avec des lames étendues, il y a recombinaison partielle des gaz dégagés presque simultanément (voir la troisième partie de ce Cours).

Pour que la quantité du mélange gazeux soit appréciable, l'interruption et la fermeture du courant 1 sont obtenues à l'aide d'une roue portant alternativement des touches conductrices et isolantes. Pour préciser les phénomènes, on s'arrange de manière à ne fermer le circuit 2 qu'un instant avant la fermeture ou avant la rupture du circuit 1; ainsi les phénomènes dans les bobines 3, 4, 5,..... correspondent seulement à la fermeture ou à la rupture du circuit 1. Vingt ou trente mille interruptions sont nécessaires pour obtenir 1 centimètre cube de gaz; malgré cela, la durée de l'expérience n'est pas grande.

On augmente l'intensité des phénomènes en disposant des paquets de fil de fer à l'intérieur des bobines.

5°. — AIMANTATION PAR LES COURANTS INDUITS. EFFETS PHYSIOLOGIQUES.

Intercalons dans les circuits 3, 4, 5,..... un solénoïde renfermant une aiguille d'acier non aimantée; l'expérience montre qu'elle s'aimante : preuve que l'aimantation dépend non de la quantité d'électricité totale transportée, mais de la loi du courant. Le sens de l'aimantation pour un courant d'ordre donné correspond au sens du courant *initial* dont le maximum est vraisemblablement supérieur, en valeur absolue, aux autres maximums et minimums de ce courant.

Ainsi, lors de la fermeture du circuit 1, l'aimantation est de même sens pour l'aiguille soumise à l'action des circuits 1, 3, 5,...; elle est de même sens pour l'aiguille soumise à l'action des circuits 2, 4, 6,... Il n'y a aucune ambiguïté pour les courants 1 et 2 dont les sens sont respectivement invariables et inverses.

Quant aux effets physiologiques, ils sont indépendants de la direction du courant; celui-ci produit une secousse, pourvu que les maximums et minimums de la force électromotrice soient suffisants.

211. Répartition des courants variables entre les branches d'une dérivation.

1°. — Entre les points A et B d'un circuit, existe une dérivation sur les branches 1 et 2 de laquelle n'existe pas de force électromotrice.

Le reste du circuit est trop éloigné pour induire une force électromotrice appréciable dans la dérivation considérée. Nous sommes donc dans le cas où il est permis de caractériser des circuits *ouverts* par des selfs et des inductions mutuelles bien déterminées (§ 202).

Les équations de Kirchhoff sont :

$$\begin{aligned} r_1 i_1 &= A - B - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \\ r_2 i_2 &= A - B - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}; \\ r_1 i_1 + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} &= r_2 i_2 + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Multiplions (1) par dt ; intégrons entre 0 et t .

Appelons : $q_1 = \int_0^t i_1 dt, \quad q_2 = \int_0^t i_2 dt,$

ce qui passe en totalité dans les circuits 1 et 2. Il vient :

$$r_1 q_1 + (L_1 - M) \Delta i_1 = r_2 q_2 + (L_2 - M) \Delta i_2.$$

Dans l'hypothèse où les courants sont les mêmes (nuls, par exemple) aux temps 0 et t (début et fin de l'expérience), il reste :

$$r_1 q_1 = r_2 q_2.$$

Les quantités d'électricité totales se séparent comme si les circuits étaient non inductifs, résultat important parce qu'il légitime l'emploi des shunts avec le galvanomètre balistique (§ 204).

Nous venons de voir avec quelles précautions il faut employer le galvanomètre pour l'étude des courants instantanés; nous reviendrons plus loin sur cette question (§ 325). Pour intéressant que soit le théorème précédent, son application est d'autant plus délicate que l'addition d'un shunt modifie la loi du courant, ainsi que nous allons le montrer.

2°. — Si la répartition se fait *en somme* comme en l'absence de forces électromotrices induites, il n'en est pas de même à chaque instant.

Pour faciliter la discussion, faisons $L_2 = 0$, par suite $M = 0$ (§ 203). L'équation (1) se réduit à :

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2. \quad (2)$$

Au début de l'expérience, i_1 croît : le rapport $i_2 : i_1$ est, par suite, plus grand que dans l'état permanent. Le circuit 1, dont la self n'est pas négligeable, paraît plus résistant qu'il n'est en réalité.

Au contraire, quand i_1 décroît, le rapport $i_2 : i_1$ a une valeur plus petite que dans l'état permanent.

3°. — Voici deux expériences intéressantes dues à Faraday.

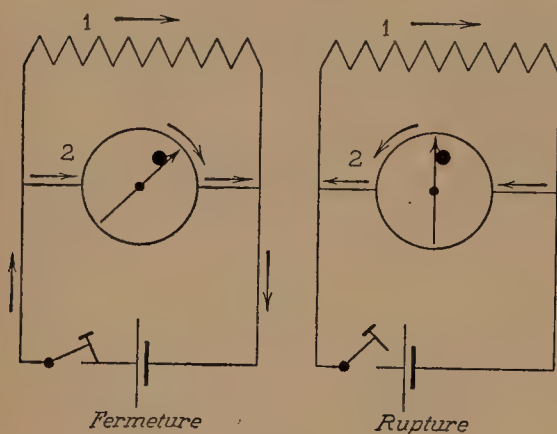


Fig. 227.

On utilisera l'un des galvanomètres de la figure 172 dont il est possible de caler l'aiguille.

a) FERMETURE.

Dans une première expérience, on attend que l'équilibre soit atteint, puis on cale l'aiguille *déviée*. On rompt le circuit : l'aiguille reste déviée. On referme le circuit : on constate que l'aiguille est lancée au delà de l'élongation primitive.

b) RUPTURE.

A l'aide d'une cale, on empêche l'aiguille de quitter l'azimut qui correspond au courant nul. On ferme le circuit, puis on l'ouvre brusquement. L'aiguille est déplacée dans un sens qui indique le passage d'un courant négatif. Ce résultat est conforme à la relation (2) : si i_1 diminue très rapidement, $di_1 : dt$ est négatif et très grand, i_2 est négatif.

Supposons que la rupture ait lieu dans un temps négligeable. Nous sommes ramenés au problème du § 205. L'équation différentielle à satisfaire est :

$$i(r_1 + r_2) + L_1 \frac{di}{dt} = 0; \quad (3)$$

elle ne diffère pas de l'équation (2), puisque l'électricité ne pouvant s'accumuler, on a identiquement (en tenant compte des signes) :

$$i_1 + i_2 = 0.$$

L'équation (3) intégrée donne une exponentielle; la valeur initiale

du courant est évidemment celle même qui existe dans la branche 1 au moment de la rupture.

4°. — Voici une expérience intéressante due à Edlund.

La dérivation comprend les bobines d'un galvanomètre différen-

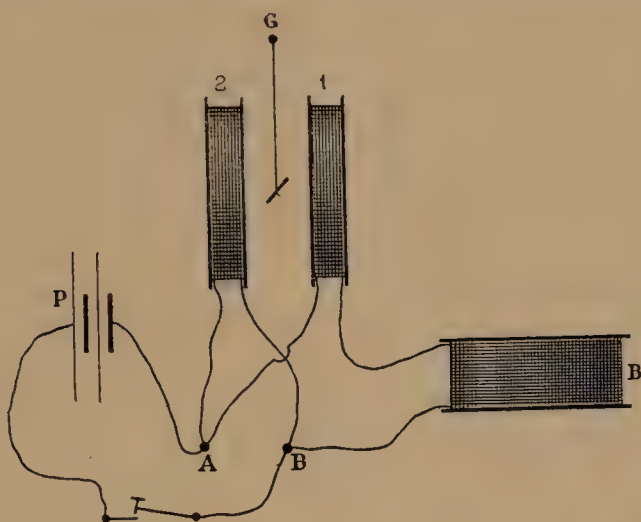


Fig. 227 bis.

tiel G. Sur l'une des branches est la bobine B de self-induction notable.

Amenons les résistances r_1 et r_2 à l'égalité, de manière que pour l'état permanent l'aiguille du galvanomètre ne soit pas déviée :

$$r_1 = r_2 = r.$$

Soit alors I l'intensité des courants (égaux) dans les deux branches de la dérivation.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par dt ; intégrons entre 0 et ∞ ; il vient :

$$r(q_1 - q_2) = \pm I(L_2 - L_1). \quad (4)$$

Le signe $+$ correspond à la fermeture du circuit principal APB; les courants dans les branches de la dérivation passent de 0 à I :

$$\Delta i_1 = \Delta i_2 = +I.$$

Le signe $-$ correspond à la rupture, les courants passent de I à 0 :

$$\Delta i_1 = \Delta i_2 = -I.$$

Or l'impulsion de l'aiguille du galvanomètre (jouant le rôle de balistique différentiel) est proportionnelle à $q_1 - q_2$. L'équation (4) nous apprend que cette impulsion est la même pour la fermeture et pour la rupture du circuit principal, *quelle que soit la loi suivant laquelle la résistance de ce circuit passe de l'infini à r dans le premier cas, de r à ∞ dans le second.*

Le lecteur vérifiera que nous appliquons le théorème démontré à la fin du § 154 : on peut généraliser pour un galvanomètre dont les enroulements ne sont pas identiques. L'expérience confirme cette conséquence des hypothèses générales.

212. Application aux électro-aimants.

Le problème est de donner à un électro (d'un morse, par exemple) la plus grande rapidité possible de fonctionnement. A ce sujet, on trouve un raisonnement incomplet dans les traités les plus justement estimés.

L'expérience indique qu'il faut mettre les deux bobines en parallèle.

On donne comme explication qu'on remplace ainsi, dans le calcul de la constante de temps, la self-induction des deux bobines par la self-induction de chacune d'elles. Or, la self étant proportionnelle au carré du nombre des spires, la self de chaque bobine est quatre fois plus petite que celle de l'ensemble. Comme la résistance de la ligne est plusieurs dizaines de fois celle des électros, la résistance qui intervient dans le calcul de τ ne change pas : d'où résulte une constante de temps *quatre* fois plus petite. Il est vrai que, le courant de ligne restant pratiquement le même pour les bobines en dérivation et en série, le courant final dans le premier cas n'est que la moitié du courant final dans le second.

Ce raisonnement est incomplet, parce qu'on oublie l'induction mutuelle. Les bobines étant montées sur le même noyau, le flux que la bobine 2 envoie dans la bobine 1 est sensiblement le même que le flux que 1 s'envoie dans lui-même. La constante de temps est donc diminuée non des trois quarts, mais de la moitié seulement.

213. Coefficients d'induction mutuelle.

Il n'y a pas de difficultés particulières dans le calcul des coefficients d'induction mutuelle. Nous appliquons la formule générale :

$$M = \iint ds ds' \frac{\cos \varepsilon}{r}.$$

Voici quelques exemples pour fixer les idées.

1°. — FILS PARALLÈLES VOISINS.

Soit ρ la distance des deux fils. On a :

$$\varepsilon = 0, \quad r = \sqrt{\rho^2 + (s - s')^2}.$$

Je donne les calculs au long, parce que c'est une excellente occasion de calculer jusqu'au bout une intégrale double. Mais, comme il ne s'agit pas de faire des mathématiques pour le plaisir, je me limite au cas le plus simple.

Pour l'instant, cette formule est un résultat mathématique dénué de sens physique. Il est impossible de calculer le flux envoyé par un bout de fil dans un autre bout de fil parallèle, parce que ce flux n'est pas défini; il ne l'est que si l'on détermine la manière suivant laquelle les circuits se ferment.

La formule (1) est cependant intéressante, comme permettant de calculer le coefficient d'induction mutuelle de deux cadres parallèles.

2°. — CADRES RECTANGULAIRES PARALLÈLES.

Comme il s'agit de fixer les idées du lecteur, je me contente de cadres carrés, identiques, de même axe.

Les côtés qui sont rectangulaires ne donnent rien dans l'intégrale

$$M = \iint ds ds' \frac{\cos \epsilon}{r},$$

puisque l'on a $\cos \epsilon = 0$.

Nous avons donc à considérer les combinaisons :

1, 1'; 3, 3'; 2, 2'; 4, 4'; soit 4 fois la combinaison 1, 1';
1, 3'; 3, 1'; 4, 2'; 2, 4'; soit 4 fois la combinaison 1, 3'.

La combinaison 1, 1', nous est connue par le 1°. La combinaison 1, 3', se déduit de la précédente en remplaçant ρ par $\sqrt{\rho^2 + l^2}$, et en changeant le signe.

Toutes réductions faites, on trouve :

$$M = 8 \left[l \log \left\{ \frac{l + \sqrt{l^2 + \rho^2}}{l + \sqrt{2l^2 + \rho^2}} \cdot \frac{\sqrt{l^2 + \rho^2}}{\rho} \right\} + \sqrt{2l^2 + \rho^2} - 2\sqrt{l^2 + \rho^2} + \rho \right].$$

Pour avoir l'action qui s'exerce entre les deux cadres dans la direction de l'axe, il faut prendre la dérivée de cette quantité par rapport à ρ .

On trouve aisément :

$$\frac{F}{8} = \frac{l^2}{\rho \sqrt{\rho^2 + l^2}} - \frac{l^2 \rho}{(l^2 + \rho^2) \sqrt{2l^2 + \rho^2}} + \frac{2\rho}{\sqrt{l^2 + \rho^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{2l^2 + \rho^2}} - 1.$$

3°. — DEUX CERCLES DE RAYONS TRÈS VOISINS, DONT LES AXES SONT COMMUNS.

Au paragraphe 101, nous avons donné le coefficient d'induction mutuelle de deux cercles, au moyen des intégrales elliptiques.

On trouve aisément une expression plus simple quand on suppose les cercles approximativement de même rayon a et très rapprochés l'un de l'autre.

Nous poserons donc $A = a$; la plus grande distance sera $r_1 = 2a$; nous appellerons ρ la plus petite qui, par hypothèse, est négligeable devant a . La distance r de deux éléments est :

$$r = \sqrt{\rho^2 + 4a^2 \sin^2(\epsilon : 2)}.$$

L'intégrale à évaluer est :

$$M = 4\pi a^2 \int_0^\pi \frac{\cos \varepsilon d\varepsilon}{\sqrt{\rho^2 + 4a^2 \sin^2(\varepsilon : 2)}}.$$

Nous pouvons remplacer le radical par $2a \sin(\varepsilon : 2)$, sauf au voisinage de ε ; mais alors nous pouvons remplacer $\sin(\varepsilon : 2)$ par $\varepsilon : 2$.

Bref, l'intégrale peut s'écrire, en appelant α un petit angle quelconque, mais tel que $2a\alpha$ soit grand devant ρ :

$$\int_0^\alpha \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\rho^2 + a^2 \varepsilon^2}} + \int_\alpha^\pi d\varepsilon \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{2a \sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

L'intégration se fait aisément (*Math. gén.*, § 249); on obtient :

$$\frac{1}{a} \left[\log \left(\frac{2a\alpha}{\rho} \right) - \log \left(\frac{\alpha}{4} \right) - 2 \right] = \frac{1}{a} \left[\log \frac{8a}{\rho} - 2 \right].$$

d'où enfin
$$M = 4\pi a \left[\log \frac{8a}{\rho} - 2 \right].$$

Le résultat est le même, quelle que soit la situation du second cercle par rapport au premier, pourvu que la plus courte distance ρ demeure invariable.

Voici la raison de ce fait. Au voisinage de l'une des circonférences les lignes de force sont sensiblement circulaires, situées dans des plans passant par l'axe de la circonférence et ayant leurs centres sur cette circonférence. La figure 229 représente l'une de celles qui sont dans le tableau. Donc les cercles dont la projection aboutit sur cette circonférence reçoivent le même flux : ce sont les sections droites d'un même tube de force.

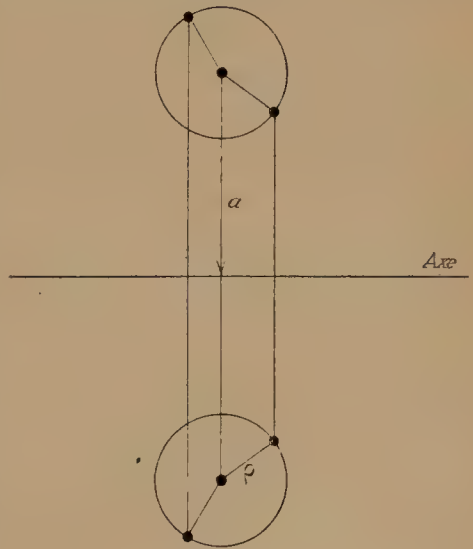


Fig. 229.

214. Coefficients de self-induction.

1°. — Le calcul des coefficients de self-induction exige beaucoup d'attention pour ne pas aboutir à des expressions absurdes; il est essentiel de fixer les idées sur ce point.

Les coefficients d'induction mutuelle ne dépendent pas du diamètre des conducteurs quand tous les éléments des circuits considérés sont assez loin les uns des autres : cela revient à dire que le flux envoyé par l'un des circuits dans l'autre est sensiblement indé-

pendant du diamètre des fils et de la distribution du courant dans leur section droite.

Il n'en est plus de même pour les coefficients de self-induction. *Le diamètre du fil intervient au premier chef*, au point que si l'on remplace le fil par une ligne géométrique, le coefficient de self-induction devient infini, quelle que soit la forme du circuit.

Pour le montrer, considérons un élément ds d'un circuit quelconque. Tout près de lui, le champ est le même que s'il était indéfini : il a pour intensité $2i : r$. Le flux envoyé dans un petit rectangle de hauteur ds et de largeur dr est :

$$2ids \cdot \frac{dr}{r}.$$

L'intégrale : $2ids \int_0^r \frac{dr}{r} = 2ids(\log r - \log 0),$

est infinie, quelle que soit la limite supérieure.

2°. — On dit parfois que le coefficient de self-induction est la limite du coefficient d'induction mutuelle quand les circuits se rapprochent indéfiniment jusqu'à se confondre. On aboutit à des absurdités en appliquant cette proposition aux expressions mathématiques, *cependant légitimes*, des coefficients d'induction mutuelle.

Par exemple, faisons $\rho = 0$, dans les expressions des coefficients d'induction mutuelle de deux cercles et deux droites (§ 213, 1° et 3°); nous trouvons $M = \infty$.

En définitive, le calcul des coefficients de self implique toujours l'hypothèse d'une densité finie pour les courants; à cette seule condition, le flux total de force envoyé par un courant dans son propre circuit reste fini.

3°. — Dans bien des cas (le paragraphe suivant peut servir d'exemple), on a l'air de ne pas tenir compte du diamètre du fil. Cela provient de ce qu'en réalité on néglige ou on évalue grossièrement la self *proprement dite*. Par exemple, soit à calculer la self d'une bobine contenant quelques centaines de spires. Chaque spire envoie un certain flux dans toutes les autres spires, flux sensiblement indépendant du diamètre du fil, devant ce flux, le flux qu'elle s'envoie dans elle-même est, sinon négligeable, du moins évaluable avec une grossière approximation, sans qu'il en résulte un grand dommage.

215. Self-induction d'une bobine dont la gorge est à section carrée, à section quelconque.

Partons de la formule (§ 213) :

$$M = 4\pi a \left[\log \frac{8a}{\rho} - 2 \right] = 4\pi a \left[\log 8a - 2 - \log \rho \right],$$

qui donne le coefficient d'induction mutuelle de deux cercles de rayon a et de distance ρ .

Soit n le nombre des spires; a représente le rayon moyen de la bobine. Les deux premiers termes de la parenthèse donnent pour les n spires :

$$4\pi n^2 a (\log 8a - 2),$$

puisque chaque spire envoie son flux dans toutes les autres et dans elle-même.

Reste à tenir compte du troisième terme. Il faut sommer les logarithmes des plus courtes distances de tous les fils pris deux à deux; donc en tout n^2 termes de la forme $\log \rho$. Il est clair que nous aurons une valeur très approchée de ρ en prenant la *moyenne distance géométrique* (§ 144) de la section droite de la gorge.

Si c'est un carré de côté $2H$, nous savons qu'elle vaut à peu près H , exactement $0,447H$.

En définitive, le coefficient de self-induction est sensiblement :

$$M = 4\pi a n^2 \left[\log \frac{4a}{H} - 2 \right].$$

Il dépend au premier chef des dimensions de la gorge.

Pour fixer les idées, soit $a = 25$ centimètres; calculons la parenthèse pour diverses valeurs de H :

H	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\log H$	—0,923	0,000	0,406	0,693	0,917	1,097
Parentèse	3,528	2,605	2,199	1,912	1,688	1,508

On modifie donc énormément la self d'une bobine en changeant le diamètre du fil avec lequel elle est bobinée. En prenant du fil plus fin, on peut diminuer le côté de la gorge, par suite augmenter la self.

La conséquence immédiate de ce calcul est l'impossibilité de déterminer *exactement* la self d'une bobine à partir de ses dimensions géométriques mesurables. Dans toutes les mesures absolues, il faut qu'elle n'intervienne que comme correction (voir en particulier la détermination de l'ohm en valeur absolue, § 289).

Pour une gorge de forme quelconque, on a :

$$M = 4\pi a n^2 \left[\log \frac{8a}{\rho} - 2 \right],$$

où a est le rayon moyen, ρ la moyenne distance géométrique qui convient à la section droite.

216. Self-induction de deux conducteurs rectilignes parallèles.

Nous partons de la valeur trouvée plus haut (§ 213) du coefficient

d'induction mutuelle de deux fils de longueur l et de distance ρ , dans le cas où l est très grand vis-à-vis de ρ :

$$M = 2l \left[\log \frac{2l}{\rho} - 1 \right] = 2l [\log 2l - 1] - 2l \cdot \log \rho.$$

Soit I l'intensité totale, a le rayon du fil, ε la densité supposée uniforme du courant, on a : $\pi a^2 \varepsilon = I$.

1°. — Calculons l'action d'un fil élémentaire qui se trouve à la distance b de l'axe.

Pour tout cylindre concentrique dont le rayon r est supérieur à b , la moyenne distance géométrique est r . L'intégration donne :

$$\begin{aligned} & \int_b^a 2\pi r dr \cdot 2l (\log 2l - 1) - \int_b^a 2\pi r dr \cdot 2l \log r \\ &= \pi \cdot 2l (\log 2l - 1) (a^2 - b^2) - 2l \pi \left[a^2 \log a - b^2 \log b - \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \right]. \end{aligned}$$

Pour tout cylindre concentrique dont le rayon r est inférieur à b , la moyenne distance géométrique est b . L'intégration donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^b 2\pi r dr \cdot 2l (\log 2l - 1) - \int_0^b 2\pi r dr \cdot 2l \log b \\ &= \pi \cdot 2l (\log 2l - 1) b^2 - \pi 2l b^2 \log b. \end{aligned}$$

On a pour somme des deux termes :

$$\pi \left\{ 2la^2 (\log 2l - 1) - 2l \left[a^2 \log a - \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \right] \right\}.$$

Il ne reste plus qu'à prendre la moyenne de cette expression quand b varie 0 à a .

$$\frac{1}{\pi a^2} \int_0^a b^2 \cdot 2\pi b db = \frac{a^2}{2};$$

d'où

$$L = 2l \left[\log \frac{2l}{a} - \frac{3}{4} \right].$$

2°. — Arrivons au cas de deux fils parallèles parcourus par des courants égaux et de sens opposés. Pour obtenir le coefficient de self-induction, il faut joindre au terme précédent le terme qui convient à l'induction mutuelle des deux fils, ce dernier devant être pris en sens contraire. Il faut ensuite doubler le résultat, puisque les deux fils jouent le même rôle :

$$\begin{aligned} L &= 4l \left[\log \frac{2l}{a} - \frac{3}{4} - \log \frac{2l}{\rho} + 1 \right] \\ &= 4l \left[\log \frac{\rho}{a} + \frac{1}{4} \right]; \end{aligned} \tag{1}$$

ρ est la distance des axes des fils, a leur rayon.

Tandis que toutes les formules antérieures à la formule (1) n'avaient

pas de sens physique, celle-ci a un sens parfaitement déterminé, car le procédé de retour du courant est maintenant défini.

Conformément à ce que nous avons dit, la self augmente quand le rayon des fils diminue; elle croît aussi quand leur distance augmente.

Il y a donc toujours avantage à rapprocher les fils d'une canalisation à courant alternatif.

La valeur minima a lieu pour :

$$\rho = 2a, \quad \log 2 = 0,693, \quad L = 3,7772 \cdot l.$$

Telle est la self-induction d'un fil de longueur $2l$ replié sur lui-même.

Le fil devant être recouvert de soie ou de coton, on n'atteindra jamais cette limite. On peut cependant diminuer la self en remplaçant le fil rond par du fil plat.

3°. — La formule suppose que le fil n'est pas magnétique (perméabilité $\mu = 1$).

Quand le fil est magnétique (μ différent de 1), on admet la formule :

$$L = 4l \left[\log \frac{\rho}{a} + \frac{\mu}{4} \right].$$

En télégraphie et pour des fils de fer, on pose $\mu = 150$.

Par exemple, pour une ligne aérienne double en fil de fer de 4 millimètres de diamètre ($a = 0,2$) et d'écartement $\rho = 2^m = 200$ cm, on trouve :

$$L = 178, \text{ par centimètre.}$$

D'où par kilomètre et en henrys (§ 198) :

$$L = 1,78 \cdot 10^7 \cdot 10^{-9} = 1,78 \cdot 10^{-2} = 0,0178 \text{ henrys.}$$

A moins que les fils ne soient très éloignés, le second terme de la formule a seul de l'importance.

4°. — Les calculs précédents supposent que les courants ne sont pas trop rapidement variables, condition nécessaire pour que la densité soit uniforme dans toute la section droite.

Si les variations sont très rapides (oscillations de haute fréquence), le courant est purement superficiel. Soit l la longueur du conducteur, a son rayon; on trouve le coefficient de self-induction :

$$L = 2l \left[\log \frac{2l}{a} - 1 \right].$$

Nous ne pouvons insister (voir le tome V du *Cours de Physique*).

Induction dans les corps à plusieurs dimensions ¹.

217. Expression complète de la force électromotrice.

1^o. — Nous savons (§ 95) que la force électromotrice d'induction s'exprime au moyen d'un vecteur (*potentiel vecteur*) dont les composantes sont F, G, H .

Elles sont définies, en tout point de l'espace, en fonction des composantes a, b, c , de l'induction par les équations :

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y};$$

en notation abrégée :

$$(a, b, c) = \text{curl}(F, G, H).$$

La force électromotrice d'induction a pour composantes en un point d'un circuit s' dont les coordonnées sont x', y', z' :

$$-\frac{\partial F}{\partial t}, \quad -\frac{\partial G}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Cela veut dire que la force électromotrice appliquée à l'élément ds' de composantes dx', dy', dz' , est la projection de la dérivée par rapport au temps du potentiel vecteur sur l'élément, soit :

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial t} dx' + \frac{\partial G}{\partial t} dy' + \frac{\partial H}{\partial t} dz'\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(Fdx' + Gdy' + Hdz').$$

La force électromotrice totale le long du circuit s' est le taux de variation par rapport au temps, changé de signe, de la circulation du vecteur F, G, H ; soit :

$$\int_{s'} (Fdx' + Gdy' + Hdz').$$

2^o. — Nous avons montré (§ 97) que si le champ magnétique est dû à un courant, les composantes F, G, H , sont :

$$F = i \int \frac{dx}{r}, \quad G = i \int \frac{dy}{r}, \quad H = i \int \frac{dz}{r}.$$

x, y, z , désignent les coordonnées du circuit inducteur.

L'expression se généralise pour des courants distribués comme on

¹ A passer dans une première lecture.

voudra dans l'espace; les composantes du potentiel vecteur sont alors :

$$F = \iiint \frac{u d\omega}{r}, \quad G = \iiint \frac{v d\omega}{r}, \quad H = \iiint \frac{w d\omega}{r},$$

où u, v, w , sont les composantes du courant à travers l'unité de surface; $d\omega$ est l'élément de volume. L'intégration est étendue à l'espace entier; r est la distance de l'élément de volume $d\omega$ à l'élément de circuit ds' considéré.

3°. — Ceci rappelé, cherchons les formules générales donnant la force électromotrice. Elle se compose de trois parties.

a) La *force électromotrice électrostatique* telle qu'elle est définie par la loi d'Ohm et à laquelle on donne pour origine la présence d'électricité libre (voir la troisième partie de ce Cours). Ses composantes sont :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

b) La *force électromotrice d'induction* due à la variation du flux d'induction; quand le flux augmente, il tend à passer un courant en sens inverse de la circulation dont le sens positif correspond au flux positif. Nous devons donc prendre pour composantes de la force électromotrice d'induction :

$$-\frac{\partial F}{\partial t}, \quad -\frac{\partial G}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

c) La *force électromotrice de non-homogénéité* (comme dans les piles) dont les composantes sont :

$$E_1, E_2, E_3.$$

En définitive, nous avons pour la force électromotrice totale dans un conducteur au repos :

$$P = E_1 - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$Q = E_2 - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t},$$

$$R = E_3 - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Quand le conducteur se meut, il faut introduire l'expression du flux balayé changé de signe (§ 195) :

$$P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} + E_1 - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$Q = a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} + E_2 - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t},$$

$$R = b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} + E_3 - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}.$$

4°. — Ainsi les équations distinguent soigneusement la force électromotrice issue du potentiel électrostatique, et la force électromotrice d'induction. Sous ce rapport, les idées les plus vagues règnent

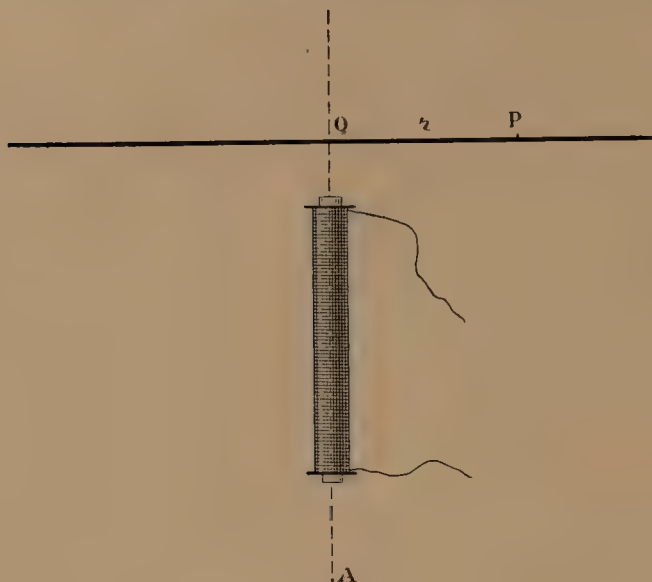


Fig. 230.

dans tous nos traités classiques; leurs auteurs ne semblent pas avoir conscience de l'étendue de leur ignorance. Il est cependant infiniment préférable d'énoncer des erreurs que de craindre de se compromettre. Notre prudence habitue nos élèves à faire semblant de connaître une foule de choses auxquelles ils ne comprennent rien. Il se peut que je me trompe; au moins je donne prise à une rectification : je suis honnête.

On ne précise donc jamais le rôle du potentiel électrostatique V ayant pour origine l'électricité libre (voir la troisième partie de ce Cours), par rapport au rôle de la force électromotrice d'induction; de sorte que la plupart des gens qui se croient très forts en électricité, s'imaginent que le passage d'un courant implique une différence de potentiel électrostatique. Je citerai dans ce groupe l'honorable M. Bouty, qui, ignorant d'une manière candide le premier mot de ces questions, étale naïvement son incompétence dans ses livres.

5°. — Voici l'expérience cruciale.

Soit une plaque mince de cuivre rouge, plane et d'assez grandes dimensions pour être considérée comme indéfinie. Normalement à cette plaque, approchons un aimant cylindrique, lui-même normal à la plaque, ou encore créons un tel aimant au moyen d'un solénoïde (fig. 230).

Par raison de symétrie, naissent dans la plaque des courants circulaires admettant OA comme axe de révolution.

Or il est bien évident qu'également par raison de symétrie, la plaque conserve un potentiel électrostatique constant; autrement dit, qu'en aucun point de la plaque n'apparaît d'électricité libre.

Nous reviendrons plus loin sur la réaction des courants sur l'aimant (§ 219).

218. Expérience de Matteucci.

Les expériences de Matteucci sur les courants induits dans un disque plan D, tournant au-dessus de deux pôles de noms contraires, montreront l'importance des considérations précédentes.

1°. — Le disque plan D a 80 centimètres de diamètre. La méthode consiste à maintenir en deux points A et B *du plan P* du disque, les extrémités des fils d'un galvanomètre sensible (de manière qu'elles frottent sur le disque), et à déplacer l'une d'elles jusqu'à ce que le courant dans le galvanomètre soit nul. Le point A restant fixe, le point B décrit une courbe du plan P.

On trace ainsi un faisceau de courbes que nous allons montrer *équipotentielles* :

$$V = \text{Constante.}$$

On est d'accord non sur la forme exacte des courbes du faisceau, mais sur leur disposition générale. Ainsi les expérimentateurs trouvent qu'elles entourent quatre points *a, a, b, b*, d'un même diamètre plus ou moins incliné sur le diamètre passant par les projec-

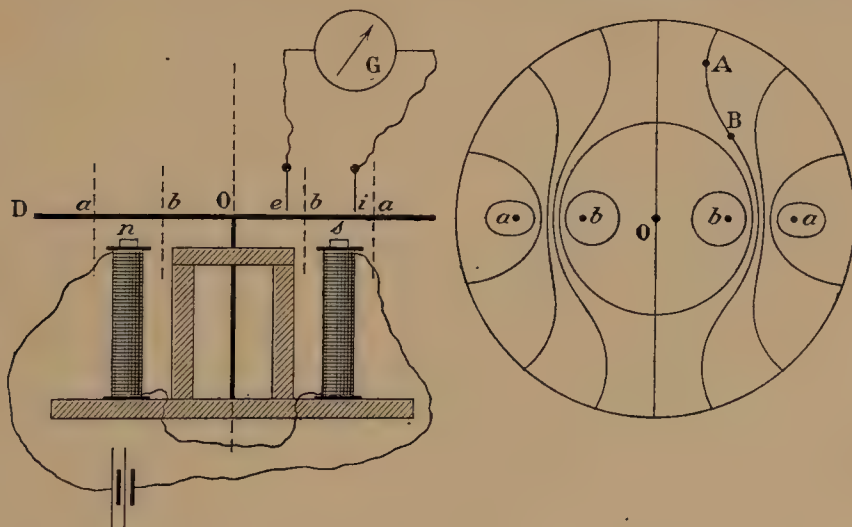


Fig. 231.

tions des pôles sur le plan du disque. L'une des courbes se compose d'un diamètre et d'un cercle (d'autres disent une ellipse) passant par ces projections. Bref, le faisceau est approximativement celui de la partie droite de la figure 231.

2°. — Cherchons ce qu'il représente.

L'interprétation de Matteucci (exposée au long dans le traité de M. Bouty) est purement absurde. *Il pose que ces lignes étant équipotentielles, les courants leur sont normaux*; il dessine donc le faisceau orthogonal et croit avoir déterminé les lignes de courant.

Or ces soi-disant lignes de courant, *qui doivent être fermées*, coupent DEUX fois la même ligne équipotentielle, résultat contradictoire avec le point de départ même de Matteucci.

Jochmann a montré le premier à quoi tenait l'absurdité du résultat.

Au paragraphe 217, nous avons prouvé que des courants peuvent circuler dans une plaque dont le potentiel électrostatique est uniforme (non-existence d'électricité libre, voir troisième partie de ce Cours); nous trouvons maintenant que les lignes de courant ne constituent généralement pas le faisceau orthogonal des lignes équipotentielles. Cela revient à dire, conformément aux équations générales, que les forces électromotrices sont de deux espèces : la direction du courant est déterminée par leur résultante.

Effectivement, les courbes déterminées par Matteucci et les autres sont équipotentielles; sous ce rapport, le titre du mémoire de Matteucci, *Sur l'état électrique induit dans un disque métallique*, est parfaitement correct. Le circuit du galvanomètre eGi est immobile, l'électro est immobile ainsi que le système des courants induits dans le disque : donc aucun flux ne coupe le circuit eGi , aucune force électromotrice n'y est induite. Par suite, si les potentiels statiques des points e et i sont égaux, aucun courant ne traverse le galvanomètre qui n'intervient pas dans le phénomène.

Celui-ci est donc lié au potentiel V et aux masses d'électricité libre qu'on lui donne pour origine, mais il ne définit pas les forces électromotrices totales.

3°. — Définissons le problème théorique.

Le champ magnétique total a deux origines : les aimants extérieurs, le système des courants induits, qui, *pour un corps de révolution tournant autour de son axe de révolution*, est immobile dans l'espace. Pendant la rotation du corps conducteur, chacun de ses éléments coupe les lignes de force de ce champ immobile : d'où sur chaque élément une force électromotrice d'induction. Le problème est de chercher un système immobile de courants conservatifs et se fermant dans le corps conducteur; autrement dit, de diviser l'espace immobile que ce corps occupe, en tubes de courant immobiles et fermés, dans chacun desquels se déplace un courant de matière incompressible.

Mais pour tous les éléments de ces tubes, la loi d'Ohm doit s'appliquer en faisant intervenir toutes les forces électromotrices. Nous sommes donc généralement obligés de superposer aux forces élec-

tromotrices d'induction des forces électromotrices *statiques* dérivant d'un potentiel V ; ce qui revient à disposer sur la surface du corps tournant des masses convenables d'électricité libre (voir la troisième partie de ce Cours).

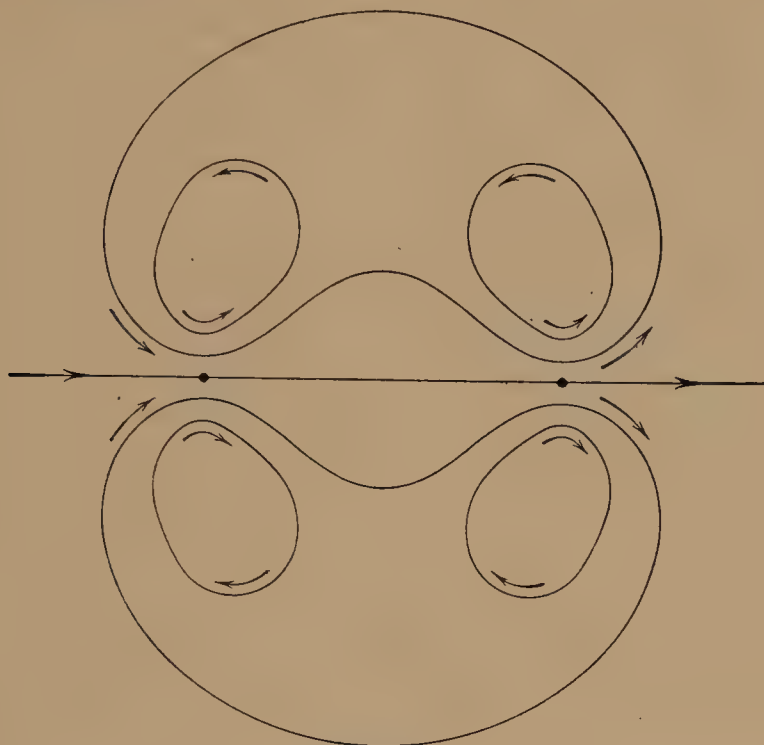


Fig. 232.

Dans certains cas, ce potentiel V est uniforme : c'est ce que nous avons vu au paragraphe 217.

4°. — FORME DES LIGNES DE COURANT.

Elles ont été approximativement calculées par Jochmann; la figure 232 montre leur allure. A mesure que croît la vitesse de rotation, le système des lignes de courant se déforme et tourne de manière à créer une attraction tangentielle sur les pôles, conformément à la loi de Lenz.

J'insiste sur le fait fondamental qu'elles n'ont aucun rapport avec le système des lignes orthogonales du faisceau de courbes équipotentielles déterminées par la méthode de Matteucci.

219. Induction axiale. Expériences de Felici.

1°. — Faisons tourner un disque ou une cloche de révolution (en matière conductrice) C autour de leur axe géométrique de révolution. Suivant cet axe, disposons un aimant cylindrique ns , de sorte que le champ soit lui-même de révolution; nous sommes dans le cas de l'*induction axiale* de Matteucci.

Quand la cloche tourne, des forces électromotrices d'induction se produisent. Par raison de symétrie, elles sont dirigées suivant les

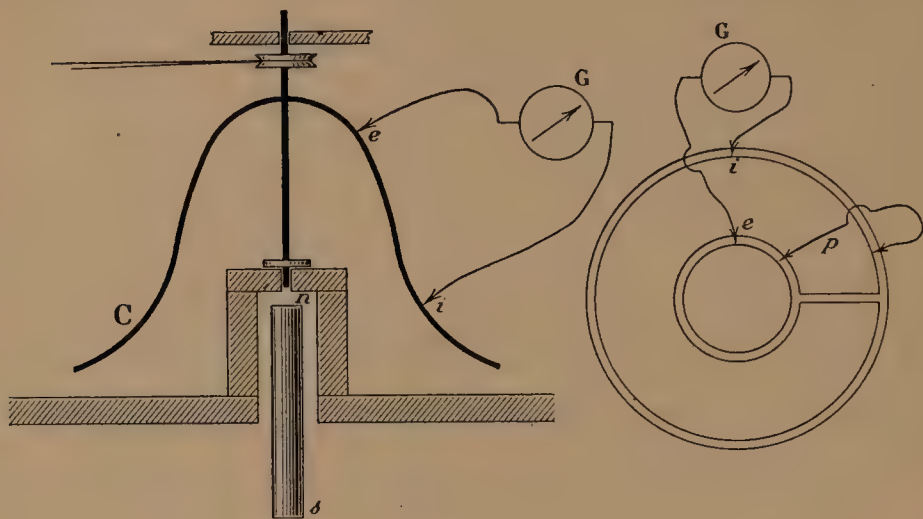


Fig. 233.

méridiens, elles sont équilibrées par des forces électromotrices électrostatiques : *aucun courant ne circule dans la cloche*.

Ceci posé, installons un galvanomètre dont les extrémités e , i , des fils immobiles glissent sur la cloche : il est traversé par un courant, qui est fonction de la position de ces extrémités.

Conformément au paragraphe précédent, nous devons admettre que ce courant mesure la différence de potentiel statique entre les points e et i , *une fois que s'est établi le système de courants compatible avec l'existence de la dérivation eGi* .

En particulier, *si cette résistance est suffisante*, le galvanomètre est un véritable voltmètre ; il mesure la différence de potentiel qui équilibre la force électromotrice d'induction, *l'intensité des courants dans la cloche demeurant quasi nulle*.

On s'explique ainsi le résultat suivant de Felici : si l'on fait tourner des cloches de formes diverses avec la même vitesse, le courant dans le galvanomètre ne dépend pas de la forme de la cloche (la résistance de celle-ci demeurant dans tous les cas négligeable) ; il ne dépend que de la position des points e et i . De sorte que les distances de ces points à l'axe et au pôle de l'aimant demeurant les mêmes, le courant conserve la même intensité. En effet, le flux balayé par une ligne quelconque allant de e à i ne dépend pas de la forme de cette ligne ; la force électromotrice induite ne dépend que de ce flux, puisque les courants dans la cloche restent négligeables.

2°. — D'autres expériences de Felici s'interprètent difficilement et mériteraient d'être reprises.

Par exemple, il constitue la partie tournante au moyen de deux cercles de cuivre reliés par un rayon et fixés à plat sur un disque de bois (fig. 233, à droite). Il trouve que le courant dans le galvanomètre ne dépend pas de l'existence de ponts supplémentaires fixes p dont les extrémités glissent sur les cercles, *la résistance de ces ponts serait-elle petite.*

Avant de discuter ce résultat, je serais bien aise d'en être sûr.

On remarque qu'en l'absence de ponts p , et si la résistance du galvanomètre est suffisante, son indication doit être la même, que les cercles soient réunis par un seul rayon ou par un anneau plein; elle mesure, dans tous les cas, le flux balayé par un rayon dans l'unité de temps. Le potentiel électrostatique est le même tout le long d'un parallèle de la surface de révolution, à la condition que la dérivation ne mette en jeu qu'un courant infime.

Quand on se sert d'abord d'un disque plein, puis d'un disque incisé radialement, les courants dérivés sont les mêmes dans le galvanomètre *jouant le rôle de voltmètre.*

Naturellement le système des courants dans le disque pour l'induction non axiale (expérience de Matteucci, § 190) est entièrement modifié par de telles incisions.

220. Théorie des images de Maxwell¹.

Devant une plaque conductrice plane et indéfinie, de résistivité ρ , d'épaisseur e , on déplace un système d'aimants que nous supposons d'abord réduit à un pôle. Des courants induits naissent dans la plaque. On demande comment ils réagissent sur le pôle.

La solution a été donnée par Maxwell en utilisant la série des images du pôle par rapport à la plaque.

1°. — Pour faciliter l'exposé des résultats, divisons le temps en intervalles égaux δt .

Au temps t , soit A la position du pôle. *Par hypothèse*, un pôle A' égal et symétrique (image positive de A par rapport à la plaque) se forme brusquement et s'éloigne sur une normale à la plaque, avec une vitesse constante $w = \rho : 2\pi e$.

Au temps $t + \delta t$ se forme un pôle négatif, *image négative de la position du pôle A au temps t* , qui accompagne l'image positive.

En définitive, à la position A du pôle au temps t , correspond un doublet a , qui, sans aucune modification, s'éloigne de la plaque avec une vitesse constante w .

Recommençons pour les positions successives B, C, D, \dots du pôle, qui correspondent aux temps $t, t + \delta t, t + 2\delta t, \dots$. A un instant quelconque $t + n\delta t$, pour lequel le pôle est en M , nous avons donc créé $n - 1$ doublets a, b, c, \dots qui s'éloignent du plan avec une vitesse w ,

¹ A passer dans une première lecture.

sur $n - 1$ perpendiculaires; nous venons de créer une dernière image positive M' .

La figure suppose que le pôle A se déplace sur une droite et d'un mouvement uniforme.

Voici maintenant le théorème de Maxwell.

Diminuons l'intervalle δt jusqu'à 0; construisons le train des images

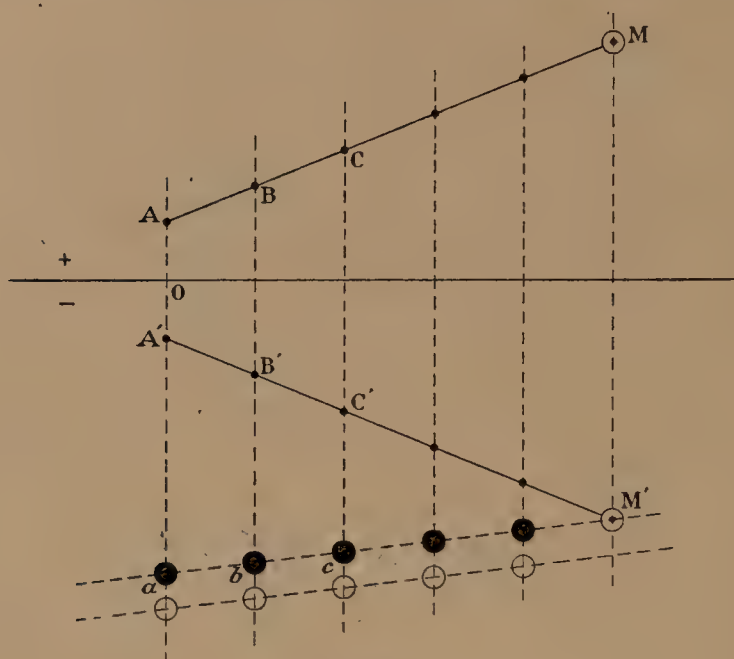


Fig. 234.

pour tous les temps négatifs : le champ magnétique de ce train, en tous points de l'espace situé du côté positif de la plaque, est identique au champ des courants induits par le mouvement du pôle.

Le théorème se généralise immédiatement pour un système magnétique quelconque, en vertu de la superposition pure et simple des champs.

2°. — Pour fixer les idées, appliquons à la création brusque d'un pôle immobile (§ 217).

Au temps 0 se forme une image positive, qui s'éloigne avec la vitesse $w = \rho : 2\pi e$. Aux temps $t + \delta t$, $t + 2\delta t$..., se forment au même point (puisque le pôle est immobile) deux images égales et de signes contraires dont les effets se détruisent. Donc l'effet des courants induits est le même que celui d'une masse unique positive, qui s'éloigne indéfiniment d'un mouvement uniforme.

La vitesse croît à mesure qu'augmente la résistivité et que diminue l'épaisseur. Donc l'effet des courants induits sur le pôle est une *répulsion*, qui décroît d'autant plus vite que la plaque est moins conductrice. Si la plaque était parfaitement conductrice, la vitesse w

serait nulle : les courants seraient permanents ; la répulsion demeurerait constante et égale à $m^2 : 4z^2$, où z est la distance OA du pôle à la plaque ; m est la masse du pôle.

A un temps quelconque, supprimons le pôle. De nouvelles images ne se formeront pas ; mais la dernière image négative ne sera pas neutralisée et se déplacera normalement à la plaque avec la vitesse w . Les courants induits seront donc les mêmes et décroîtront de la même manière que lors de la formation du pôle ; mais ils seront de sens inverse.

3°. — Comme second exemple, traitons le cas d'un pôle A qui, venant de l'infini, se rapproche normalement d'une plaque avec une vitesse constante W .

Au temps 0, sa distance est $\overline{AO} = z$; au temps t , sa distance est :

$$z - Wt.$$

Pendant ce temps t , des images positives en nombre $t : dt$ sont émises. Elles occupent sur la normale une longueur $(w + W)t$.

Elles correspondent donc à une densité linéaire uniforme :

$$m \frac{t}{\partial t} \frac{1}{(w + W)t} = \frac{m}{\partial t} \frac{1}{w + W}.$$

Par suite pour le phénomène total, nous avons (sur la normale *indéfinie*) cette densité linéaire positive à laquelle se superpose une densité linéaire négative égale, sauf tout à fait à l'extrémité. L'effet résultant est donc dû à cette extrémité, qui est ce dont la ligne positive dépasse la ligne négative. Sa longueur est ce dont le pôle avance dans le temps ∂t , soit $W\partial t$. Elle correspond à une masse :

$$\frac{m}{\partial t} \frac{1}{w + W} W\partial t,$$

et à une répulsion normale :

$$\frac{m^2}{4z^2} \frac{W}{w + W}.$$

On retrouve la formule précédente en posant $W = \infty$, ce qui correspond à la naissance brusque du pôle.

Cette formule ne s'applique pas au cas où le pôle s'éloigne, parce qu'il faut alors tenir compte des phénomènes produits par le pôle quand il est tout près de la plaque.

CHAPITRE XI

GALVANOMÈTRE BALISTIQUE MESURES DES PARAMETRES D'INDUCTION

Galvanomètre balistique.

221. Mesure de petites quantités d'électricité. Galvanomètre balistique.

La vérification et l'application des lois de l'induction exigent la mesure de petites quantités d'électricité; nous allons décrire l'emploi du galvanomètre comme *balistique*.

1°. — Faisons passer dans un galvanomètre un courant i variable, dont la durée t , de l'ordre du dixième ou du centième de seconde, est petite par rapport à la période d'oscillation de l'aiguille.

Par définition, la quantité d'électricité transportée par ce courant est :

$$q = \int_0^t i dt.$$

A chaque instant, le couple qui agit sur l'aiguille *encore non déviée* du galvanomètre est GMi , où G est la constante du galvanomètre (§ 150), M le moment magnétique de l'aiguille. La durée t est en effet si petite, que l'aiguille n'a pas changé sensiblement de position, quand le courant a cessé de passer; *mais elle a pris de la vitesse*.

L'aiguille est comparable à un pendule sur lequel nous donnons un coup de marteau.

L'impulsion angulaire est :

est :
$$\mathfrak{J} = \int_0^t GMi dt = GMq.$$

Soit I le moment d'inertie du système mobile.

D'après les théorèmes fondamentaux sur les impulsions et les

quantités de mouvement (*Mécanique rationnelle*, § 424), la vitesse angulaire u imprimée par l'impulsion est telle qu'on ait :

$$uI = \mathfrak{J} = GMq. \quad (1)$$

L'énergie cinétique correspondante est :

$$\frac{u^2 I}{2} = \frac{\mathfrak{J}^2}{2I} = \frac{G^2 M^2 q^2}{2I}.$$

2°. — Ceci posé, cherchons l'élongation maxima Θ du mobile. Pour cela, écrivons que le travail du couple $MH \sin \theta$, auquel il est soumis, détruit l'énergie cinétique :

$$\int_0^\Theta MH \sin \theta \cdot d\theta = MH (1 - \cos \Theta) = 2MH \sin^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{G^2 M^2 q^2}{2I};$$

d'où
$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{Gq}{2} \sqrt{\frac{M}{IH}}.$$

Le moment d'inertie du mobile (aiguille-miroir) n'est pas directement mesurable. Mais la détermination de la période T d'oscillation permet de l'éliminer. On a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}, \quad \sin \frac{\Theta}{2} = \pi \frac{Gq}{HT}, \quad q = \frac{HT}{\pi G} \sin \frac{\Theta}{2}. \quad (2)$$

Enfin si l'angle Θ est petit :

$$q = \frac{HT}{2\pi G} \cdot \Theta. \quad (3)$$

Cette formule n'est guère applicable, car il est quasiment impossible de mesurer séparément H et G .

3°. — REMARQUE.

La formule (3) est facile à retrouver. En effet, quand les oscillations sont petites, le mouvement est sinusoïdal. Posons donc :

$$\theta = \Theta \sin \omega t, \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta \omega \cos \omega t = \frac{2\pi\Theta}{T} \cos \omega t.$$

La vitesse maxima est donc :

$$2\pi\Theta : T.$$

Pour retrouver la formule (3), on écrit qu'elle est égale à u :

$$\frac{2\pi\Theta}{T} = \frac{GMq}{I}, \quad q = \frac{2\pi I}{GMT} \cdot \Theta;$$

on utilise la relation :

$$I : M = \frac{T^2}{4\pi^2} H; \quad \text{d'où enfin} \quad q = \frac{HT}{2\pi G} \cdot \Theta.$$

222. Étalonnage du galvanomètre balistique.

1°. — Envoyons dans le galvanomètre un courant *constant* d'intensité i_0 connue en ampères; déterminons la déviation α .

On a, d'après la théorie du galvanomètre (§ 150) :

$$i_0 = \frac{H}{G} \alpha, \quad \text{d'où} \quad q = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{i_0}{\alpha} \cdot \Theta;$$

formule aussi simple qu'importante.

Un galvanomètre permettra donc de déterminer *en coulombs* la quantité d'électricité transportée par un courant instantané, si l'on connaît la durée d'oscillation T en secondes, la déviation α (*mesurée en unités quelconques*) donnée par un courant i_0 constant connu en ampères, et l'élongation Θ (*mesurée en ces mêmes unités*) donnée par le courant instantané. On prend naturellement comme unités en lesquelles on mesure α et Θ , les divisions de l'échelle sur laquelle on lit les déviations par la méthode de Poggendorff.

Déterminons l'ordre de grandeur de la sensibilité de l'appareil. Soit $T = 10^s$: admettons qu'un courant constant donne sur l'échelle une déviation d'un millimètre par microampère (millionième d'ampère, 10^{-6} ampère).

Une quantité égale à 10^{-6} coulombs donnera une élongation :

$$\theta = 10^{-6} \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1\text{mm}}{10^{-6}} = 0\text{mm},63.$$

Or ce millionième d'ampère dégagerait $0^{\text{cc}},116$ d'hydrogène en 277 heures, soit 1^{cc} en 100 jours.

2°. — On peut étalonner le galvanomètre par la méthode du paragraphe 228.

Le champ est créé par un solénoïde.

Mesurant en ampères le courant i qui le parcourt, connaissant le nombre m de spires de fil par centimètre, on peut calculer le flux total d'induction \mathcal{F} à travers une spire d'une bobine d'épreuve dont s est l'aire de la section droite :

$$\mathcal{F} = 0,4\pi im s.$$

Si n est le nombre de spires de cette bobine, le flux à travers elle est :

$$n\mathcal{F} = 0,4\pi imns.$$

On procédera soit en supprimant brusquement le courant i , soit en l'inversant.

Cette méthode d'étalonnage est la plus pratique.

223. Balistique à cadre mobile.

1°. — H désignant l'intensité du champ créé par les aimants fixes, S désignant la surface totale de la bobine, I le moment d'inertie de la partie mobile, u la vitesse angulaire initiale, on trouve immédiatement :

$$\mathcal{J} = SHq = uI, \quad \frac{u^2 I}{2} = \frac{S^2 H^2 q^2}{2I}.$$

Appelons $C\theta$ le couple auquel le cadre est soumis.

Écrivons que le travail de ce couple détruit l'énergie cinétique :

$$\int_0^\Theta C\theta d\theta = \frac{C\Theta^2}{2} = \frac{S^2 H^2 q^2}{2I}, \quad \Theta = SHq \frac{1}{\sqrt{CI}}.$$

Introduisons la période; il vient enfin :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}; \quad \Theta = 2\pi \frac{SHq}{TC}.$$

Faisons passer le courant i_0 connu en ampères; il produit une déviation (§ 159) :

$$i_0 = \frac{C}{SH} \alpha;$$

d'où la formule :

$$q = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{i_0}{\alpha} \cdot \Theta,$$

identique à celle qui convient au galvanomètre à aiguille mobile.

2°. — CONDITIONS DE SENSIBILITÉ.

Pour les deux types d'appareil, on diminue la sensibilité quand, toutes choses égales d'ailleurs, le moment d'inertie de la partie mobile augmente.

En effet, pour une quantité q donnée et quel que soit le moment d'inertie, $T\Theta$ a une valeur déterminée, puisque le rapport $i_0 : \alpha$ n'en dépend pas. Quand on augmente le moment d'inertie, on augmente la durée d'oscillation : on diminue donc l'amplitude Θ .

Pour transformer un galvanomètre ordinaire en balistique, on augmente ordinairement cette inertie; mais c'est, non pas pour augmenter la sensibilité, mais pour rendre les lectures possibles, en augmentant la durée d'oscillation.

Toutes choses égales d'ailleurs, la sensibilité d'un galvanomètre employé comme balistique varie dans le même sens que sa sensibilité employé comme galvanomètre ordinaire; cela résulte encore de la formule (2). Il est donc avantageux de diminuer le champ directeur, si l'aiguille est mobile; le couple de torsion, si le cadre est mobile.

A la vérité, quand on diminue le champ directeur H , la durée d'oscillation augmente comme $1 : \sqrt{H}$. Mais le rapport $i_0 : \alpha$ diminue comme H . En définitive, le coefficient de θ diminue comme \sqrt{H} : donc la sensibilité augmente.

Il est avantageux de construire les galvanomètres balistiques à cadre mobile avec des cadres de grandes dimensions; l'inertie est ainsi obtenue par de la matière rationnellement utilisée à augmenter la sensibilité.

Parfois on emploie l'aimant mobile comme miroir, ce qui diminue le plus possible l'inertie de la partie mobile.

224. Galvanomètre balistique avec amortissement.

1°. — Dans les expériences de précision, le galvanomètre balistique oscille sans amortissement appréciable. Tandis que pour hâter les mesures, on rend les ampèremètres *apériodiques*, de sorte que l'aiguille arrive vite à sa position d'équilibre, au contraire on diminue l'amortissement des galvanomètres *balistiques*.

Mais les appareils sans amortissement sont d'un emploi délicat; avant chaque mesure il faut arrêter l'aiguille par de petits déplacements systématiques d'aimants, ou en envoyant de faibles courants dans une bobine auxiliaire (§ 150, 5°) : ces opérations exigent un certain doigté.

Dans la pratique industrielle, on préfère les appareils à fort amortissement, même comme balistiques : ils sont généralement du type à cadre mobile.

Soit δ la diminution relative d'amplitude pour une oscillation complète; on la détermine au moyen de deux amplitudes consécutives mesurées du même côté de la position d'équilibre (*Mécanique rationnelle*, § 410, et présent volume, § 147).

$\delta : 4$ est donc la diminution relative pour un quart de période.

Si la partie mobile du galvanomètre balistique a un amortissement petit, mais non négligeable, la formule devient :

$$q = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{i_0}{\alpha} \left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \Theta.$$

Nous mesurons Θ ; le facteur entre parenthèses ramène Θ à ce qu'on obtiendrait si l'amortissement était négligeable.

2°. — AMORTISSEMENT CRITIQUE.

Au paragraphe 149, nous avons démontré la formule :

$$\Theta = \frac{u}{e} \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Remplaçons u par sa valeur; introduisons la période T qu'aurait le mobile si l'amortissement était supprimé :

$$T = 2\pi \sqrt{I : C}.$$

Il vient :

$$q = \frac{T}{2\pi} \frac{i_0}{\alpha} e \Theta.$$

Pratiquement T est la période en circuit ouvert. Si les pièces métalliques produisent un amortissement non négligeable, même en circuit ouvert, la période est T' ; la formule donnée au paragraphe 147 permet de calculer T connaissant T' .

e est la base des logarithmes népériens : $e = 2,718$.

Employé avec l'amortissement critique, l'appareil est e fois moins sensible qu'avec l'amortissement nul.

Quelle que soit la disposition utilisée, tant que l'amortissement

est dû à un frottement proportionnel à la vitesse, l'angle de première impulsion mesure q en valeur relative.

Il en est ainsi quand le frottement est dû à l'air et aux courants d'induction; nous reviendrons plus loin sur cette dernière cause d'amortissement (§ 226).

225. Indication des galvanomètres pour les courants variables et alternatifs.

1°. — Contrairement à la théorie élémentaire, l'expérience prouve que le galvanomètre (à aiguille ou à cadre mobiles), employé comme balistique, indique très imparfaitement si la quantité d'électricité totale transportée par une décharge *alternante* est nulle (§ 210).

Sous l'influence d'un courant alternatif, le spot ne reste généralement pas au zéro.

Les indications du galvanomètre balistique ne sont exactes que sous certaines réserves.

L'expérience suivante est instructive.

Remplaçons l'aiguille d'un galvanomètre par un bout de fer doux et diminuons beaucoup le champ terrestre. Un courant périodiquement variable quelconque amène l'aiguille suivant l'axe des spires du galvanomètre. En effet, le courant transforme le morceau de fer doux en un aimant, qui n'est soumis par hypothèse qu'au champ dû au courant, champ dirigé suivant l'axe des spires (§ 158).

L'expérience réussit avec une aiguille aimantée, si le champ directeur est faible et le courant périodique intense.

Il est important de remarquer que l'intensité moyenne du courant périodique peut être nulle, sans que l'aiguille cesse d'être *en équilibre stable* suivant l'axe des spires. Cela tient à ce que le magnétisme induit change de sens avec le courant.

La théorie plus complète du galvanomètre à aiguille mobile pose que le moment magnétique de l'aiguille comprend une partie constante M , et une partie induite variable, proportionnelle à chaque instant à la composante parallèle à l'aiguille de la force magnétique due au courant.

La même théorie vaut pour le galvanomètre à cadre mobile.

2°. — Soit θ l'angle de l'aiguille avec le plan des spires au temps t ; soit θ_0 l'angle θ quand l'aiguille est en équilibre, aucun courant ne traversant le cadre. Soit H le champ terrestre : il fait évidemment l'angle θ_0 avec le plan des spires.

Nous posons que le moment magnétique de l'aimant est :

$$M + \gamma i \sin \theta.$$

Le couple de rappel à la position d'équilibre est :

$$H \sin (\theta - \theta_0) (M + \gamma i \sin \theta).$$

Le couple qui tend à mettre l'aiguille en croix avec le cadre est :

$$Gi \cos \theta (M + \gamma i \sin \theta).$$

Si nous négligeons l'amortissement, l'équation différentielle du mouvement est :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = (M + \gamma i \sin \theta) [Gi \cos \theta - H \sin (\theta - \theta_0)]. \quad (1)$$

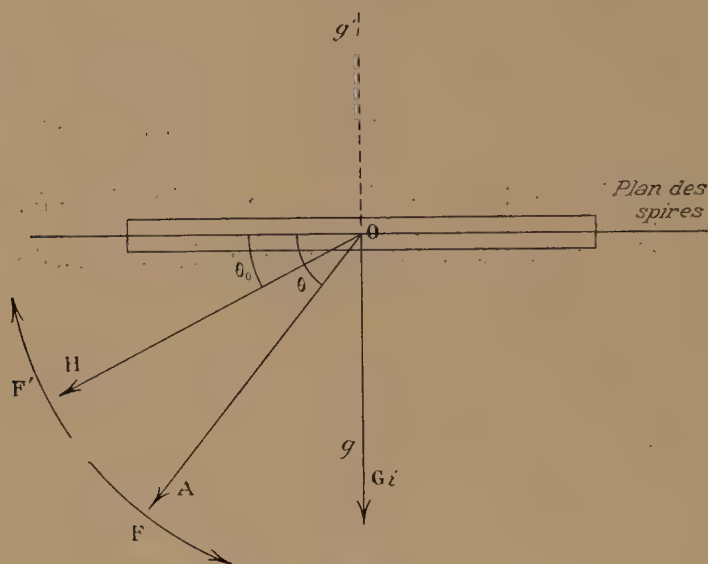


Fig. 235.

3°. — COURANT CONSTANT.

Il est généralement possible de trouver une déviation initiale θ_0 telle qu'on puisse faire passer dans le galvanomètre un courant constant i_0 , sans que l'aiguille dévie.

Écrivons en effet que l'aiguille est immobile dans la situation initiale $\theta - \theta_0$, il vient :

$$M + \gamma i_0 \sin \theta_0 = 0.$$

Cette équation signifie que le moment magnétique de l'aiguille est annulé par le magnétisme induit.

Le courant (négatif) crée un champ dirigé suivant Og' .

Si $i < i_0$, l'aiguille tend à tourner dans le sens F' .

Si $i > i_0$, c'est le magnétisme induit qui l'emporte : l'aiguille tend à tourner dans le sens F .

4°. — COURANT ALTERNATIF.

Cherchons la position d'équilibre pour un courant alternatif, d'intensité moyenne nulle. Intégrons l'équation (1) pour une période.

Les termes du premier degré en i disparaissent ; il reste :

$$MH \sin (\theta - \theta_0) = G\gamma \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot dt. \quad (2)$$

L'angle θ est différent de θ_0 : la déviation n'est pas nulle.

Dans le cas particulier où $\theta_0 = 0$, la condition (2) se dédouble :

$$\sin \theta = 0, \quad MH = G\gamma \cos \theta \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\infty} i^2 dt.$$

Si l'aiguille est rigoureusement dans le plan des spires, elle y reste : c'est la conséquence de la première condition.

Mais si elle sort accidentellement du plan des spires, elle ira retrouver l'une des deux positions d'équilibre stable, symétriques, qui correspondent à la seconde solution : θ est en effet donné par son cosinus.

5°. — DÉCHARGE.

Faisons passer une décharge dans le galvanomètre ; soit :

$$q = \int_0^{\infty} i dt, \quad \rho = \int_0^{\infty} i^2 dt.$$

Écrivons que l'aiguille reste immobile.

Multiplions l'équation (1) par dt et intégrons entre 0 et ∞ .

Il vient, puisque $\theta = \theta_0$ identiquement :

$$Mq + \gamma\rho \sin \theta_0 = 0.$$

Donc il existe une déviation initiale θ_0 , telle qu'une décharge de forme donnée, c'est-à-dire définie par les deux quantités q et ρ , ne produise pas de déviation. Il est facile d'obtenir que des charges relativement énormes traversent la bobine d'un galvanomètre sans produire aucune déviation de l'aiguille.

6°. — GALVANOMÈTRE A CADRE MOBILE.

La théorie précédente s'applique exactement aux galvanomètres à cadre mobile. Le courant qui traverse le cadre, induit une aimantation transversale dans l'aimant producteur du champ H . Cette aimantation crée un champ h normal au plan de l'aimant, par conséquent normal au champ H .

On peut représenter le

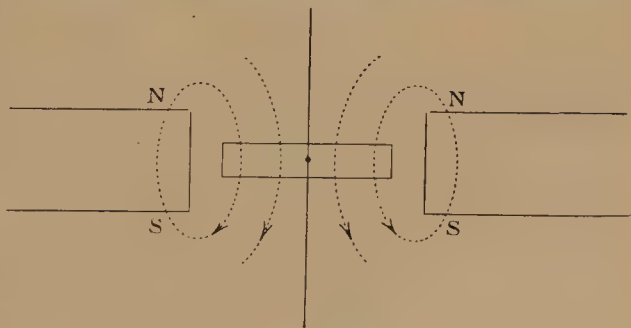


Fig. 236.

champ h par une expression proportionnelle à $i \cos \theta$; le couple qui en résulte sur le cadre est de la forme : $\gamma i^2 \cos \theta \sin \theta$.

L'équation différentielle du mouvement du cadre est encore :

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + C \sin (\theta - \theta_0) = HSi \cos \theta + \gamma i^2 \sin \theta \cos \theta ;$$

C est la constante de torsion du fil de suspension, S est la surface totale de la bobine.

226. Bobine fermée oscillant dans un champ uniforme.

1°. — Dans la position d'équilibre, le plan des spires est parallèle au champ uniforme d'intensité H . La bobine oscille sous l'influence d'une suspension bifilaire (électrodynamomètre), ou des fils métalliques servant d'axe de rotation (galvanomètre à cadre mobile).

Le couple qui résulte de la torsion de ces appareils de suspension est $C\theta$, tant que l'angle θ est petit.

Le moment d'inertie du système mobile est I .

On a pour équation du mouvement :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta + C' = 0.$$

Le couple C' provient du courant induit qui parcourt la bobine.

Soit i son intensité à chaque instant, soit S la surface totale de la bobine; elle est soumise au couple :

$$HSi \cos \theta = HSi,$$

si les déplacements sont petits.

Pour calculer i , appliquons l'équation générale de l'induction :

$$ri = - \frac{d\mathcal{F}}{dt} - L \frac{di}{dt} + E;$$

elle suppose l'existence dans le circuit d'une pile de force électromotrice E . L'expérience montre que le second terme du second membre est négligeable devant le premier.

\mathcal{F} est le flux du champ H dans la bobine :

$$\mathcal{F} = HS \sin \theta, \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} = HS \cos \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Le couple C' devient :

$$C' = -HSi = -\frac{H^2 S^2}{r} \frac{d\theta}{dt} - \frac{HSE}{r}.$$

L'équation du mouvement est en définitive :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{H^2 S^2}{r} \frac{d\theta}{dt} + C\theta - \frac{HSE}{r} = 0.$$

Nous l'avons longuement étudiée aux paragraphes 409 et 410 de notre *Mécanique rationnelle* et au paragraphe 147 du présent volume. Il faut poser dans les solutions :

$$f = \frac{H^2 S^2}{r}$$

On fait disparaître le terme constant par un changement de variable. Cela signifie qu'à résistance égale, les phénomènes sont les mêmes, qu'une pile existe ou non dans le circuit.

La présence de la pile change seulement l'azimut que le système tend asymptotiquement à occuper et autour duquel il oscille quand le phénomène est périodique.

Ainsi DANS LES CONDITIONS DE L'EXPÉRIENCE, de l'induction résulte un couple proportionnel à la vitesse angulaire. Cela tient à ce que, pour θ petit, la variation du flux est proportionnelle à la variation de l'azimut. La résistance du circuit demeurant invariable, la loi fondamentale de l'induction (à savoir : la force électromotrice à chaque instant est proportionnelle à la variation du flux) exige la proportionnalité de l'intensité du courant et de la vitesse angulaire, par suite l'existence d'un couple proportionnel à cette vitesse.

Pour augmenter le frottement f , il suffit de diminuer la résistance r . Les oscillations obéissent à la loi :

$$\theta = \theta_0 \exp(-\lambda t) \cdot \sin \omega t.$$

Soit Θ_1 et Θ_2 deux amplitudes consécutives du même côté de la position d'équilibre. Si l'amortissement n'est pas très rapide, on a :

$$\Theta_1 : \Theta_2 = \exp(\lambda T), \quad \lambda T = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2} = \delta = \frac{fT}{2I} = \frac{2\pi^2 f}{CT}.$$

L'amortissement δ est indépendant de l'amplitude et fonction de la période.

Si on laisse invariable la résistance r et le mode de suspension, si on se borne à modifier le moment d'inertie par déplacement de masses, le décrement est en raison inverse de la période.

2°. — Tant que r est assez grand, le mouvement est périodique : les oscillations décroissent en progression géométrique. Weber montra qu'il en est bien ainsi, par suite que les forces électromotrices d'induction sont proportionnelles aux vitesses.

Si r devient assez petit, le mouvement est apériodique.

Le passage d'un des types de mouvement à l'autre a lieu pour : $f = 2\sqrt{CI}$; la résistance correspondante, appelée *critique*, est :

$$r_c = \frac{H^2 S^2}{2\sqrt{CI}}.$$

Pour la déterminer, on étudie pour diverses résistances la manière dont le spot revient au zéro ; on détermine celle pour laquelle le mouvement cesse d'être périodique.

La résistance r_c est ainsi toujours connue par excès.

On peut la calculer. En circuit ouvert, l'amortissement est faible ; la durée d'oscillation est très approximativement :

$$T = 2\pi\sqrt{I : C}.$$

Fermons le cadre sur une résistance qui rend la résistance totale du circuit égale à r ; soit alors T la durée d'oscillation, δ l'amortissement.

On a, d'après le paragraphe 409 de la *Mécanique rationnelle* :

$$\delta = \lambda T' = f T' : 2I = H^2 S^2 T' : 2rI; \quad r = T H^2 S^2 : 2\delta I;$$

$$r_c = r \frac{T}{T'} \frac{\delta}{2\pi} = r \frac{\delta}{2\pi},$$

approximativement, puisque T diffère très peu de T' .

Le lecteur vérifiera ces propositions sur un galvanomètre à cadre mobile qu'il fermera sur des résistances variées. Il est intéressant d'inscrire les mouvements apériodiques sur un cliché se déplaçant verticalement d'un mouvement uniforme. On trouve là une série de curieuses et instructives manipulations.

3°. — Ce que nous venons de dire d'un cadre s'applique à toute pièce métallique oscillant dans un champ, à la condition que, pour toutes les positions de la pièce, le champ se trouve pratiquement disposé de même par rapport à elle. Dans ces conditions, les petites oscillations s'amortissent en progression géométrique : le frottement est proportionnel à la vitesse. Suivant la valeur du champ et de la résistance intérieure, le phénomène est périodique ou apériodique.

Par exemple, on fait osciller entre les pôles d'un électro-aimant une plaque de cuivre assez étendue pour que, dans toutes ses positions, elle soit traversée par toutes les lignes de force du champ pour lesquelles l'intensité est notable. On constate que les oscillations décroissent en progression géométrique (§ 189).

Si la condition énoncée n'est pas satisfaite, pour chaque position de l'oscillateur, le frottement est encore proportionnel à la vitesse; mais l'équation du mouvement prend la forme plus compliquée :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta + \varphi(\theta) \frac{d\theta}{dt} = 0;$$

la fonction $\varphi(\theta)$ n'est plus une constante.

227. Aiguille oscillant dans une bobine fermée.

Les variations de flux par déplacement ne dépendent que des mouvements relatifs. Le principe de l'action et de la réaction permet de conclure immédiatement : *quand un aimant oscille à l'intérieur d'une bobine* (dans la position d'équilibre, les spires sont supposées parallèles à l'aimant) *ou généralement à l'intérieur d'une pièce métallique conductrice, il induit dans cette pièce des courants qui produisent sur lui un frottement électromagnétique proportionnel à la vitesse angulaire.*

L'amplitude de ses oscillations diminue en progression géométrique.

L'équation de son mouvement est encore du type :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Si, sans changer la forme des pièces métalliques, on diminue leur résistance dans un certain rapport, le coefficient f croît dans le même rapport.

Un galvanomètre à aiguille mobile devient apériodique quand l'aiguille se déplace dans une petite cavité limitée par une paroi épaisse de métal bon conducteur, de cuivre rouge par exemple.

Voici un curieux détail historique.

Les phénomènes d'induction ont été découverts par Faraday. Mais, bien des années avant, on avait observé fortuitement, dans les ateliers du constructeur Gambey, que les oscillations d'une aiguille aimantée montée sur pivots avaient un amortissement énorme lorsqu'on en approchait une masse de cuivre. Arago étudia le phénomène, mais ne sut pas y distinguer la présence de courants; il imagina pour l'expliquer un magnétisme particulier, qu'il appela *magnétisme de rotation*.

Mesures des paramètres d'induction.

228. Mesure des champs au moyen des quantités d'électricité induites.

1°. — Quand un circuit fermé, de résistance invariable, passe d'une position 1 à une position 2; plus généralement, quand, pour une raison quelconque, le flux qui le traverse passe de la valeur \mathcal{F}_1 à la valeur \mathcal{F}_2 , la quantité d'électricité induite ne dépend que de la variation : $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$.

Elle ne dépend ni du chemin parcouru pour aller de 1 à 2, ni de la vitesse du transport, ni plus généralement de la loi de variation du flux.

Elle ne dépend pas de la self-induction du circuit.

En effet, la force électromotrice induite (en volts) est, à chaque instant, donnée par la formule :

$$e = -10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt} - \frac{d}{dt} (Li);$$

$$\text{d'où} \quad q = \int i dt = \frac{1}{r} \int e dt = -\frac{10^{-8}}{r} [\Delta\mathcal{F} + \Delta(Li)];$$

q est la quantité totale d'électricité ajoutée à celle qui parcourt le circuit sous l'influence de la force électromotrice d'origine chimique qu'il peut contenir.

Dans la pratique, cette force électromotrice est nulle; le courant i est donc nul au début et à la fin de l'expérience. D'où la formule :

$$q = -\frac{10^{-8}}{r} \Delta\mathcal{F}.$$

La quantité totale induite ne dépend que de la variation du flux, quelle que soit la self-induction du circuit mobile et son changement de forme.

Si : $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1 = 0$, si le flux est le même au commencement et à la fin de l'opération, on a : $q = 0$.

Cela veut dire, non pas que la quantité transportée par le courant induit est nulle à chaque instant, mais que pendant l'opération il passe, somme toute, autant d'électricité dans un sens que dans l'autre.

La règle générale que nous venons d'énoncer et dont, au surplus, nous avons déjà rencontré de nombreuses applications, comporte une infinité de corollaires.

Voici l'un des plus connus : *Approchons peu à peu d'un circuit fermé 2, un circuit 1, siège d'un courant invariable. La somme des quantités induites dans 2 par chaque déplacement brusque de 1 est égale à la quantité qui serait induite, dans la dernière position de 1, par la clôture ou la rupture de ce circuit.* On suppose que, dans la position initiale, le circuit 1 est trop éloigné de 2 pour agir sur lui.

S'il n'en était pas ainsi, la somme des quantités induites serait égale à la différence des quantités induites par la clôture ou la rupture de 1, dans ses positions initiale et finale.

On a un énoncé analogue pour les quantités induites par le déplacement d'un aimant.

2°. — APPLICATION A L'ÉTUDE DES CHAMPS.

Plaçons normalement aux lignes de force du champ une bobine dont l'aire totale (somme des aires des différentes spires) est S ; le flux est HS . Enlevons brusquement la bobine et amenons-la en un lieu où l'intensité du champ est nulle.

La quantité d'électricité induite dans le circuit de résistance r dont font partie la bobine et le galvanomètre balistique, est :

$$q = \frac{10^{-8}}{r} \cdot HS \text{ coulombs.}$$

La mesure de la première élongation fournit q en valeur relative.

Au lieu d'enlever la bobine, on peut la faire tourner de 180° autour d'un axe quelconque passant par les spires; le flux varie de HS à

$-HS$; la quantité d'électricité induite est : $\frac{10^{-8}}{r} 2HS$.

La méthode n'est évidemment applicable que si le produit HS est assez grand ou la résistance r assez petite.

Elle ne nécessite qu'un réglage approché de l'orientation initiale de la bobine, puisque le flux est maximum quand le champ est normal au plan des spires.

Nous avons vu au paragraphe 222 qu'inversement, si le champ est connu, la méthode permet d'étalonner le galvanomètre balistique.

229. Comparaison des coefficients de self-induction.

Nous supposons applicables les considérations du paragraphe 302; nous parlerons donc sans absurdité des coefficients de self-induction et d'induction mutuelle des circuits ouverts.

1°. — Montons l'appareil comme un pont de Wheatstone (fig. 125) : sur les branches 1 et 3, plaçons les résistances dont les self-inductions sont à comparer. Elles sont représentées par deux bobines assez éloignées l'une de l'autre pour que l'induction mutuelle soit négligeable.

Équilibrons pour l'état permanent; on a :

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2}. \quad (1)$$

Cherchons à quelle condition le pont est équilibré identiquement pour l'état variable, c'est-à-dire à quelle condition l'aiguille du galvanomètre reste au zéro au moment où l'on ferme et où l'on ouvre le circuit AC contenant la pile.

S'il ne passe *jamais* rien dans le galvanomètre, les forces électromotrices sur les circuits AB et AD d'une part, BC et DC de l'autre, sont à *chaque instant* respectivement égales.

D'où les conditions :

$$i_2 r_2 = i_4 r_4, \quad (2)$$

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = i_3 r_3 + L_3 \frac{di_3}{dt},$$

$$i_1 = i_2, \quad i_3 = i_4. \quad (3)$$

Ces équations sont satisfaites si l'on a :

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_3}{r_3}. \quad (4)$$

En effet, en vertu de (1), puis de (3), l'équation (2) devient :

$$i_2 r_1 = i_4 r_3, \quad \text{puis :} \quad i_1 r_1 = i_3 r_3.$$

Il suffit d'introduire cette condition dans la seconde équation (2) pour retrouver (4).

Nous pouvons équilibrer le pont pour l'état permanent d'une infinité de manières; il s'agit de trouver par tâtonnements un équilibre qui vaille aussi pour l'état variable.

D'après (4), il faut, après chaque tâtonnement malheureux, modifier le rapport des résistances des branches qui contiennent les self-inductions non négligeables.

On comprend maintenant pourquoi, dans la comparaison des résistances par le pont de Wheatstone, on commence par fermer le circuit de la pile à l'aide d'une clef spéciale, avant de fermer la diagonale du galvanomètre, qui est ainsi hors circuit pendant l'état variable (§ 172).

Certes, on supprime la self des boîtes de résistance par un enroulement convenable (§ 170); mais comme il est impossible de la supprimer des enroulements dont on mesure la résistance, la précaution est nécessaire.

2°. — EXISTENCE DES COEFFICIENTS DE SELF-INDUCTION.

Je prie le lecteur de faire attention à ce qui suit : *chaque fois qu'une bobine contient du fer, il est absurde de parler de son coefficient de self-induction.* Cette proposition, *que nul ne songe à contester*, est d'autant plus importante à graver dans l'esprit, que les ingénieurs passent leur vie à faire de beaux calculs sur les coefficients de self de bobines *contenant du fer*. Je suis loin de leur contester le droit de fixer les idées par des calculs grossièrement approchés ou, si l'on veut, par des calculs s'appliquant à des cas idéaux fort éloignés de la réalité; à la condition, toutefois, qu'il soit bien entendu qu'il s'agit de cas idéaux ou d'approximations grossières.

Le coefficient de self L est, par définition, le facteur par lequel il faut multiplier l'intensité du courant qui passe dans un circuit pour obtenir le flux d'induction que le circuit s'envoie dans lui-même. Il n'existe sans ambiguïté, c'est-à-dire il n'a de valeur indépendante de l'intensité du courant, que si l'intensité d'aimantation du magnétisme induit est proportionnelle au champ, *ce qui est grossièrement erroné pour le fer*.

Assurément il nous est toujours permis de mettre le flux d'induction qu'un circuit s'envoie dans lui-même sous la forme Li , où i est la valeur *actuelle* du courant. Mais alors L est une certaine fonction *de la valeur actuelle et des valeurs antérieures du courant* (hystérésis) : ce n'est plus un paramètre caractéristique du circuit.

Ces remarques s'appliquent aux coefficients d'induction mutuelle.

230. Étalon de self. Commutateur.

Deux perfectionnements rendent les mesures plus faciles.

1°. — ÉTALON VARIABLE DE SELF-INDUCTION.

A l'intérieur d'une bobine circulaire fixe pivote, autour d'un axe diamétral, une seconde bobine en série avec la première; la figure 237 ne représente qu'une spire de chaque bobine.

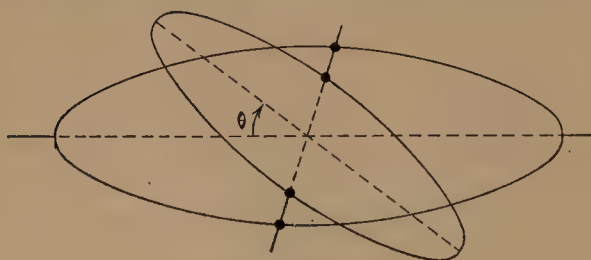


Fig. 237.

L'angle des spires varie donc de

$$\theta = 0 \quad \text{à} \quad \theta = 180^\circ.$$

La self-induction est maxima quand les bobines sont parallèles et parcourues dans le même sens par le courant, $\theta = 0$. Elle est minima quand les bobines sont parallèles et parcourues en sens con-

traires, $\theta = 180^\circ$; elle serait même identiquement nulle, s'il était possible de prendre des bobines identiques.

Une graduation indique la self-induction en henrys en fonction de l'angle θ .

La comparaison de deux self-inductions est alors très aisée par l'intermédiaire de l'étalon variable. On installe sur les branches 1 et 3 l'une des self-inductions et l'étalon variable; on équilibre le pont pour l'état permanent; puis, sans toucher aux résistances, on équilibre pour l'état variable en modifiant la self-induction variable.

2°. — COMMUTATEUR.

Quand le pont n'est pas équilibré, le galvanomètre reçoit une décharge dans un sens, quand on ferme le circuit de la pile; dans le sens contraire, quand on l'ouvre.

Il est avantageux de remplacer ces impulsions par une déviation continue : la sensibilité et la commodité des mesures sont considérablement accrues.

La figure 238 représente le commutateur.

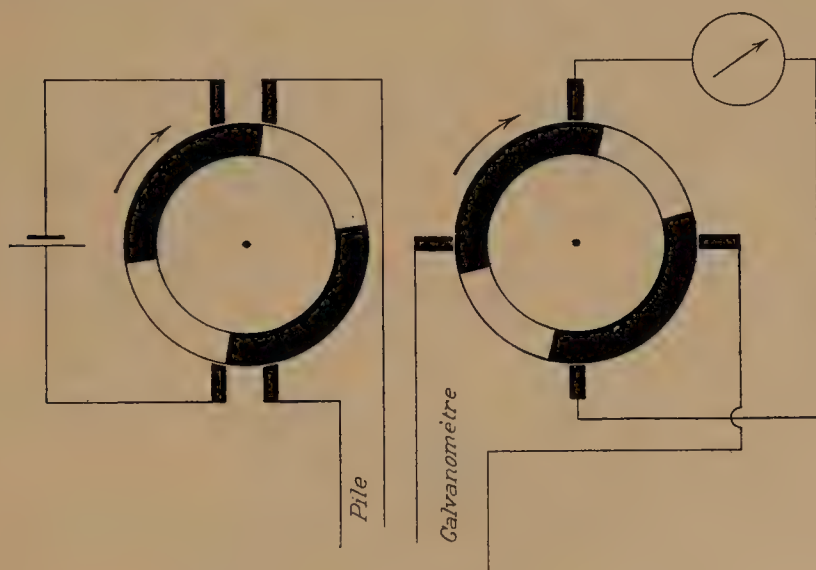


Fig. 238.

Les parties noires sont sensément métalliques; les deux systèmes circulaires sont montés sur le même axe : ils tournent donc avec la même vitesse. On peut leur imposer un calage relatif sur l'axe commun.

Sur leur pourtour frottent respectivement quatre balais fixes. On vérifiera que le système de droite ferme le circuit du galvanomètre quatre fois par tour, *en inversant chaque fois les connexions*. Le système de gauche ferme le circuit de la pile deux fois par tour et l'ouvre deux fois, *en maintenant les mêmes connexions*. La figure 238

représente le circuit du galvanomètre fermé et le circuit de la pile près de se fermer. Après un quart de tour du système, le circuit du galvanomètre sera encore fermé, mais avec des connexions inversées : le circuit de la pile sera près de s'ouvrir.

D'où résulte que les décharges passeront dans le même sens dans le galvanomètre.

231. Comparaison de deux coefficients d'induction mutuelle.

La figure 239 indique le montage de l'appareil. Nous nous supposons encore dans le cas visé au paragraphe 202.

Soit à comparer les inductions mutuelles des systèmes 1 et 2 formés chacun de deux bobines. Une bobine du système 1 et une bobine du système 2 sont mises en série avec une pile P. Sur le circuit des autres bobines mises en série, on installe une dérivation

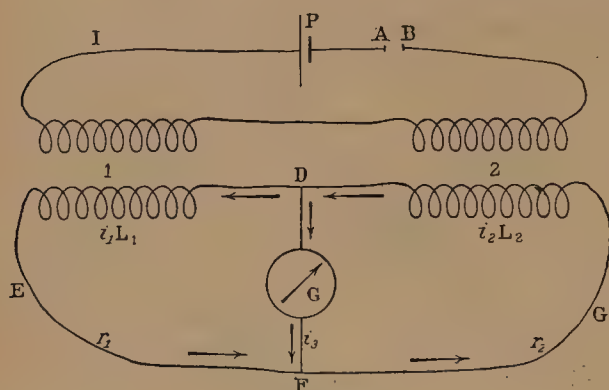


Fig. 239.

contenant un galvanomètre. L'expérience consiste à fermer ou à ouvrir le circuit de la pile; le courant y varie de 0 à I ou de I à 0.

On modifie le rapport des résistances r_1 et r_2 jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre reste au repos pendant l'état variable.

Comme nous allons voir, le courant dans le galvanomètre n'est pas alors *identiquement nul*; il est seulement nul *en moyenne*.

Ecrivons les équations de Kirchhoff.

Appelons F et D les potentiels en F et en D.

$$\text{Circuit DEF : } D - F = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_1 \frac{dI}{dt}.$$

$$\text{Circuit FGD : } F - D = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_2 \frac{dI}{dt}. \quad (1)$$

$$\text{Circuit DF : } D - F = r_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt}.$$

$$\text{Il faut réaliser la condition : } \int i_3 dt = 0.$$

Pendant que le courant dans le circuit inducteur varie de 0 à I ou de I à 0, les courants i_1 , i_2 , i_3 varient de 0 à 0. On a donc :

$$\int di_1 = \int di_2 = \int di_3 = 0.$$

La condition à satisfaire se traduit par les équations :

$$\int (D - F) dt = r_1 \int i_1 dt + M_1 I = 0, \quad (2)$$

$$\int (F - D) dt = r_2 \int i_2 dt + M_2 I = 0.$$

En raison des sens de circulation choisis, on a à chaque instant :

$$i_2 = i_3 + i_1; \quad \text{d'où} \quad \int i_1 dt = \int i_2 dt.$$

Divisant les équations (2) membre à membre, il reste :

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2},$$

condition indépendante des coefficients de self des divers circuits.

232. Balance d'Hughes.

1°. — Je décrirai ici un intéressant appareil qui fit beaucoup parler de lui à l'origine pour les conséquences bizarres que l'auteur voulut tirer de ses expériences.

Il se compose de quatre bobines égales $a, b; a', b'$, de 1 centi-

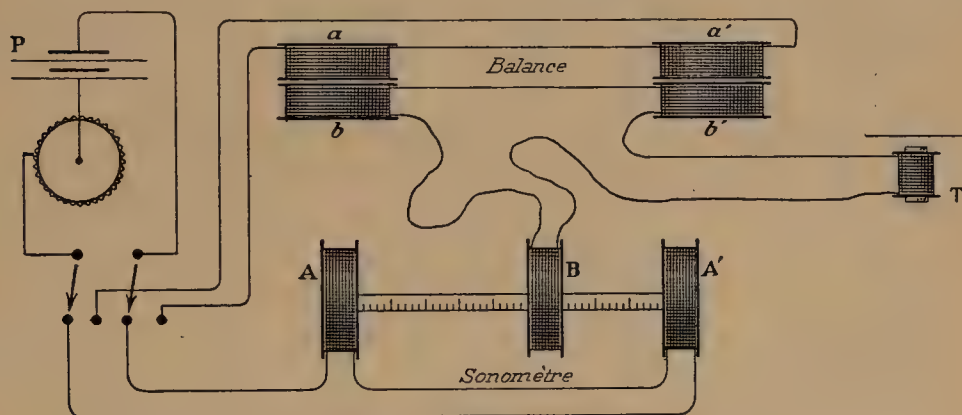


Fig. 240.

mètre de hauteur, de 5,5 centimètres de diamètre extérieur, formées de 100 mètres de fil. Elles constituent deux groupes identiques assez éloignés l'un de l'autre pour ne pas agir l'un sur l'autre.

Les bobines a et a' sont en série avec une pile dont le circuit est périodiquement interrompu par un procédé quelconque (horloge et microphone, roue finement dentée tournante,.....)

Les bobines b et b' sont en série avec un téléphone T et avec une bobine B dont nous dirons tout à l'heure le rôle.

Si les systèmes a, b et a', b' sont bien identiques, en connectant convenablement les bobines b et b' , on peut faire en sorte que le téléphone soit absolument silencieux. Au surplus, on peut compenser

la non-identité des bobines par un éloignement ou un rapprochement convenables. Mais si l'on introduit dans l'un des groupes de bobines un fragment de métal, une pièce de monnaie, ... les coefficients d'induction mutuelle ne sont plus égaux : on entend un son, fonction de la nature du métal et de sa masse. L'action du métal dépend à la fois de ses propriétés magnétiques (§ 200) et de son rôle d'écran (§ 209), c'est-à-dire de sa conductibilité. L'appareil permet d'apprécier, entre deux pièces de monnaie identiques en apparence, des différences de poids et de température imperceptibles.

Pour avoir une sorte de mesure, on utilise un *sonomètre* composé de deux bobines identiques fixes A et A' en série (qui seront mises sur le circuit de la pile), et de la bobine B qu'on déplace sur une règle graduée. Pour utiliser le sonomètre, on met hors du circuit de la pile les bobines α et α' ; on met en circuit les bobines A et A'.

En connectant convenablement les bobines A et A', en plaçant B à égale distance de ces bobines, on rend le téléphone silencieux. L'expérience consiste à déplacer B jusqu'à obtenir un son de même intensité que dans la première expérience. Le déplacement mesure, en quelque sorte, l'action du métal.

2°. — AUTRE DISPOSITIF D'HUGHES.

Pour mesurer les coefficients de self-induction, Hughes a proposé un second dispositif assez curieux pour que nous l'indiquions (fig. 241).

Supposons le pont ABCD équilibré pour l'état permanent ; nous

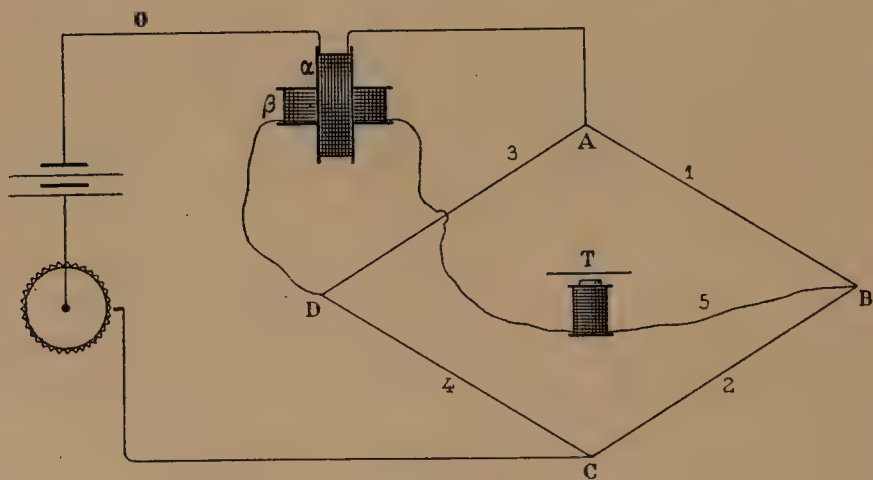


Fig. 241.

savons qu'il ne l'est généralement pas pour l'état variable. Le téléphone T monté en diagonale ne sera donc généralement pas silencieux.

Hughes envoie simultanément dans le téléphone le courant qui résulte de l'action mutuelle de deux bobines α , β , formant un sys-

tème analogue à celui que nous avons décrit au paragraphe 230 (*induction mutuelle variable*). Il prétend pouvoir ramener le téléphone au silence (c'est-à-dire faire en sorte qu'il soit traversé par un courant *identiquement* nul), en superposant le courant induit qui résulte du non-équilibre du pont pour l'état variable, et le courant induit qui provient de l'action mutuelle des bobines α , β , dont on peut faire varier l'inclinaison relative.

Le courant de la pile est interrompu par un rhéotome à dents, donnant de 10 à 100 ruptures par seconde.

Je laisse au lecteur le soin de montrer que la compensation est généralement impossible : on ne pourra généralement pas ramener le téléphone au silence. Pour plus de simplicité, il supposera la force électromotrice imposée sinusoïdale. Dans le calcul entrent les coefficients de sel-induction L_0, \dots, L_3 , le coefficient d'induction mutuelle M des bobines, enfin les résistances r_0, \dots, r_5 .

233. Comparaison d'un coefficient de self-induction et d'un coefficient d'induction mutuelle.

On veut comparer le coefficient L de self-induction d'une bobine à son coefficient M d'induction mutuelle sur une autre bobine.

Le montage est conforme à la figure 242. L'expérience consiste à équilibrer le pont pour l'état permanent et pour l'état variable.

L'équilibre pour l'état permanent donne la condition :

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2} \quad (1)$$

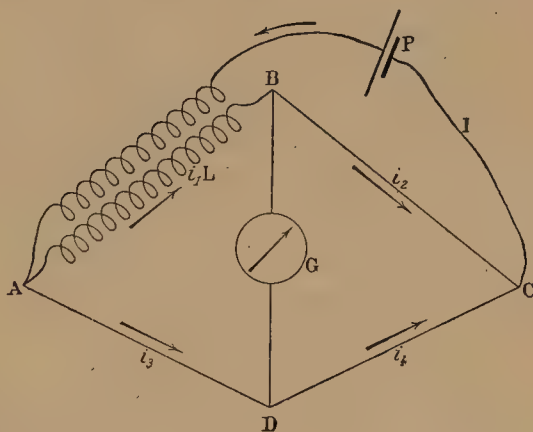


Fig. 242.

Écrivons qu'il ne passe *identiquement* rien dans le galvanomètre *pendant l'état variable*, écrivons donc que les potentiels en B et D sont toujours égaux :

$$i_2 r_2 = i_4 r_4, \quad (1)$$

$$r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - M \frac{dI}{dt} = i_3 r_3.$$

La condition identique : $I = i_1 + i_3$, permet d'écrire :

$$r_1 i_1 + (L - M) \frac{di_1}{dt} = r_3 i_3 + M \frac{di_3}{dt}.$$

Enfin on a identiquement :

$$i_1 = i_2, \quad i_3 = i_4. \quad (3)$$

Il vient aisément :

$$\frac{L - M}{r_1} = \frac{M}{r_3}, \quad \frac{L}{M} = 1 + \frac{r_1}{r_3} = 1 + \frac{r_2}{r_4}.$$

On fera les tâtonnements comme il est dit au paragraphe 229.

Le signe — devant le coefficient M indique qu'il faut établir les connexions entre la pile et la bobine adjacente, de manière que l'induction mutuelle diminue l'effet de la self-induction.

Comparons au paragraphe 229 : l'induction mutuelle produit le même effet que si la self-induction du circuit 1 passait de L à $L - M$, et celle du circuit 3 de 0 à M .

Capacités. Condensateurs.

234. Définition des capacités. Farad.

1°. — Nous ferons la théorie des condensateurs dans la troisième partie de ce cours ; nous en donnerons pour l'instant une définition purement expérimentale, du reste suffisante pour comprendre TOUTES les applications.

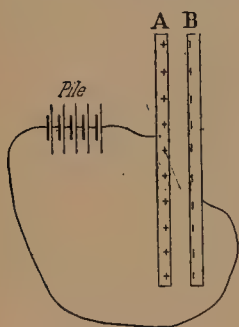


Fig. 243.

Un condensateur se compose de deux feuilles métalliques parallèles (*armatures*) que sépare une couche isolante (air, paraffine, papier paraffiné, liquide isolant tel que le pétrole, ...).

Relions les feuilles aux pôles d'une pile par un circuit contenant un galvanomètre balistique. Dans le galvanomètre passe une quantité d'électricité qui satisfait à la formule :

$$Q = CE,$$

où E est la force électromotrice de la pile, C un paramètre appelé *capacité du condensateur*. On dit que le condensateur s'est chargé.

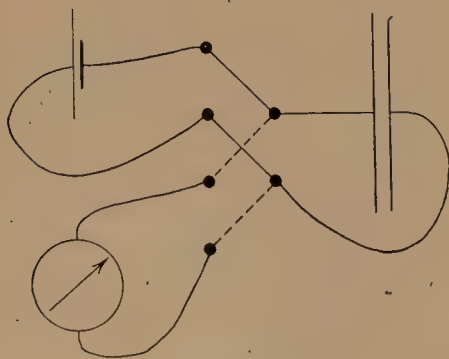


Fig. 244.

Supprimons la pile et relions les armatures du condensateur à travers le galvanomètre ; le condensateur se décharge : le galvanomètre indique le passage d'une quantité d'électricité égale et de signe contraire à la précédente.

On peut se représenter la charge comme le transport d'une quantité Q de matière positive, qui se trouve en plus sur l'armature positive (en communication avec le

pôle positif de la pile), par suite en *moins* sur l'armature *néga-*
tive.

On peut encore imaginer deux courants *simultanés*, l'un portant la quantité $Q : 2$ de matière positive, l'autre portant en sens inverse la quantité $Q : 2$ de matière négative.

Le résultat est évidemment le même.

2°. — D'une manière plus générale, relier les armatures A et B à deux points d'un réseau dont les potentiels sont V_1 et V_2 ($V_1 > V_2$). Les fils de jonction sont parcourus par des courants, à *chaque instant égaux et de même sens*; la quantité totale transportée par chacun d'eux est :

$$Q = \int i dt = C(V_1 - V_2). \quad (1)$$

Le paramètre C étant considéré comme invariable dans les applications (nous généraliserons dans la troisième partie de ce Cours), nous pouvons écrire l'équation différentielle :

$$\frac{dQ}{dt} = i = C \frac{d}{dt} (V_1 - V_2), \quad (2)$$

suivant laquelle les capacités interviendront dans cette première partie du Cours.

2°. — FARAD.

D'après l'équation de définition, l'unité de capacité (*farad*) est celle du condensateur qui contient un coulomb pour une différence de potentiel d'un volt. *Elle est énorme*, à tel point qu'on emploie comme unité pratique son millionième, le *microfarad*.

Le lecteur trouvera, dans la troisième partie de ce Cours, la description des condensateurs industriels et de laboratoire.

235. Comparaison des capacités.

1°. — EMPLOI DU GALVANOMÈTRE BALISTIQUE.

La comparaison des capacités de deux condensateurs au moyen du galvanomètre balistique est la conséquence immédiate de la définition. On les charge successivement avec la même pile à travers le galvanomètre; les quantités d'électricité sont :

$$Q_1 = C_1 E, \quad Q_2 = C_2 E; \quad \text{d'où} \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

On opère aussi par décharge. Un commutateur (§ 69) met successivement les armatures du condensateur en communication avec les pôles de la pile ou les bornes du galvanomètre (fig. 244).

On recommence avec le second condensateur.

Les condensateurs *fuient* toujours plus ou moins; c'est dire que, chargés et abandonnés à eux-mêmes, ils se déchargent spontanément. D'où la nécessité d'opérer sans délai. Du reste, les phéno-

mènes sont beaucoup plus complexes que ne le suppose le schème précédent; mais il nous suffit pour les applications.

2°. — EMPLOI D'UN GALVANOMÈTRE ORDINAIRE.

Au moyen d'un système de contacts montés sur un axe tournant (voir § 230; le lecteur imaginera facilement un dispositif), on envoie dans un galvanomètre ordinaire n fois par seconde le courant de charge ou le courant de décharge du condensateur. L'indication du galvanomètre correspond à un courant constant d'intensité nQ . On étalonne le galvanomètre avec une pile de force électromotrice connue sur des résistances connues. L'unique difficulté est la mesure précise de la vitesse de rotation du commutateur.

3°. — ÉTALONNAGE D'UN GALVANOMÈTRE BALISTIQUE.

Inversement, on étalonne aisément un galvanomètre balistique (§ 222) à l'aide d'une capacité et d'une force électromotrice connues. Par exemple, on charge un microfarad à l'aide de dix éléments Daniell, puis on envoie dans le galvanomètre les dix microcoulombs emmagasinés. La méthode est rapide quand on possède un condensateur convenablement étalonné; il suffit de construire des étalons de force électromotrice (§ 187).

236. Comparaison des capacités au moyen du pont de Wheatstone.

1°. — La figure 245 représente un premier montage.

On ajuste les résistances r_2 et r_4 , de manière que le galvanomètre

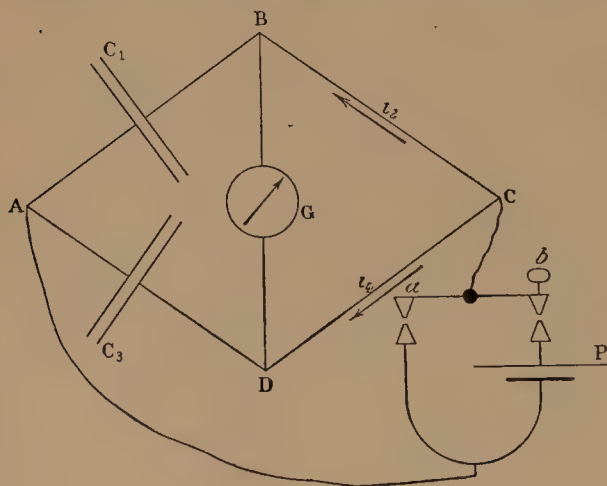


Fig. 245.

ne dévie ni pendant la charge des condensateurs (contact b), ni pendant leur décharge (contact a).

Il en est ainsi si le potentiel B est constamment égal au potentiel D ; les courants i_2 et i_4 satisfont alors identiquement à la relation :

$$i_2 r_2 = i_4 r_4.$$

Toute l'électricité qui passe dans les conducteurs CB et CD devant rester dans les conden-

sateurs, ceux-ci étant chargés par la même différence de potentiel, on a donc, une fois le réglage obtenu :

$$\frac{i_2}{i_4} = \frac{C_1}{C_3} = \frac{r_4}{r_2}, \quad C_1 r_2 = C_3 r_4.$$

2°. — La figure 246 représente un second montage.

On ajuste encore les résistances de manière qu'il ne passe rien dans le galvanomètre.

Les potentiels B et D doivent être égaux ainsi que les courants i_3 et i_4 .

Posons : $i_3 = i_4 = i$.

Le condensateur C_1 est chargé par la différence de potentiel :

$$A - D = ir_3.$$

Le condensateur C_2 est chargé par la différence de potentiel :

$$D - C = ir_4.$$

Or ils doivent contenir la même quantité d'électricité, puisque rien ne passe dans le galvanomètre.

On a donc, une fois le réglage obtenu :

$$C_1(A - D) = C_2(D - C), \quad C_1r_3 = C_2r_4.$$

237. Comparaison d'une self-induction et d'une capacité.

Le montage est indiqué dans la figure 247; il s'agit toujours d'équilibrer un pont de Wheatstone pour l'état permanent et pour l'état variable.

On a la condition :

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2}; \quad (1)$$

à laquelle il faut joindre les équations :

$$i_1r_1 = i_3r_3 + L \frac{di_3}{dt}, \quad (2)$$

$$i_2r_2 = i_4r_4.$$

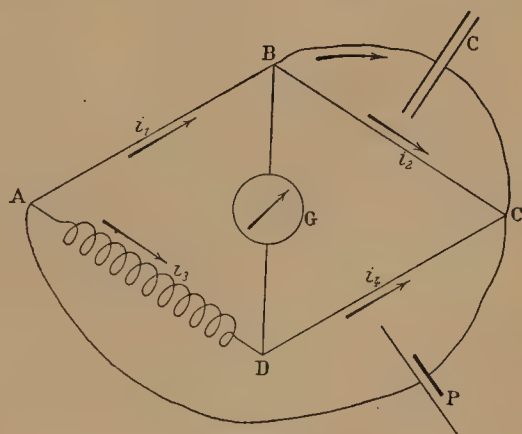


Fig. 247.

L'équation qui exprime l'incompressibilité de l'électricité est encore : $i_3 = i_4$, pour le point D.

Au point B, il faut tenir compte de la présence du condensateur, dont la charge Q à chaque instant est le produit par la capacité de la différence de potentiel r_2i_2 qui existe entre les points B et C.

Soit i le courant de charge du condensateur, on a :

$$i_1 = i + i_2, \quad i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{d}{dt} (i_2 r_2) = Cr_2 \frac{di_2}{dt},$$

$$i_1 = i_2 + Cr_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Ces équations sont satisfaites par la condition :

$$L = Cr_2 r_3 = Cr_1 r_4.$$

Charge et décharge des condensateurs.

338. Charge et décharge d'un condensateur à travers un circuit sans self-induction.

Dans les paragraphes précédents, nous ne nous occupons que de

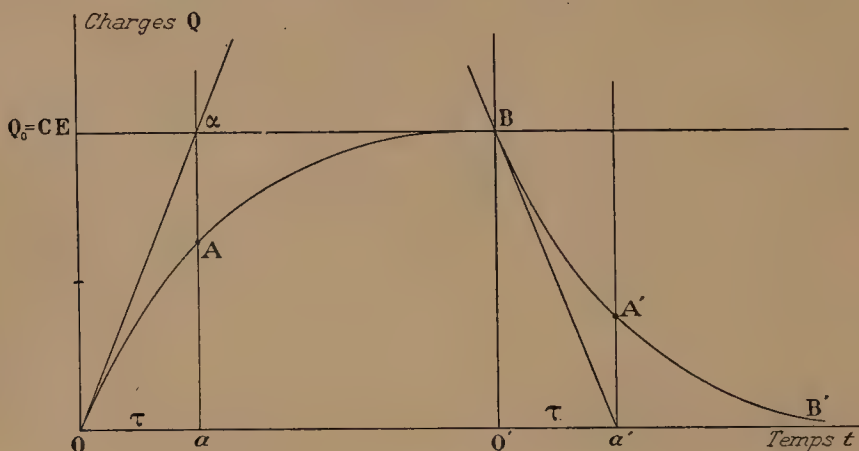


Fig. 248.

la grandeur des charges des condensateurs ; étudions suivant quelles lois s'effectuent la charge et la décharge.

1°. — CHARGE.

Mettons les pôles d'une pile, de force électromotrice E , en communication métallique avec les armatures d'un condensateur.

Soit R la résistance totale du circuit, y compris celle de la pile : nous la poserons constante.

Entre l'intensité du courant de charge actuel et la variation de la charge totale, existe l'équation de définition :

$$dQ = idt.$$

Quand les charges des armatures sont $\pm Q$, le condensateur produit une force contre-électromotrice :

$$V = Q : C.$$

Écrivons l'équation de Kirchhoff :

$$iR = E - \frac{Q}{C}, \quad CR \frac{dQ}{dt} + Q = EC.$$

Intégrons; déterminons la constante par la condition $Q=0$

pour $t=0$:
$$Q = CE \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{CR}\right) \right].$$

La charge croît suivant une fonction exponentielle (fig. 248, courbe OAB).

Posons $\tau = CR$; en vertu d'un raisonnement analogue à celui du paragraphe 204, $\tau = \overline{Oa}$ est le temps nécessaire pour que la charge atteigne les 632 millièmes de sa valeur finale.

On vérifiera que la tangente $O\alpha$ à l'origine passe par le point d'intersection de l'asymptote $Q = CE$, et de la verticale $t = \tau$.

ÉNERGIE CORRESPONDANT A LA CHARGE DU CONDENSATEUR.

Pendant la charge, la pile fournit une quantité d'énergie (§ 125) :

$$W = \int_0^{Q_0} E idt = \int_0^{Q_0} Ri^2 dt + \int_0^{Q_0} \frac{Q idt}{C}.$$

La première intégrale du second membre représente la chaleur abandonnée dans le circuit en vertu de la loi de Joule. La seconde :

$$\int_0^{Q_0} \frac{Q idt}{C} = \int_0^{Q_0} \frac{Q dQ}{C} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0 E}{2}$$

représente donc la quantité d'énergie nécessaire pour charger le condensateur; c'est aussi bien l'énergie potentielle du condensateur chargé. Nous verrons, dans la troisième partie de ce Cours, que cette formule est un cas particulier d'une expression générale.

2°. — DÉCHARGE.

Le condensateur une fois chargé de la quantité $Q_0 = CE$, supprimons la pile et réunissons les armatures à travers un conducteur de résistance R .

L'équation de décharge est :

$$Q = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{CR}\right) = CE \exp\left(\frac{-t}{CR}\right).$$

La courbe $BA'B'$ (fig. 248) est la précédente retournée.

La tangente à l'origine B s'obtient comme précédemment.

Pendant la décharge, on retrouve, sous forme de chaleur abandonnée dans le circuit, l'énergie potentielle $Q_0 E : 2 = Q_0^2 : 2C$.

Les phénomènes de charge et de décharge obéissant aux mêmes lois, nous pouvons nous limiter à l'étude des seconds.

239. Décharge d'un condensateur à travers un circuit possédant de la self-induction.

1°. — Choissant comme positif le sens dans lequel le courant passe au début de la décharge, nous avons l'équation différentielle :

$$Ri = Q : C,$$

lorsque le circuit n'a pas de self-induction.

Quand il en a, nous devons compléter l'équation et écrire :

$$Ri = \frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt},$$

avec la condition (conforme au changement de signe effectué ci-dessus) :

$$idt = -dQ.$$

L'équation à intégrer est donc :

$$(1) \quad L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

La forme de l'intégrale dépend du signe de la quantité :

$$R^2C - 4L = \Delta.$$

2°. — DÉCHARGE APÉRIODIQUE.

Si $\Delta > 0$, si pour une capacité donnée R est grand ou L petit, Q est *apériodique* et de la forme :

$$Q = \exp(-\lambda t) [A \exp(-kt) + B \exp(kt)].$$



Fig. 249.

L'intensité du courant est de même forme; il est nul pour $t=0$ et $t=\infty$.

La tangente à l'origine de la courbe représentative du courant (fig. 249) a pour coefficient angulaire :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2}, \quad \text{pour } t=0,$$

c'est-à-dire pour

$$i=0, \quad \text{ou} \quad dQ : dt = 0.$$

Transportant dans l'équation (1), on trouve :

$$\frac{di}{dt} = \frac{Q_0}{LC}.$$

3°. — DÉCHARGE PÉRIODIQUE.

Si $\Delta < 0$, si la self induction est assez grande ou la résistance assez petite, le phénomène est périodique.

Les oscillations sont isochrones, et leur période est :

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{L^2C}{4L - R^2C}}.$$

Quand la résistance est très petite, l'expression se simplifie ; on a :

$$T = 2\pi\sqrt{CL}.$$

On obtient des courants dirigés tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre ; la décharge est *oscillante*.

L'amplitude des oscillations décroît en progression géométrique.

4°. — EXPÉRIENCES.

Les expériences directes prouvent qu'effectivement la décharge d'un condensateur est oscillante. La méthode consiste à photographier l'étincelle étalée au moyen d'un miroir tournant. Suivant la période de l'oscillation, la rotation du miroir doit être plus ou moins rapide. On a dû la pousser jusqu'à 500 tours par seconde, quand la fréquence atteint 5 millions. L'aspect de l'étincelle présente une alternance qui prouve sa nature oscillatoire.

On trouve ainsi une période *parfaitement définie*, même pour des fréquences énormes ; *mais alors l'amortissement est considérable*. Nous aurons l'occasion de revenir plus longuement sur ces expériences dans la seconde partie de ce Cours.

CHAPITRE XII

ROTATIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET PHÉNOMÈNES D'INDUCTION CONNEXES

Je réunis dans ce chapitre quelques problèmes d'électromagnétisme et d'induction, qui ont un intérêt théorique et serviront d'exercices.

C'est aujourd'hui la mode de mépriser ces expériences : les professeurs de faculté les trouvent au-dessous de leur génie. Quand 100 chevaux ne sont pas en jeu, ça manque, paraît-il, d'intérêt. Pourtant l'étude des cas particuliers est la seule manière de comprendre les lois. A la vérité, parmi ceux qui s'occupent aujourd'hui d'électricité, combien en est-il qui énoncent correctement la loi de Laplace ? Ils préfèrent pérorer sur les ions ou écrire des équations différentielles.

Mais s'il faut étudier ces expériences, c'est dans le détail.

Quant à les citer en passant, avec de belles figures en perspective à l'appui, sans analyse précise des phénomènes, sans discussion, vaut encore mieux n'en rien dire.

240. Rotations électromagnétiques.

Une portion CABD d'un circuit est rendue mobile autour d'un axe ; ses extrémités plongent dans deux rigoles circulaires en cuivre rouge remplies d'une solution de sulfate de cuivre.

On demande le couple auquel elle est soumise, sous l'action d'un aimant que nous réduirons à une masse m positive située en N.

1°. — Appliquons la loi de Laplace.

La force sur l'élément AB est dans un plan normal au champ et à l'élément. Si l'élément AB n'est pas dans un des méridiens de l'appareil, le tableau par exemple, seule est efficace sa composante dans ce plan : nous pouvons donc raisonner comme si le circuit CABD était constitué par la série des projections des éléments sur les méridiens où ils se trouvent. Puisque le phénomène est de

révolution, il est permis de rassembler ces éléments dans un même méridien, ce qui transforme le circuit en une courbe plane.

En définitive, nous pouvons substituer à la courbe gauche donnée

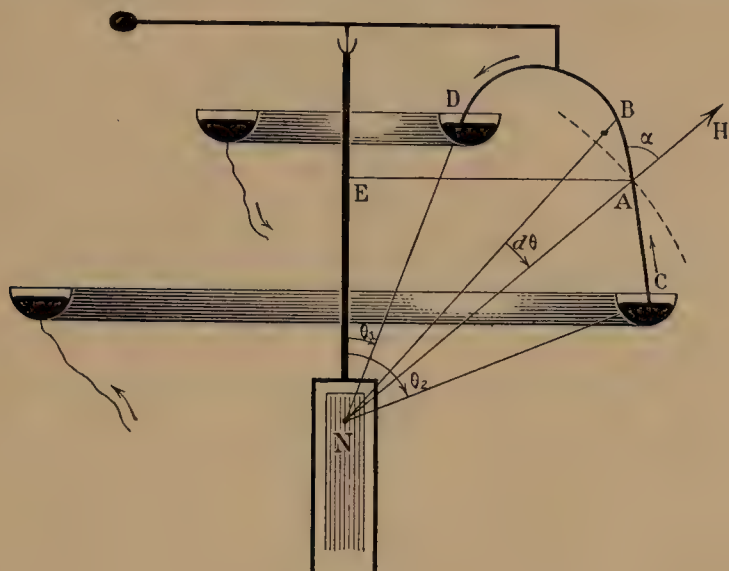


Fig. 250.

la méridienne de la surface de révolution, obtenue en faisant tourner la courbe gauche autour de l'axe.

Nous verrons plus loin la raison concrète de cette substitution.

Soit $\overline{NA} = r$, $\overline{EA} = \rho$.

La force dF et le couple $d\Gamma$ sur l'élément $ds = \overline{AB}$, ont pour expression :

$$dF = H I ds \cdot \sin \alpha = \frac{m I \sin \alpha \cdot ds}{r^2} = m I \cdot \frac{d\theta}{r};$$

$$d\Gamma = m I d\theta \cdot \frac{\rho}{r} = m I \cdot \sin \theta \cdot d\theta.$$

D'où $\Gamma = m I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$.

Le couple ne dépend que de la position des bouts du circuit mobile.

Le travail pour un tour complet est :

$$\mathcal{C} = 2\pi\Gamma = I \cdot 2\pi m (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Dans le cas de la figure 250, le couple n'est pas nul : l'appareil mobile tournera donc indéfiniment dans le même sens.

Une remarque est nécessaire. Dans le cas où l'aimant est supprimé, la position du conducteur mobile n'est pas quelconque. En effet, le courant doit toujours se fermer quelque part ; d'ailleurs, le circuit tend à s'envoyer dans lui-même un flux maximum : le conducteur mobile doit prendre un azimut tel qu'il en soit ainsi.

Il n'est cependant pas impossible de rendre la position du conducteur mobile indifférente. Les rigoles restant en cuivre, on remplit

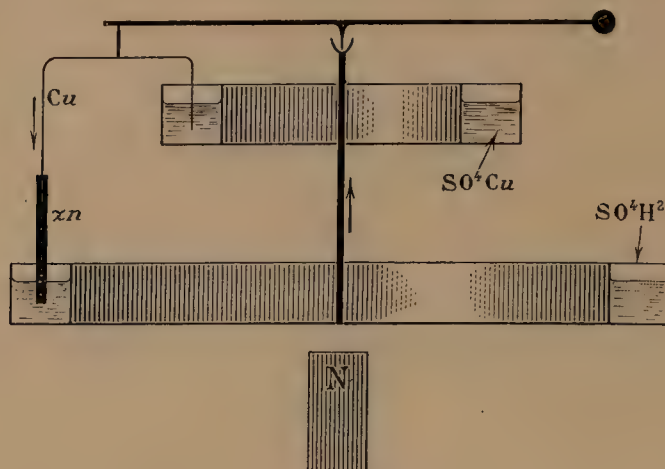


Fig. 251.

l'inférieure d'eau acidulée, la supérieure de sulfate de cuivre. Elles reposent sur des plaques métalliques reliées par une colonne centrale. Le conducteur mobile est mi-partie zinc cuivre; une force électromotrice extérieure devient inutile.

2°. — CAS PARTICULIERS.

Supposons les rigoles de faible rayon de manière que les angles θ_1 et θ_2 soient 0 ou π .

Si les rigoles sont toutes deux au-dessus du pôle, ou toutes deux au-dessous ($\theta_1 = \theta_2 = 0$ ou π), le couple est nul.

Si l'une des rigoles est au-dessus du pôle, l'autre au-dessous ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$), le couple est $2mI$.

Mais on a toujours affaire à un aimant réel, c'est-à-dire à un groupe de masses nord et à un groupe de masses sud.

Le lecteur vérifiera que, dans les cas 1 et 4, le couple résultant est toujours nul.

Dans le cas 2, il est nul si les points d'aboutissement du circuit sont hors des régions où le magnétisme libre est concentré. Dans le cas 3, le couple est indépendant de la distribution des masses libres et égal à $2I\Sigma m$, pourvu que le point inférieur d'aboutissement soit hors des régions où se trouve le magnétisme libre.

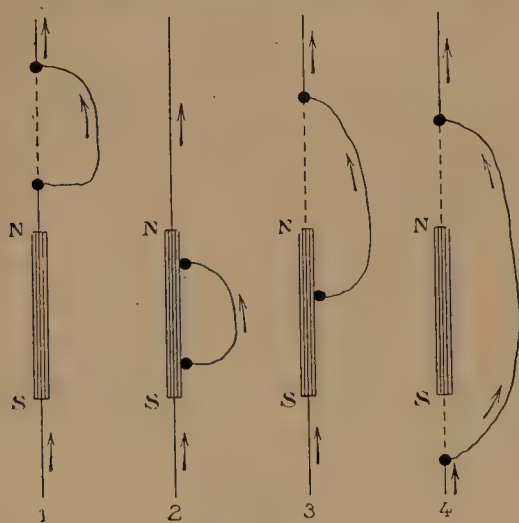


Fig. 252.

3°. — AUTRE MÉTHODE DE CALCUL.

Imaginons qu'en tournant autour de l'axe, le circuit, *généralement gauche*, entraîne une surface élastique qui se fige immédiatement sous forme de révolution. Si le circuit fait n tours plus une fraction, la surface a n nappes superposées plus une fraction.

L'angle solide qui correspond à un angle ψ QUELCONQUE est (§ 23) :

$$\Omega = \psi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

chaque nappe devant être considérée comme intervenant indépendamment des autres.

Or le flux envoyé dans l'angle Ω par la masse m qui se trouve en son sommet est :

$$m\Omega = m\psi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

D'après l'assimilation des courants à des feuilletts, le travail \mathcal{E} et le couple Γ ont pour expressions :

$$\mathcal{E} = mI\psi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \quad \Gamma = mI (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Ce sont les formules trouvées plus haut.

4°. — PHÉNOMÈNES RÉCIPROQUES D'INVERSION.

Remplaçons la pile par un galvanomètre; imprimons au circuit mobile un mouvement de rotation : nous constatons un courant d'induction dans tous les cas où le passage d'un courant suffisamment intense produisait une rotation.

Si la rotation est uniforme, le courant est constant.

241. Substratum des actions électromagnétiques.

1°. — Nous savons qu'un champ magnétique agit sur le circuit dans lequel circule un courant. Nous ne connaissons rien de la nature intime de ce courant (peu importe pour l'instant les théories proposées); c'est uniquement pour nous un phénomène dirigé qui a pour substratum un conducteur.

La question se pose de savoir quelle relation existe entre le conducteur et le courant; autrement dit, le champ magnétique agit-il sur le courant? agit-il sur le conducteur siège du courant?

L'expérience suivante éclaire la nature du problème.

2°. — Une cloche métallique, de forme quelconque, mais de révolution autour de AB, porte à sa partie inférieure une rigole de cuivre qu'on remplit d'eau acidulée avec l'acide sulfurique.

Une seconde cloche métallique, de forme quelconque, mais de révolution autour de AB, est constituée dans sa partie inférieure par un anneau de zinc. Elle peut tourner autour d'un pivot B.

Le système forme une pile de Volta; un courant passe dans le sens des flèches.

Plaçons un aimant comme l'indique la figure, la cloche mobile prend un mouvement de rotation continue dans le sens des aiguilles

d'une montre, pour un observateur placé dans l'axe de l'appareil et au-dessus.

Si le conducteur mobile était *linéaire* (simple pont), l'effet serait le même, que le champ agisse sur le conducteur ou sur le courant.

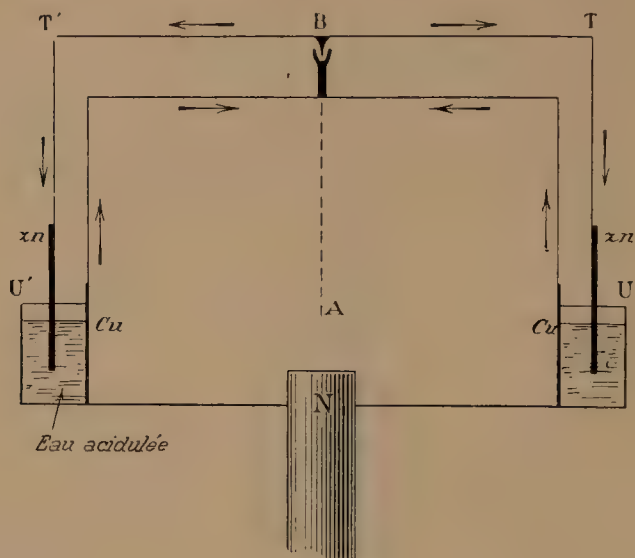


Fig. 253.

Agissant sur le courant, il tend à le déplacer dans le conducteur, ce qui est impossible en raison même de la forme linéaire du conducteur.

3°. — Mais l'expérience réussit avec une cloche mobile.

Si les forces électromagnétiques s'appliquaient au courant, celui-ci aurait pour trajectoires, non plus les méridiennes de la surface de révolution, mais des hélices tracées sur la cloche : il existe bien quelque chose d'analogue (phénomène de Hall). Mais le couple agissant sur la cloche étant certainement peu différent de celui qu'on calcule en supposant nulle l'action *directe* du champ sur le courant, force est d'admettre entre la matière du courant et le conducteur un frottement considérable.

Bref, tout se passe (au moins très approximativement) comme si les forces électromagnétiques agissaient non sur le courant, mais sur le conducteur siège du courant.

4°. — Voici une curieuse modification de l'expérience que nous aurons à interpréter. Employons un aimant cylindrique de section circulaire; montons-le de manière à pouvoir lui imprimer un mouvement de rotation rapide autour de son axe.

La vitesse de rotation de la cloche mobile reste exactement la même quelle que soit la vitesse de rotation de l'aimant et le sens de cette rotation; elle est égale à la vitesse de la cloche pour l'aimant immobile.

L'expérience réussit d'ailleurs quand à la cloche on substitue un pont linéaire.

242. Autres expériences de rotations.

Les expériences suivantes ont la même interprétation

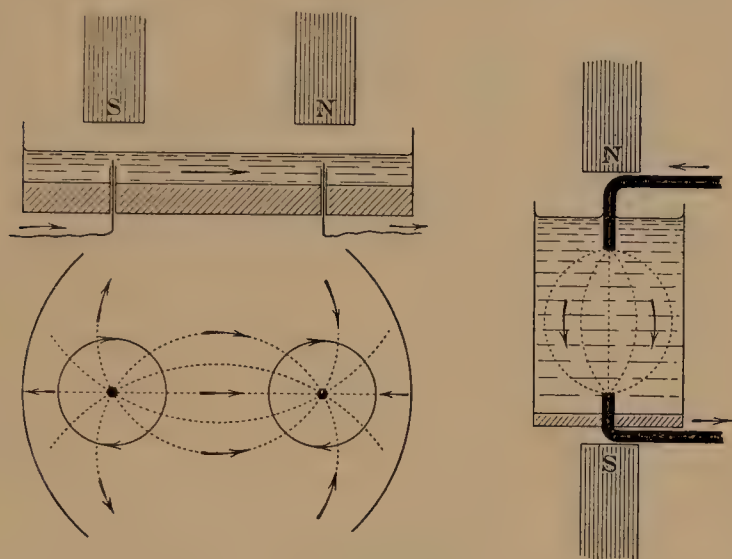


Fig. 254.

1^o. — EXPÉRIENCE DE DAVY (fig. 254, à gauche).

On se sert d'une auge dont les fils traversent la paroi inférieure : ils sont isolés jusque tout près de la surface du liquide (sulfate de cuivre, par exemple ; on utilise aussi le mercure et l'étain fondu).

Quand on établit le courant, le liquide se soulève au-dessus des fils, ce qui est conforme à la tendance des circuits à augmenter, par une déformation convenable, le flux qu'ils s'envoient dans eux-mêmes.

On approche alors les pôles de deux aimants verticaux : le liquide se met à tourner comme l'indique la figure inférieure, conformément aux lois habituelles. Simultanément la surface liquide se creuse sous l'aimant, ce dont on ne voit pas clairement la raison.

2^o. — EXPÉRIENCE DE JAMIN (fig. 254, à droite).

Les électrodes de fer sont disposées verticalement dans le prolongement l'une de l'autre ; le conducteur liquide est une solution de potasse. Des bulles se dégagent sur les électrodes.

Quand on réalise un champ vertical (sensiblement uniforme), on obtient des circulations en sens inverse au voisinage des électrodes. Ce mouvement circulaire se compose avec le mouvement vertical des bulles ; d'où pour celles-ci un mouvement hélicoïdal *dextrorsum* près de l'une des électrodes, *sinistrorsum* près de l'autre.

243. Expériences de Bertin : aimants creux.

On réalise les expériences de rotation avec un appareil qui permet une remarque intéressante.

Le champ H est dû à une bobine B ; il est parallèle à l'axe au voisinage du plan médian de la bobine. Un vase de verre annulaire contient une solution de sulfate de cuivre dans l'eau; les électrodes A, C , sont deux cylindres de cuivre rouge. Le courant se dirige donc radialement à travers l'électrolyte qui se met à tourner dans le sens de la flèche F quand les courants passent; on rend visible la rotation au moyen de petits flotteurs.

Jusqu'ici rien de neuf; sous une autre forme, c'est l'expérience de la roue de Barlow.

Mais interposons un cylindre de fer entre la bobine et le liquide :

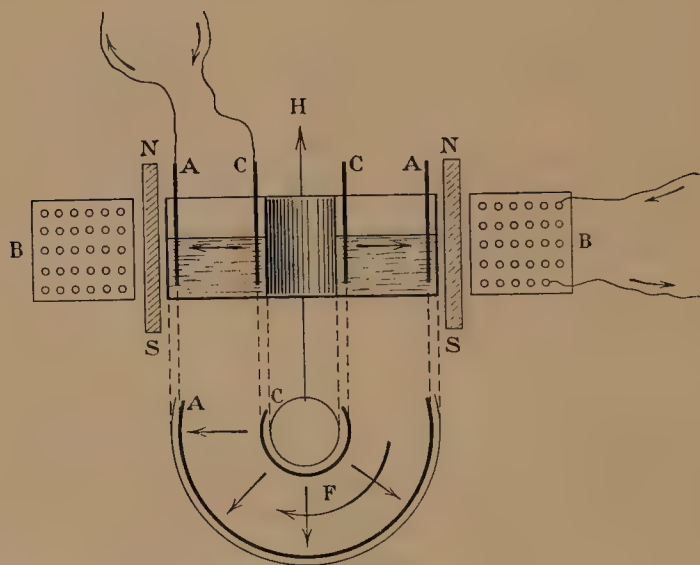


Fig. 255.

la vitesse de rotation du liquide diminue; elle s'annule même si le cylindre est assez épais.

Cette expérience montre l'opposition entre une bobine et un aimant creux.

Le champ à l'intérieur d'une bobine est égal à l'induction à travers la masse polarisée équivalente; il est de sens contraire au champ créé par le magnétisme libre de cette masse. D'où résulte que dans l'espace intérieur commun, le champ de l'aimant creux et le champ de la bobine sont opposés; ils sont de même sens dans l'espace extérieur commun.

Avec un cylindre de fer de masse considérable, on intervertirait le sens de rotation.

244. Entraînement du champ d'un aimant.

1°. — Nous arrivons à un des problèmes les plus curieux et les plus contestés de l'Électromagnétisme : *l'entraînement du champ d'un aimant dans le déplacement de cet aimant.*

Pour utile que soit la considération des lignes de force, il ne faut pas les matérialiser. Elles correspondent à des déformations de l'éther ayant l'aimant pour cause. Dire que les lignes de force se déplacent, c'est dire que les déformations de l'éther ne restent pas indéfiniment les mêmes, en chaque point de l'espace. Réciproquement, il est impossible de dire que les lignes se déplacent si les déformations de l'éther demeurent identiquement les mêmes.

De ces prémisses découle la solution du problème posé par Faraday et résolu par lui dans le sens que nous adoptons ici.

Quand un aimant subit un mouvement de translation, il emporte avec lui son champ magnétique. Cela signifie qu'en des points placés toujours de même par rapport à lui, *par suite de position variable dans l'espace*, le champ conserve la même direction et la même intensité. Le système des lignes de force matérialisées est donc animé du même mouvement de translation que l'aimant. Nous laissons pour l'instant de côté la différence (négligeable) qui provient de la vitesse finie de propagation des phénomènes magnétiques.

Supposons qu'un aimant, de révolution quant à sa forme et quant à la distribution du magnétisme libre, tourne autour de son axe. En tout point de l'espace, la direction et l'intensité du champ restent invariables; *on énonce le fait en disant que le champ est immobile.*

Pour soutenir l'opinion contraire, il est nécessaire de montrer ce qui permettrait à un observateur placé en un point du champ de déceler le mouvement de ce champ, que, jusqu'à présent et du consentement unanime, nous posons complètement défini par sa direction et son intensité, par hypothèse invariables.

La même question se présente à propos d'un circuit circulaire ou d'un solénoïde cylindrique circulaire tournant autour de leurs axes. Il n'est même pas nécessaire pour le champ intérieur que le solénoïde soit de section circulaire, pourvu qu'il tourne autour d'un axe parallèle à ses génératrices, puisque le champ intérieur loin des bouts resté uniforme et de direction invariable.

2°. — Remarquons d'abord qu'aussi bien dans l'hypothèse des lignes de force immobiles que dans celle des lignes de force entraînées, le courant induit dans un circuit fermé immobile est nul. Dans le premier cas, les forces électromotrices élémentaires (à leur supposer une existence objective) sont identiquement nulles; dans le second cas, elles se compensent : le nombre total des lignes de forces coupées à chaque instant par tous les éléments est évidemment nul.

Il ne faut pas conclure de là que les deux hypothèses conduisent

nécessairement au même résultat : c'est vrai le plus souvent, mais pas toujours.

Imaginons un globe conducteur, qui contient un aimant de révolution

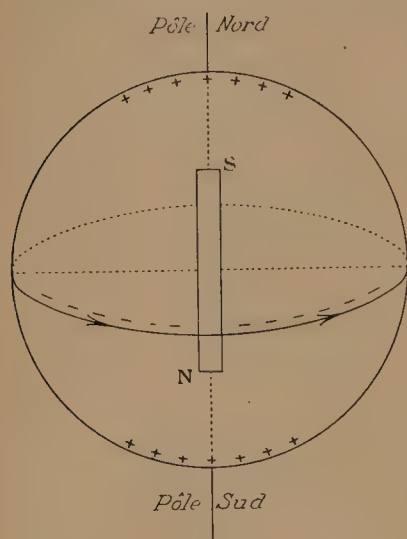


Fig. 256.

suivant un de ses diamètres et tourne autour de l'axe de cet aimant (la Terre réalise approximativement l'énoncé). D'après Faraday, tout se passe comme si le champ était immobile. Or, par hypothèse, la sphère est mobile : d'où une force électromotrice d'induction chargeant positivement les pôles et négativement l'équateur (fig. 256).

Dans l'hypothèse inverse, le globe reste à l'état neutre.

Ainsi Faraday admet qu'un système, se déplaçant en bloc et soustrait à tout champ d'origine extérieure, peut être le siège de forces électromotrices d'induction. Les tenants de la théorie

adverse posent, au contraire, qu'il ne peut naître de forces électromotrices d'induction que s'il y a mouvement relatif des parties du système soustrait à tout champ d'origine extérieure.

3°. — Que le lecteur comprenne l'importance de cette discussion, qui n'est pas du tout de mandarins : c'est l'idée même de la ligne de force qui est en jeu. Le problème se pose avec une netteté particulière pour un aimant de révolution tournant autour de son axe ; mais il subsiste pour un aimant qui n'est pas parfaitement de révolution. Faut-il matérialiser les lignes de force, se les représenter comme des fils tendus allant d'une masse libre *bien déterminée* à une autre masse libre *non moins bien déterminée* ? Faut-il n'y voir qu'une manière d'exprimer les déformations de l'éther ? Dans le premier cas, tout le champ d'un aimant qui n'est pas de révolution se déplace ; dans le second, le déplacement du champ ne porte que sur la différence entre le champ réel et le champ de révolution.

Quelles que soient les objections que comporte l'hypothèse de Faraday, on en revient toujours à prier les tenants de la théorie adverse de dire à quoi ils reconnaissent qu'un champ uniforme et de direction constante (par exemple) subit une translation (solénoïde tournant autour d'une parallèle à ses génératrices).

Le raisonnement qui suit : *enlevons la moitié de l'aimant de révolution ; ce qui reste subit un mouvement de translation, par suite entraîne son propre champ ; donc le tout entraîne son propre champ*, ne vaut rien. Il y a opposition, non pas entre la rotation et la trans-

lation, mais entre le cas où existe une variation dans l'intensité et la direction du champ, et celui où l'intensité et la direction demeurent invariables.

4°. — L'hypothèse de Faraday conduit à de singulières conséquences, ce qui du reste n'est pas une raison de la rejeter.

Un disque (voir fig. 230) tourne devant un aimant immobile : son centre et sa périphérie se chargent statiquement en sens inverses. L'aimant tourne devant le disque immobile : celui-ci reste à l'état neutre. Donc le phénomène dépend des mouvements *absolus* ; les effets diffèrent malgré l'identité des mouvements relatifs. Reste à savoir précisément ce qu'il faut entendre par un mouvement relatif.

245. Rotation indéfinie d'un aimant.

Le courant ne traverse pas l'aimant.

1°. — Utilisons l'appareil représenté figure 257.

Deux aimants parallèles sont liés à un axe métallique, reposant à sa partie inférieure dans une crapaudine noyée dans du mercure. Le

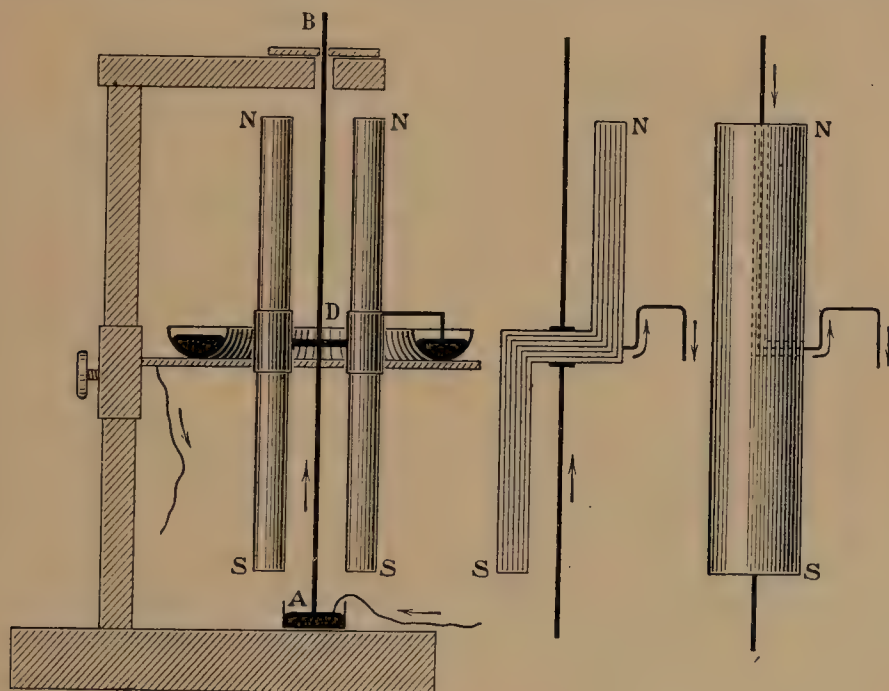


Fig. 257.

courant arrive par l'axe et sort par une rigole fixée pleine de mercure située vers le milieu de l'aimant ; cette dernière condition, du reste, n'est posée que pour obtenir le phénomène le plus intense.

Supprimons les aimants ; étudions *directement* (spectre magnétique, oscillation d'une petite aiguille aimantée) le champ dans l'espace où la rotation permettra aux portions de l'aimant portant

le magnétisme libre de circuler. Dans l'espace de circulation des masses N, nous trouvons un champ (faible) *dont les lignes ne se ferment pas dans cet espace*; au contraire, l'espace de circulation des masses S est un champ (beaucoup plus intense) *dont les lignes se ferment dans cet espace*; il ressemble au champ d'un courant rectiligne indéfini dirigé suivant AB.

Les aimants sont remis en place; l'équipage tourne indéfiniment (dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé sur l'axe au-dessus de l'appareil), avec une vitesse qui dépend de l'intensité i du courant et des frottements. Tout se passe comme si deux pôles S se déplaçaient dans le champ d'un courant rectiligne indéfini; nous ne faisons là qu'énoncer le résultat de l'expérience sur lequel tout le monde est d'accord.

Le travail total par tour est :

$$\mathcal{C} = 4\pi mi,$$

où m est la somme des masses libres nord ou sud.

Le couple moyen est : $\Gamma = 2mi$.

Personne ne discute ce résultat quantitatif.

2°. — Les divergences d'opinion se montrent quand il s'agit de choisir une loi *élémentaire*.

Un pôle d'aimant n'existe pas plus qu'un *élément isolé de courant*; nous n'avons jamais affaire qu'à un aimant contenant des quantités égales et de signes contraires de magnétisme libre et qu'à un *courant fermé*. Mais, comme outil mathématique, nous pouvons isoler les pôles et séparer le circuit en ses éléments. Nous savons qu'une infinité de lois, portant sur les éléments du circuit, permettent de calculer, en un point occupé par du magnétisme libre, des forces élémentaires *dont l'intégrale est parfaitement déterminée*. Ces forces élémentaires, nous pouvons même, sans modifier l'effet résultant, les supposer appliquées au pôle ou appliquées à l'élément : nous introduisons ainsi des couples dont la somme est nulle pour tout circuit fermé (§ 83).

Si tout le monde faisait bon marché de savoir, parmi ces lois élémentaires, quelle est la vraie, à *supposer qu'elle existe*, il n'y aurait pas de contestation. On dispute parce que (à tort ou à raison, peu nous importe) on veut discerner parmi l'infinité des lois élémentaires, équivalentes au total.

Revenons à notre cas particulier.

3°. — Utilisons la loi de Biot et Savart; d'après elle, l'action prédominante sur l'aimant SN est due à la portion AD du courant; ce qui signifie, non pas que les forces exercées sont effectivement réparties comme cette loi l'indique, mais que nous obtiendrons un résultat, *au total exact*, en appliquant cette loi. Or, d'après elle, seules les portions du courant voisines des pôles interviennent.

Bien entendu, il vaut mieux choisir une loi élémentaire conforme aux résultats de la loi intégrale. L'expérience montre que les actions d'un circuit sur un pôle éloigné de toutes ses parties sont négligeables; autrement dit, que nous pouvons, sans modifier l'action sur le pôle, changer la disposition des parties éloignées du circuit. Certes, nous pouvons imaginer des lois élémentaires faisant intervenir notablement ces portions éloignées, redonnant cependant la loi intégrale correcte. Il est évidemment préférable de la choisir (celle de Biot et Savart ou tout autre analogue) fournissant des actions nulles pour les éléments très éloignés. Ce serait folie d'introduire des actions élémentaires qui manifestement disparaissent de l'intégrale.

4°. — L'expérience réussit avec un aimant seul, mais l'appareil n'est pas équilibré. On utilise parfois un aimant *coudé*.

Enfin on peut employer une masse magnétique compacte. L'expérience conserve la même théorie, si l'on prend soin d'isoler dans cette masse le conducteur qui transmet le courant. La figure 247 à droite suppose que le courant entre par en haut; la rotation a le même sens que précédemment, puisque le courant passe en sens inverse, mais agit sur un pôle de nom contraire.

246. Cas où les rotations indéfinies ne peuvent se produire.

Une rotation indéfinie nécessite une production de travail. Il ne peut en être ainsi quand le système se compose d'un aimant et d'un circuit fermé *qui lui est rigidement lié*. Dans bien des cas, on prévoit immédiatement les phénomènes en faisant apparaître un tel circuit par adjonction de deux circuits très voisins où circulent des courants égaux et de sens contraires; ce qui est légitime.

Par exemple, le système représenté dans la figure 258 à droite ne tourne pas indéfiniment autour de AF, à quelque hauteur qu'aboutissent sur l'aimant les conducteurs BC, DE. En effet, nous pouvons remplacer le circuit réel par le circuit fermé BCDE, EB, invariablement lié à l'aimant, et par le circuit rectiligne indéfini : AB, BE, EF. Or ce dernier ne peut entretenir une rotation continue (§ 240).

247. Rotation indéfinie d'un aimant de révolution.

Le courant peut traverser l'aimant qui est de révolution autour de l'axe de rotation.

1°. — Nous venons de voir (§ 245, 4°) que si le courant passe axialement dans un conducteur isolé, le couple qui produit la rotation de l'aimant (de révolution autour de l'axe de rotation) est :

$$\Gamma = 2mi.$$

Prenons le cas extrême opposé : le courant passe dans un conduc-

Sur le magnétisme libre $2\pi r\sigma \cdot dr$ agit seule la portion du courant qui se trouve dans le cylindre de rayon r . D'où un couple :

$$d\Gamma = 2\pi r\sigma \cdot dr \cdot 2i(r^2 : R^2).$$

En effet, le bras de levier est r ; mais l'action du courant $i(r^2 : R^2)$ contenu dans le cylindre de rayon r , est la même que s'il était concentré sur l'axe, par conséquent en raison inverse de r .

Le couple créé par unité de magnétisme est donc :

$$2i(r^2 : R^2),$$

d'où
$$\Gamma = \int_0^R d\Gamma = \pi R^2 \sigma i = mi,$$

où m est la masse libre totale.

Pour rendre possible l'intégration, nous supposons le magnétisme libre uniformément réparti dans la section droite (σ constant).

2°. — Revenons sur un point délicat.

Soit un système formé d'un circuit *fermé* et d'un aimant; les hypothèses fondamentales impliquent l'égalité de l'action et de la réaction entre l'aimant et le courant dans le circuit *fermé*. Supposons le système formé de deux parties mobiles autour du même axe. Maintenons l'une immobile, supposons qu'alors l'autre tourne indéfiniment autour de l'axe. *Il résulte de ce qui précède que, si nous maintenons la seconde immobile, la première tournera en sens inverse.*

Par exemple, maintenons immobiles les électros d'une dynamo : l'anneau tourne. Maintenons immobile l'anneau : les électros tendent à tourner en sens inverse.

Le résultat énoncé au 1° semble aller contre ces propositions : l'aimant qui fait tourner la cloche, ne tend pas à tourner lui-même; autrement dit, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction ne s'applique pas entre l'aimant et la cloche. Mais il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi, car la cloche ne représente qu'une portion du circuit total.

L'expérience prouve que l'aimant ne tend pas à tourner sous l'influence de ce circuit total; la contradiction n'existerait que si le circuit total tendait à tourner en bloc autour de l'aimant. Comme il n'y a pas de raison de douter des lois intégrales, de ce que la cloche tourne dans un sens, nous pouvons conclure que le reste du circuit tend à tourner en sens contraire.

C'est, en d'autres termes, ce que nous disons plus haut au sujet des forces élémentaires et de leur point d'application.

3°. — En définitive, nous admettons une distribution du courant; les théorèmes sur les nappes de courant (§ 143) permettent de calculer le champ qui leur est dû. Nous admettons une distribution du magnétisme, enfin nous calculons le couple exercé sur lui par le champ précédemment obtenu. Nous ne tenons compte que des por-

tions du courant les plus rapprochées; nous avons expliqué plus haut de quel droit.

Tout ce qui précède subsiste si nous remplaçons la cloche par un fil unique, ou si nous noyons dans l'aimant un conducteur *excentré isolé*.

Il est clair que le courant rectiligne indéfini i , extérieur à l'aimant,

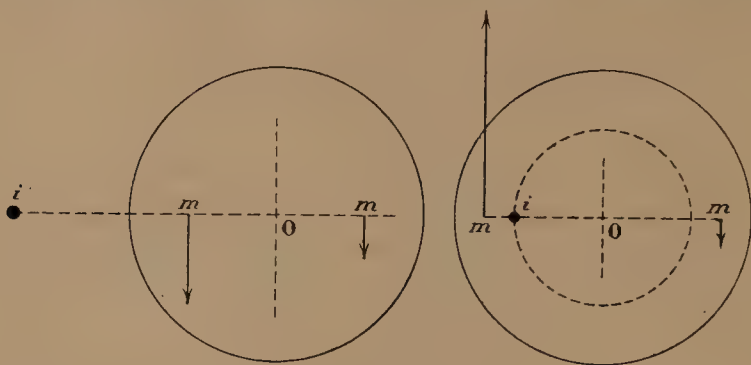


Fig. 259.

ne tend pas à le faire tourner autour de son axe O (fig. 259 à gauche), tandis que le courant intérieur tend à faire tourner la partie de l'aimant qui se trouve hors du cylindre d'axe O et passant par lui (fig. 259, à droite).

4°. — Reprenons l'expérience avec l'équipage du milieu de la figure 258. Rendons la cloche solidaire de l'aimant; le système tout entier se met à tourner dans le même sens que la cloche lorsque celle-ci est libre.

Dans le système d'explication de Faraday, le champ de l'aimant est fixe, même quand celui-ci tourne; le couple exercé sur la cloche ne dépend donc pas de la rotation de l'aimant. Mais la cloche et l'aimant sont liés; donc celle-ci entraîne celui-là.

Ce système d'explication doit aussi convenir quand le courant passe dans l'aimant (fig. 258, à gauche). Nous avons calculé le couple en posant que le courant agit sur le magnétisme; nous devons pouvoir le calculer en posant que le champ magnétique *immobile* agit sur le courant qui traverse l'aimant; celui-ci est par suite entraîné (§ 241).

248. Induction unipolaire.

Un aimant cylindrique circulaire est enfilé axialement sur un arbre de laiton; une vis permet de l'en rendre solidaire. L'arbre est mis en rotation par un petit moteur actionnant une poulie P.

1°. — Supposons l'aimant solidaire de l'arbre. Le circuit d'un galvanomètre G contient deux contacts glissants C et D; le premier appuie sur l'aimant plus ou moins loin du second.

La rotation crée un courant d'induction; c'est l'expérience réciproque de l'expérience de rotation étudiée au paragraphe 240.

Quand on déplace le contact C vers la gauche, le courant n'est d'abord pas changé; pour un déplacement suffisant, il diminue; il s'annule enfin lorsque le circuit fermé est tout entier hors de l'aimant.

Le phénomène s'explique immédiatement en admettant (§ 244) que les lignes de force du champ d'un aimant de révolution, tournant autour de son axe, sont immobiles. Les divers éléments du cylindre mobile coupent alors ces lignes, d'où résultent des forces électromotrices d'induction toutes dirigées dans le même sens.

Le phénomène s'explique du reste aussi bien en supposant le champ entraîné; l'induction porte maintenant sur la partie fixe du circuit, partie qui contient le galvanomètre.

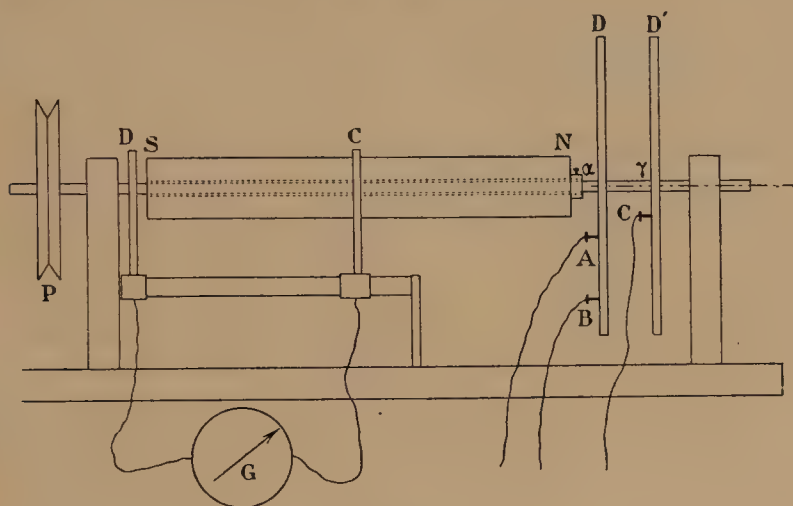


Fig. 260.

Les contacts glissants s'échauffent et produisent des forces électromotrices thermoélectriques. Pour les éliminer, on fait successivement l'expérience avec des rotations en sens inverses; les forces électromotrices d'induction changent de sens, tandis que les forces thermoélectriques conservent le même sens.

2°. — Utilisons la partie droite de l'appareil.

Deux disques D et D' de cuivre ou de laiton sont entraînés par la rotation de l'aimant. On touche, avec des contacts glissants fixes reliés au galvanomètre, deux points A, B, d'un rayon de l'un des disques, ou deux points A, C, pris sur des rayons parallèles dans les deux disques.

Généralement le galvanomètre décèle un courant d'induction.

Pour le système d'explication admis, la force électromotrice induite est due à l'intersection des lignes de force *immobiles* du champ, par l'élément mobile AB dans le premier cas, par les deux éléments

mobiles $A\alpha$, $C\gamma$, dans le second. Pour connaître le sens et la grandeur relative du courant, on cherchera quel est, *somme toute*, le nombre des lignes de force coupées par AB , ou quelle est la différence des nombres de lignes de force coupées par $A\alpha$ et $C\gamma$. Dans ce dernier cas, en effet, les forces électromotrices d'induction qui sont de même sens absolu sont de sens inverses par rapport au circuit.

3°. — Enfin voici l'expérience historique de Faraday.

Désolidarisons l'arbre et l'aimant; maintenons l'aimant fixe : *pour les mêmes positions des contacts glissants, les courants d'induction ont exactement les mêmes intensités que dans le second cas; les phénomènes sont les mêmes, que l'aimant tourne ou qu'il ne tourne pas.*

Ce résultat va de soi dans l'hypothèse admise; *mais l'expérience s'explique également dans l'hypothèse inverse des lignes de force entraînées*; elle n'est pas cruciale, comme on l'a pensé longtemps. Une expérience, qui s'interprète également bien dans deux hypothèses contradictoires, vaut qu'on s'arrête un instant.

Nous venons de voir qu'elle s'interprète dans l'hypothèse des lignes de force non entraînées; montrons qu'il en est de même dans l'hypothèse des lignes de force entraînées.

Quand l'aimant tourne, l'induction se produit sur tout le circuit du galvanomètre, *moins* l'élément AB qui participe à la rotation; quand l'aimant est immobile, l'induction ne se produit que sur l'élément AB . Donc le courant a même intensité dans les deux cas.

Il a aussi même sens. En effet, quand l'aimant tourne, les lignes de force coupent un élément immobile, en allant, par exemple, de l'avant à l'arrière du tableau; quand l'aimant est immobile, c'est maintenant l'élément qui va de l'avant à l'arrière : le mouvement relatif des lignes de force est devenu de l'arrière à l'avant.

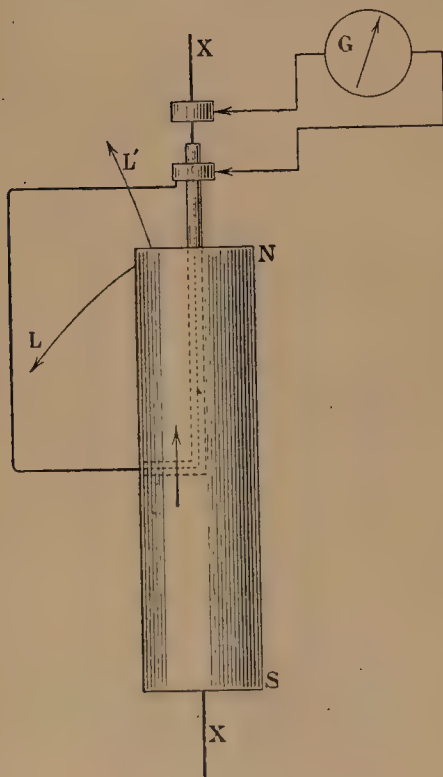


Fig. 261.

249. Expérience de Faraday.

La curieuse expérience suivante forcera le lecteur à méditer sur l'opposition des flux de force et d'induction.

Un conducteur isolé est noyé dans l'axe d'un aimant qu'on peut mettre en rotation autour de cet

axe même. Il se continue extérieurement par un circuit rigide. Les extrémités du circuit aboutissent à deux bagues sur lesquelles appuient deux contacts glissants en relation avec un galvanomètre sensible.

Pour la commodité de la construction, l'aimant était constitué par deux aimants prismatiques entre lesquels était serré le conducteur.

Quand le système tourne, aucun courant n'est induit.

Pourtant si l'on admet l'immobilité du champ, le conducteur *extérieur* en coupe les lignes de force, L , L' , par exemple; d'où une force électromotrice induite. Mais, simultanément, le conducteur *intérieur* non axial coupe des lignes d'induction de sens inverse et de nombre égal : d'où une force électromotrice *égale et opposée*.

La conclusion résulte immédiatement de la nullité du flux d'induction à travers une surface fermée quelconque : dans l'espèce, à travers la surface de révolution décrite par le conducteur tout entier.

CHAPITRE XIII

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURANTS ALTERNATIFS

Nous étudierons principalement dans ce chapitre les propriétés des courants alternatifs *sinusoïdaux*. Tout courant périodique peut être considéré comme la superposition de tels courants. Cela ne veut pas dire qu'un courant périodique quelconque produise, nécessairement et dans tous les cas, un effet égal à la somme des effets dus séparément aux courants sinusoïdaux en lesquels il peut être décomposé. L'équivalence exige que les équations où interviennent les courants soient linéaires.

Cette condition est souvent réalisée, ce qui légitime l'importance attachée aux courants alternatifs sinusoïdaux ; d'autant qu'on s'efforce de construire les machines de manière à les obtenir tels.

250. Formules usuelles. Valeurs moyennes, valeurs efficaces.

1°. — FORMULES USUELLES.

Dans l'étude des courants alternatifs, on utilise fréquemment les formules suivantes faciles à vérifier :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t + \alpha) dt &= \frac{T}{\pi} \cos \alpha. & \int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega t + \alpha) dt &= \frac{T}{4}, \\ \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cos \omega t dt &= 0. & \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2(\omega t + \alpha) dt &= \frac{T}{4}, \\ - \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cos(\omega t + \alpha) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t + \alpha) \cos \omega t dt = \frac{T}{4} \sin \alpha. \\ \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \sin(\omega t + \alpha) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \omega t \cos(\omega t + \alpha) dt = \frac{T}{4} \cos \alpha. \end{aligned}$$

ω est la *pulsation*.

$T = 2\pi : \omega$ est la *période*.

$N = 1 : T$ est la *fréquence*.

On remarquera que toutes ces intégrales, la première exceptée, ont la même valeur entre les limites 0 et $T:2$ et entre les limites $T:2$ et T .

2°. — VALEURS MOYENNES.

Soit T la période d'une fonction i du temps.

La valeur moyenne est définie par l'intégrale :

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^T i dt.$$

Pour obtenir les courants induits, on déplace périodiquement des bobines dans un champ; elles reviennent à la fin de la période dans

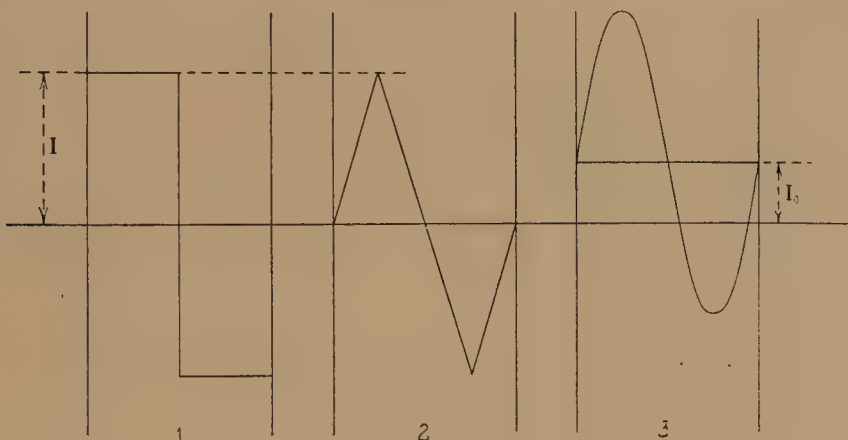


Fig. 262.

la position initiale. D'où résulte que la variation totale du flux est nulle. Si la résistance du circuit est invariable, les valeurs moyennes de l'intensité et de la force électromotrice sont nulles (§ 228).

On peut définir les valeurs moyennes pour une demi-période :

$$I_m = \frac{2}{T} \int_t^{t+T:2} i dt.$$

La valeur trouvée dépend du temps t à partir duquel on fait le calcul.

Supposons la fonction i sinusoïdale et calculons à partir du zéro de cette fonction :

$$i = I \sin \omega t, \quad I_m = \frac{2I}{T} \int_0^{T:2} \sin \omega t dt = \frac{2I}{\pi} = 0,636I.$$

3°. — VALEURS EFFICACES.

On appelle *valeur efficace* d'une quantité périodique la racine carrée du carré moyen de cette quantité (§ 127) :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Si la fonction i est sinusoïdale :

$$i = I \sin \omega t,$$

on trouve : $I_{\text{eff}} = I : \sqrt{2} = 0,707 \cdot I.$

Le lecteur calculera aisément les valeurs efficaces pour les trois fonctions représentées dans la figure 262.

Cas 1 : $I_{\text{eff}} = I;$

Cas 2 : $I_{\text{eff}} = I : \sqrt{3} = 0,577 I.$

Le courant sinusoïdal est intermédiaire.

Enfin, pour le courant *ondulé* 3, on a :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_0^2 + 0,5 I^2}.$$

251. Définitions et notations.

1°. — FORCE ÉLECTROMOTRICE APPLIQUÉE.

On appelle *force électromotrice appliquée* e_a à un circuit fermé ou à une portion de circuit, la résultante de toutes les forces électromotrices imposées de l'extérieur à ce circuit fermé ou à cette portion de circuit. Nous poserons :

$$e_a = E_a \cos(\omega t - \varphi).$$

C'est généralement la donnée du problème, *au moins quand il s'agit d'un circuit fermé* (§ 262).

La manière la plus simple d'obtenir un courant alternatif exactement sinusoïdal consiste à faire tourner uniformément une bobine dans un champ uniforme. Soit H la composante du champ normalement à l'axe de rotation, S la surface totale de la bobine dont nous supposons les spires parallèles : la force électromotrice induite est sinusoïdale ; sa valeur maxima est proportionnelle à HS (§ 226). Pour recueillir le courant, le fil de la bobine aboutit à deux bagues isolées enfilées sur l'axe, sur lesquelles frottent deux lames métalliques.

Ceci posé, des bobines 1, 2, 3, ... en série forment un circuit fermé. Elles tournent avec la *même* vitesse *constante* dans des champs H_1, H_2, H_3, \dots . D'où résultent des forces électromotrices sinusoïdales e_1, e_2, e_3, \dots décalées les unes par rapport aux autres (§ 262).

La force électromotrice e_a sinusoïdale, résultante des forces e_1, e_2, e_3, \dots (voir § 254), est par définition la force électromotrice appliquée.

Coupons le circuit précédent ; soient A et B les extrémités du fil. Branchons-les sur un secteur alternatif, de manière à imposer entre A et B la force électromotrice :

$$e = E \cos(\omega t - \beta).$$

Nous appelons maintenant force électromotrice appliquée au circuit ouvert AB, la résultante des forces électromotrices : e, e_1, e_2, e_3, \dots

2°. — FORCES ÉLECTROMOTRICES DE RÉACTION.

A ces forces électromotrices imposées de l'extérieur s'ajoutent les forces électromotrices qui proviennent de la réaction du fil.

On appelle *force électromotrice de self-induction ou de capacité* et on désigne par les symboles :

$$e_s = E_s \sin(\omega t - \chi), \quad e_c = E_c \sin(\omega t - \psi),$$

la somme des forces électromotrices aux divers points du circuit qui résultent des phénomènes de self-induction ou de l'existence de capacités.

3°. — FORCE ÉLECTROMOTRICE EFFECTIVE.

On appelle enfin *force électromotrice effective* la résultante de toutes les forces électromotrices; elle est mesurée par le produit ri .

On a :

$$ri = e_a + e_s + e_c.$$

L désigne le coefficient de self; C la capacité; $T = 2\pi : \omega$, la période; la fréquence $1 : T$ est le nombre de périodes à la seconde.

La *réactance* est la quantité : $k = L\omega - \frac{1}{C\omega}$.

L'*impédance ou résistance apparente* est la quantité : $Z = \sqrt{r^2 + k^2}$.

252. ÉCHAUFFEMENT D'UN CONDUCTEUR, puissance dépensée dans un circuit. Facteur de puissance.

1°. — ÉCHAUFFEMENT D'UN CONDUCTEUR.

Que le courant i soit constant ou variable, on admet que la chaleur dégagée pendant le temps dt dans un circuit de résistance r est (§ 124) :

$$dQ = ri^2 dt.$$

Un courant alternatif sinusoïdal d'intensité maxima I dégage donc la même quantité de chaleur qu'un courant continu d'intensité :

$$I_{eff} = 0,707 \cdot I.$$

Par exemple, une lampe à incandescence construite pour un courant continu de $0^a,6$, donne la même intensité lumineuse pour un courant alternatif dont l'intensité passe d'une valeur nulle à la valeur maxima : $\pm 0^a,6 \times 1,41 = \pm 0^a,85$.

Construite pour 120 volts continus, elle doit subir à ses bornes une force électromotrice alternative efficace de 120 volts, c'est-à-dire une force électromotrice variant de 0 à ± 169 volts.

2°. — PUISSANCE MOYENNE ABSORBÉE DANS UN CIRCUIT.

On admet comme applicables aux courants variables les formules vérifiées pour les courants constants (§ 125).

Soit e la différence de potentiel périodiquement variable imposée aux extrémités d'un circuit dans lequel passe un courant d'intensité

périodiquement variable i ; la puissance absorbée dans le circuit est :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt.$$

Posons : $e = E \cos \omega t$, $i = I \cos(\omega t - \varphi)$;

il vient : $W = \frac{1}{2} EI \cos \varphi.$

formule qu'on peut écrire :

$$W = E_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi;$$

$\cos \varphi$ est le *facteur de puissance*.

On divise le courant en *courant watté* et en *courant déwatté*.

On a :

$$i = I \cos(\omega t - \varphi) = I \cos \varphi \cdot \cos \omega t + I \sin \varphi \cdot \sin \omega t = i' + i''.$$

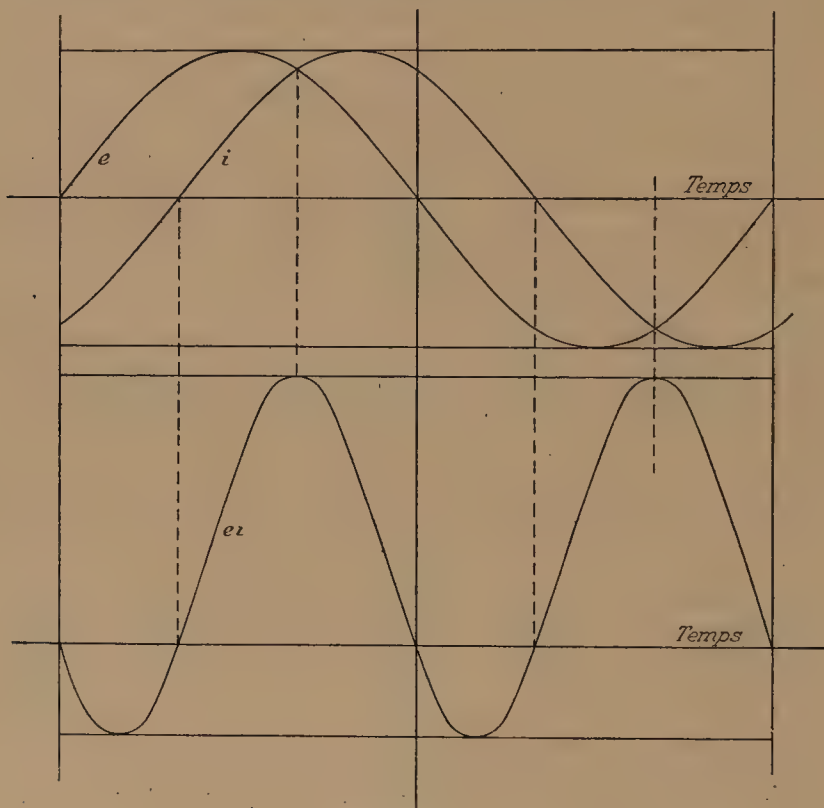


Fig. 263.

i' , en concordance de phase avec la force électromotrice, est le *courant watté*. Toute la puissance peut être considérée comme provenant de lui.

i'' , en quadrature avec la force électromotrice, produit un travail nul; c'est le *courant déwatté*.

3°. — PUISSANCE ABSORBÉE A CHAQUE INSTANT.

On a :

$$ei = EI \cdot \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \frac{EI}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi].$$

La puissance à chaque instant est donc représentée par la somme d'une quantité sinusoïdale et d'une constante. La valeur moyenne de la quantité sinusoïdale pour une période est nulle; la valeur moyenne de la constante est cette constante même : nous retrouvons le résultat énoncé ci-dessus (fig. 263).

REMARQUE ESSENTIELLE. — Sauf les cas où φ vaut $n\pi : 2$ (n entier), le circuit absorbe de la puissance pour une fraction de la période, en restitue pour la fraction complémentaire; il se conduit alternativement comme moteur (énergie absorbée) ou comme générateur (énergie fournie).

La figure 263 montre que la puissance est de période moitié moindre que les vecteurs qui la composent.

253. Problème fondamental.

Une force électromotrice sinusoïdale est appliquée à un circuit possédant de la self-induction.

Posons : $e_a = E_a \cos \omega t$, $i = I \cos(\omega t - \varphi)$.

L'équation différentielle *linéaire* à satisfaire est :

$$e_a = ri + L \frac{di}{dt}.$$

Substituons et identifions; il vient les conditions :

$$E_a \cos \omega t = rI \cos(\omega t - \varphi) - LI\omega \sin(\omega t - \varphi);$$

$$E_a = rI \cos \varphi + LI\omega \sin \varphi,$$

$$0 = rI \sin \varphi - LI\omega \cos \varphi.$$

D'où $I = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} = \frac{E_a}{Z}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{r} = \frac{k}{r}$.

L'angle φ est certainement compris entre 0 et $\pi : 2$.

Le courant induit est en retard sur la force électromotrice appliquée : ses zéros et ses maximums se produisent un certain temps, inférieur à un quart de période, après ceux de cette force électromotrice.

La quantité $k = L\omega$ joue le rôle d'une sorte de résistance; d'où son nom de *réactance*. L'intensité maxima I se déduit de la force électromotrice maxima E_a à l'aide d'une formule analogue à celle d'Ohm; l'impédance : $Z = \sqrt{r^2 + k^2}$, y remplace la résistance.

La réactance et l'impédance sont fonction de la fréquence ou de la période.

Récrivons les formules fondamentales :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{k}{Z}, \quad \cos \varphi = \frac{r}{Z};$$

$$E_a \sin \varphi = Ik, \quad E_a \cos \varphi = Ir, \quad I = \frac{E_a}{Z}.$$

254. Règle de Fresnel.

1°. — On a souvent à additionner des mouvements vibratoires de même période, présentant des différences de phases.

Soit à faire la somme des quantités :

$$a = A \cos(\omega t - \alpha), \quad b = B \cos(\omega t - \beta), \quad c = C \cos(\omega t - \gamma), \dots$$

On a identiquement :

$$A \cos(\omega t - \alpha) + B \cos(\omega t - \beta) + \dots = R \cos(\omega t - \rho).$$

On développe et l'on écrit que les coefficients de $\sin \omega t$ et de $\cos \omega t$ sont égaux; d'où les conditions :

$$A \sin \alpha + B \sin \beta + \dots = R \sin \rho,$$

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + \dots = R \cos \rho.$$

Élevons au carré et ajoutons membre à membre :

$$R^2 = \sum A^2 + 2 \sum AB \cos(\alpha - \beta). \quad (1)$$

Divisons membre à membre :

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sum A \sin \alpha}{\sum A \cos \alpha}. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) fournissent les valeurs de R et de ρ .

2°. — L'interprétation géométrique de ce calcul est connue sous le nom de *règle de Fresnel*.

A partir d'une demi-droite de référence quelconque OX , décrivons

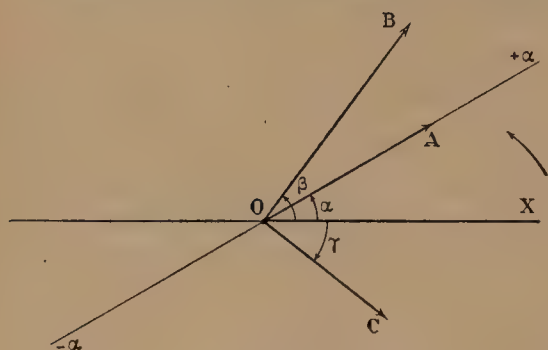


Fig. 264.

dans le sens de la flèche f (arbitrairement choisi) des angles égaux à α, β, \dots supposés positifs; autrement dit, *portons les retards dans le sens f arbitrairement choisi*.

S'ils sont négatifs, (si par suite ils représentent des *avances*), on les décrit en sens inverse de la flèche f .

Portons dans la direction $(O, +\alpha)$ définie par l'angle α , une longueur proportionnelle à A , si A est positif; portons-la en sens inverse, dans la direction $(O, -\alpha)$, si A est négatif.

Nous définissons ainsi des vecteurs OA , OB , ... qui représentent en grandeur et direction les groupes de quantités A , α ; B , β ; ...

Composons ces vecteurs : le vecteur résultant représente les quantités cherchées R , ρ , puisque ses projections, $R \cos \rho$, $R \sin \rho$, sur les axes de coordonnées sont égales par construction à la somme sur les mêmes axes des projections des vecteurs composants.

Les conditions (1) et (2) sont satisfaites.

3°. — Nous supposons dans ce qui précède que les mouvements sont donnés par des cosinus; nous verrons au paragraphe 256 la raison de ce choix.

Admettons que l'un d'eux se présente sous la forme :

$$A \sin (\omega t - \alpha),$$

on a :

$$\sin (\omega t - \alpha) = \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\omega t - \alpha) \right] = \cos \left(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

On construit donc le vecteur en sinus comme un vecteur en cosinus, puis on le fait tourner de 90° dans le sens positif.

4°. — Soit un mouvement :

$$a = A \cos (\omega t - \alpha).$$

Figurons la vitesse :

$$\frac{da}{dt} = -A\omega \sin (\omega t - \alpha).$$

Il résulte de la règle précédente, que ce second vecteur est représenté par le vecteur figuratif de a , multiplié par ω et tourné de 90°

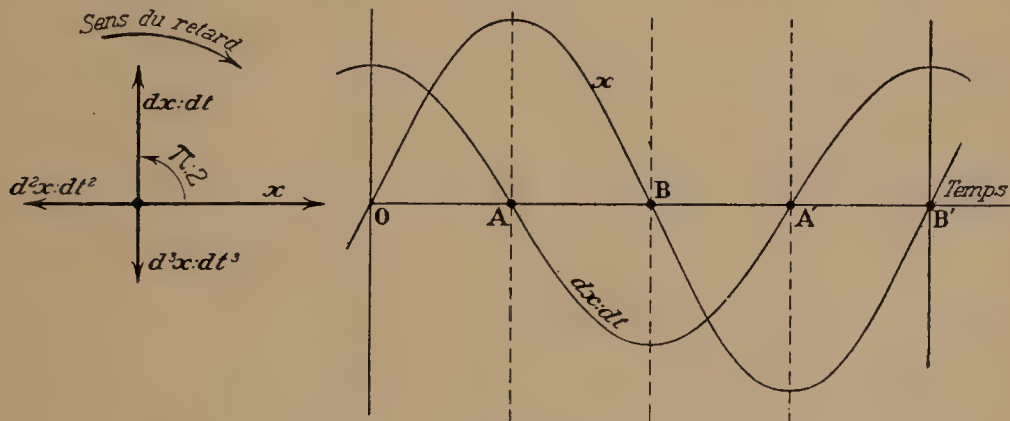


Fig. 265.

dans le sens des *avances*, si l'on veut, dans le sens inverse des *retards*.

Figurons l'accélération :

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -A\omega^2 \cos (\omega t - \alpha).$$

Elle est représentée par le vecteur figuratif de a , multiplié par ω^2 et changé de sens. L'accélération se déduit de la vitesse, comme celle-ci se déduit du vecteur a .

Du reste, la figure 265 montre immédiatement que le vecteur *vitesse* $dx : dt$, est en avance de $\pi : 2$ sur le vecteur x ; par suite, le vecteur *accélération* en avance de $\pi : 2$ sur le vecteur *vitesse*; et ainsi de suite.

5°. — Voici un corollaire de la Règle de Fresnel fréquemment utilisé en Électricité et en Optique. Des vecteurs tous égaux, symétriquement disposés autour du point O, ont une résultante nulle.

D'où résulte la nullité des deux sommes suivantes :

$$\sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \sin \left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0.$$

$$\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0.$$

255. Application du problème fondamental.

1°. — Nous avons à représenter les quantités :

$$e_a = E_a \cos \omega t, \quad i = I \cos (\omega t - \varphi),$$

avec les conditions :

$$I = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}.$$

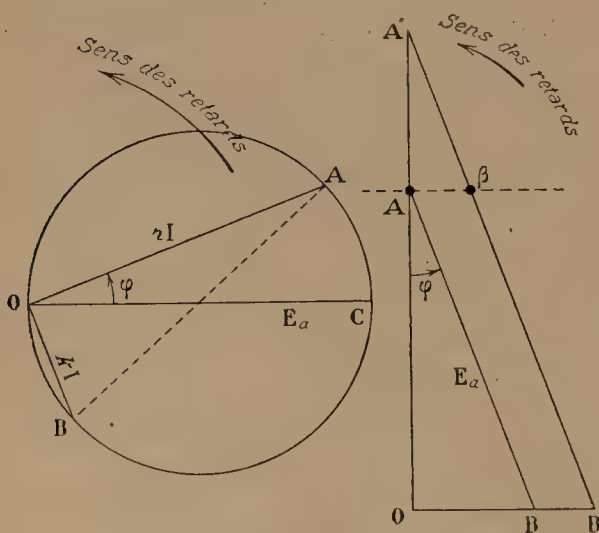


Fig. 266.

En raison de l'équation :

$$e_a = ri + L \frac{di}{dt},$$

nous devons chercher deux vecteurs OA, OB, rectangulaires, disposés l'un par rapport à l'autre comme l'indique la figure 266; le rapport connu de leurs modules est $k : r = \operatorname{tg} \varphi$; la somme des carrés de ces modules est E_a^2 .

Le problème est immédiatement résolu.

Il suffit, par exemple, de mener sur deux droites rectangulaires les longueurs $\overline{OA'}$ et $\overline{OB'}$ dans le rapport connu $\operatorname{tg} \varphi$, puis de construire un triangle *semblable* dont l'hypoténuse égale :

$$E_a = \overline{B'\beta} = \overline{BA}.$$

2°. — PUISSANCE.

Nous savons que la puissance est :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt = \frac{1}{2} E I \cos \varphi.$$

Au facteur 1 : 2 près, c'est donc le *produit scalaire* des vecteurs \overline{OA} et \overline{OC} .

Menons parallèlement à \overline{OA} et \overline{OC} des vecteurs $\overline{O\alpha}$, $\overline{O\gamma}$, dont les modules soient $\sqrt{2}$ fois plus petits; ils représentent l'intensité et la force électromotrice efficaces. La puissance est le produit scalaire de ces vecteurs efficaces.

256. Emploi des imaginaires.

1°. — L'emploi des imaginaires pour représenter les fonctions harmoniques a été systématisé par Cauchy.

Le procédé consiste à ajouter à la fonction harmonique une partie imaginaire qui simplifie les calculs. Ceux-ci effectués, on laisse de côté la partie imaginaire de la solution; on ne conserve que la partie réelle. Pour que le procédé soit correct, il faut n'introduire la quantité complexe que dans des équations différentielles linéaires, à coefficients constants et réels (ce qui est toujours le cas dans les applications qui suivent), et ne jamais multiplier deux quantités complexes entre elles. Nous verrons plus loin comment on se tire d'affaire dans le calcul de la puissance.

Nous remplaçons donc l'expression :

$$\begin{aligned} a &= A \cos(\omega t - \alpha), \quad \text{par :} \quad a = A[\cos(\omega t - \alpha) + j \sin(\omega t - \alpha)] \\ &= A \exp j(\omega t - \alpha) = A \exp j\omega t \cdot \exp(-j\alpha). \end{aligned}$$

où $j^2 = -1$. On a immédiatement :

$$\frac{da}{dt} = jA\omega \exp j\omega t \cdot \exp(-j\alpha),$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -A\omega^2 \exp j\omega t \cdot \exp(-j\alpha).$$

2°. — RÉSOLUTION DU PROBLÈME FONDAMENTAL. IMPÉDANCE IMAGINAIRE.

Il n'est pas légitime, sans démonstration préalable, d'user des imaginaires dans un produit.

Une règle permet de résoudre le problème fondamental par l'introduction d'une impédance imaginaire.

Soit : $e_a = E \exp j\omega t,$

la force électromotrice appliquée. Le courant dans un circuit de

résistance r et de réactance k est donné par la loi d'Ohm, à la condition d'utiliser l'impédance imaginaire :

$$r + jk : \\ i = \frac{e_a}{r + jk} = \frac{E \exp j\omega t}{r^2 + k^2} (r - jk).$$

Développons et conservons seulement les quantités réelles :

$$i = \frac{E}{Z^2} (\cos \omega t + j \sin \omega t) (r - jk) = \frac{E}{Z^2} (r \cos \omega t + k \sin \omega t)$$

$$i = \frac{E}{Z} \cos (\omega t - \varphi),$$

en vertu des relations de la fin du paragraphe 253. Dorénavant nous appliquerons cet artifice sans nouvelle démonstration.

3°. — EXPRESSION DE LA PUISSANCE.

Soient $e_a = E \exp j\omega t \cdot \exp(-j\varphi_1)$, $i = I \exp j\omega t \cdot \exp(-j\varphi_2)$, les expressions de la force électromotrice appliquée et du courant.

Au facteur 2 près, nous trouvons le facteur de puissance en changeant dans l'une de ces expressions j en $-j$, en faisant le produit, enfin en prenant la partie réelle :

$E \exp j\omega t \cdot \exp(-j\varphi_1) \times I \exp(-j\omega t) \exp(j\varphi_2) = EI \exp j(\varphi_2 - \varphi_1)$, dont la partie réelle est :

$$EI \cos (\varphi_2 - \varphi_1).$$

La démonstration de cette règle résulte du calcul même ; tout ce qu'on ajoute prouve une ignorance fondamentale des principes même du calcul des imaginaires.

257. Obtention d'un champ en retard de $\pi : 2$ sur la force électromotrice appliquée.

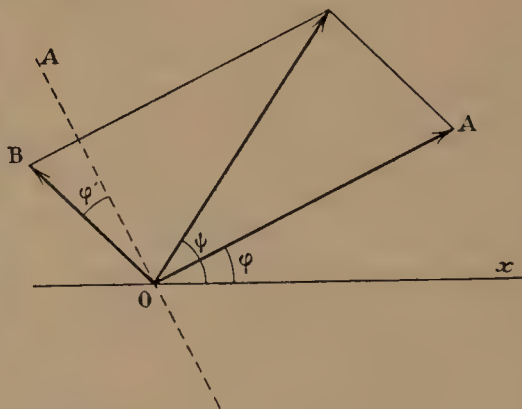
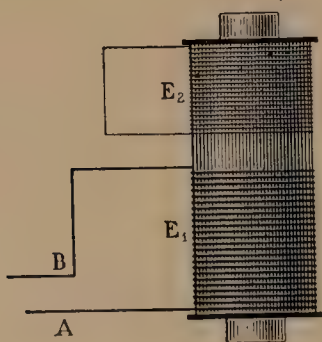


Fig. 267.

Un noyau de fer porte deux enroulements : E_1 branché sur la force électromotrice dont on dispose, E_2 en court-circuit.

On demande l'effet de E_2 sur la phase du champ produit par le noyau; autrement dit, l'effet de E_2 sur l'aimantation du noyau.

Portons suivant Ox le vecteur représentatif de la force électromotrice appliquée.

Le vecteur représentatif du courant dans E_1 est dirigé suivant OA , en retard de φ sur la force électromotrice appliquée; le même vecteur OA représente aussi bien le champ créé par ce courant :

$$i_1 = I_1 \cos(\omega t - \varphi).$$

Il induit dans l'enroulement E_2 un courant représenté par :

$$i_2 = I_2 \sin(\omega t - \varphi),$$

si l'on néglige le décalage dû à la self de E_2 . En effet, quand i_1 décroît, i_2 est de même sens. Quand $\omega t - \varphi$ varie de 0 à $\pi : 2$, il faut donc que i_2 soit positif : c'est bien ce qu'indique la formule.

Le courant i_2 , par suite le champ qui en résulte, sont donc représentés par un vecteur dirigé suivant OA (§ 254, 3°).

En tenant compte du retard qui provient de la self de E_2 , on a :

$$i_2 = I_2 \sin(\omega t - \varphi - \varphi').$$

Le vecteur qui représente le courant i_2 , par suite le champ qui en résulte, est dirigé suivant OB .

En définitive, le champ total fait avec Ox un angle ψ toujours plus grand φ .

D'où le corollaire : *il est possible avec quelques tours E_2 en court-circuit d'amener le champ en quadrature exacte avec la force électromotrice appliquée.*

258. Répulsion de deux bobines.

1°. — Considérons comme positifs dans les deux bobines les courants qui passent dans le sens des flèches F .

Le coefficient d'induction mutuelle M est, par définition, le flux envoyé positivement (sens de la flèche f) dans la bobine 2, quand le courant unité traverse la bobine 1, ou dans la bobine 1 quand le courant unité traverse la bobine 2.

Si les bobines sont assujetties à conserver le même axe, M est une fonction de la distance x de leurs plans moyens.

La force électromotrice appliquée à la bobine 2 est égale à la variation du flux envoyé par la bobine 1; en grandeur et en signe, elle est représentée par :

$$e_a = -M \frac{di_1}{dt}.$$

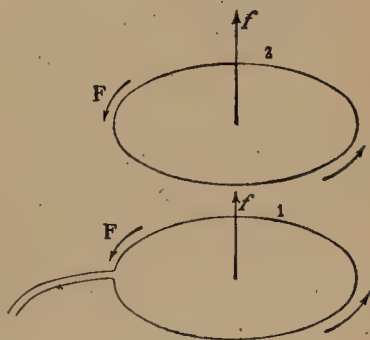


Fig. 268.

Quand i_1 est positif et croît, il naît une force électromotrice qui produirait un courant de sens contraire dans la bobine 2; on a :

$$e_a < 0.$$

Comme M est positif, il faut bien le signe — dans la formule.

La force électromagnétique qui s'exerce entre les bobines est dirigée suivant l'axe des bobines et égale à :

$$F = \frac{\partial M}{\partial x} i_1 i_2.$$

Cette formule est conforme à la règle générale (§ 80); montrons que le signe est convenable.

Des courants de même signe s'attirent.

La force F attractive doit être négative, puisque, sur la droite le long de laquelle les distances sont comptées, elle est dirigée dans le sens des x décroissants. Il revient au même de dire que Fdx , qui représente le travail des actions électromagnétiques, doit être positif pour un rapprochement, c'est-à-dire pour une variation dx négative.

Mais dans un rapprochement, M , qui est positif, croît; autrement dit, $\partial M / \partial x$ est négatif : la formule est donc correcte.

2°. — Soit : $i_1 = I_1 \sin \omega t$; on a :

$$e_a = -MI_1 \omega \cos \omega t.$$

D'après le paragraphe 254, i_2 est de la forme :

$$i_2 = -I_2 \cos(\omega t - \varphi),$$

où I_2 est une constante positive et φ un angle compris entre 0 et $\pi/2$. Donc F est de la forme :

$$F = -\frac{\partial M}{\partial x} I_1 I_2 \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi).$$

La force moyenne a pour expression :

$$\frac{1}{T} \int_0^T F dt = -\frac{\partial M}{\partial x} \frac{I_1 I_2}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = -\frac{\partial M}{\partial x} \frac{I_1 I_2}{2} \sin \varphi.$$

x représentant la distance entre les circuits, $\frac{\partial M}{\partial x} < 0$; donc la force moyenne est positive, puisque $\sin \varphi > 0$: elle est dirigée vers les x croissants; c'est une *répulsion*.

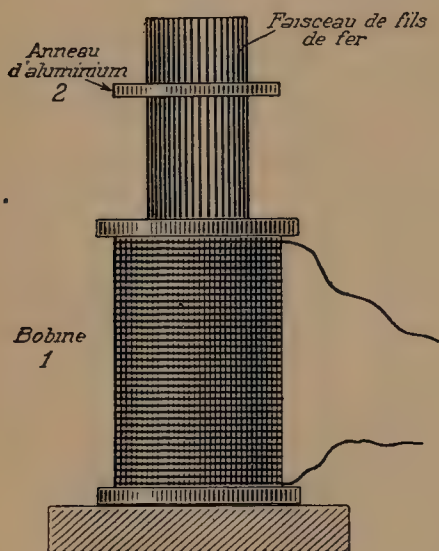


Fig. 269.

Cette répulsion est facile à mettre en évidence, en introduisant un faisceau de fils de fer dans l'axe des deux bobines; on augmente ainsi la valeur du coefficient M (strictement il cesse d'être possible de parler d'un coefficient d'induction mutuelle, § 229) sans modifier l'allure du phénomène.

L'expérience réussit très bien en disposant verticalement un faisceau de fils de fer entouré sur moitié de sa hauteur d'un enroulement servant de bobine inductrice 1. Des anneaux d'aluminium, entourant sans frottement le faisceau de fils de fer, jouent le rôle de bobine induite 2; ils sont maintenus *soulevés* quand on envoie un courant alternatif dans l'enroulement.

3°. — On démontre sans calcul l'existence d'une répulsion.

Soit $O_1A_1B_1C_1D_1E_1$ la sinusoïde qui représente le courant inducteur i_1 en fonction du temps. A un facteur constant près, le courant

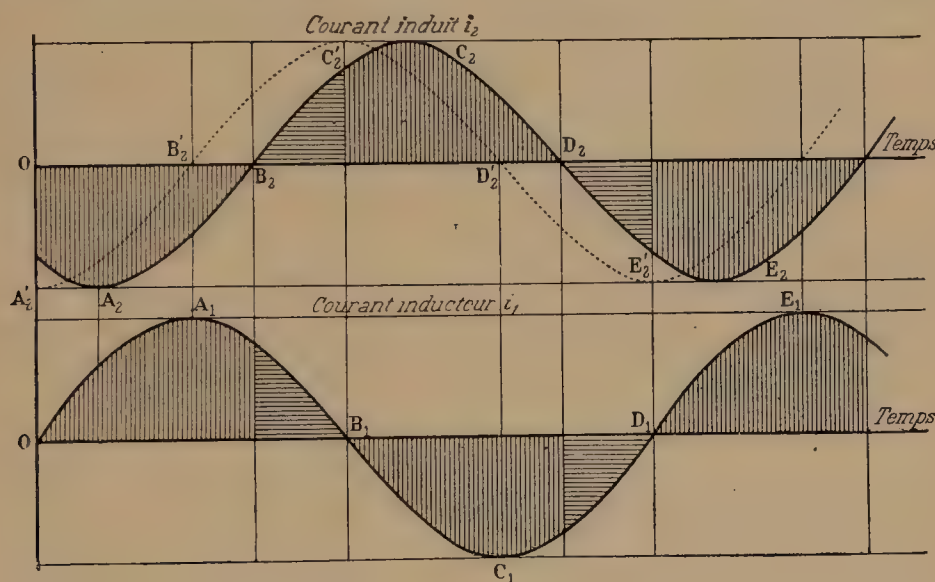


Fig. 270.

induit i_2 serait représenté par la sinusoïde pointillée $A_2'B_2'C_2'...$, s'il n'était pas décalé par rapport à la force électromotrice appliquée.

En effet, quand le courant i_1 croît à partir de 0, sa variation, par conséquent la variation du flux envoyé dans la bobine induite, sont maxima : le courant i_2 est maximum et dirigé en sens inverse de i_1 .

Quand i_1 est maximum, i_2 est nul.

Quand i_1 décroît, i_2 croît; et ainsi de suite.

Comme le décalage est un *retard* compris entre 0 et $\pi : 2$, le courant induit est représenté, à un facteur constant près, par la sinusoïde pleine $A_2B_2C_2...$ déplacée de $B_2'B_2$ vers les temps positifs. Ombrons verticalement les aires des deux sinusoïdes pour lesquelles les courants i_1 et i_2 sont de sens contraires (par conséquent se

repoussent); ombrons horizontalement les aires pour lesquelles les courants sont de même sens (par conséquent s'attirent).

Il est évident que les répulsions l'emportent sur les attractions.

Si le décalage était une *avance*, le résultat serait inverse.

4°. — On peut énoncer les mêmes propositions en usant de la représentation vectorielle. Des courants alternatifs i_1 et i_2 , passant

dans des bobines parallèles, s'attirent si leurs vecteurs représentatifs font un angle inférieur à $\pi : 2$.

En effet, soit :

$$i_1 = I_1 \cos \omega t,$$

$$i_2 = I_2 \cos (\omega t - \psi),$$

l'expression des courants. La force moyenne (attractive) est proportionnelle à :

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = \frac{I_1 I_2}{2} \cos \psi,$$

qui est positive quand ψ est compris entre $-\pi : 2$ et $+\pi : 2$.

Dans l'expérience d'Elihu Thomson, les courants i_1 et i_2 sont reliés par l'équation :

$$r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (1)$$

Nous savons (§ 254, 4°)

que les vecteurs x et $dx : dt$ sont disposés comme l'indique la figure 271. En vertu de l'équation (1), le vecteur résultant des vecteurs $r_2 i_2$ et $L_2 (di_2 : dt)$ doit faire équilibre au vecteur $M (di_1 : dt)$. D'où la disposition indiquée.

L'angle ψ des vecteurs i_1 et i_2 est donc nécessairement supérieur à $\pi : 2$; d'où la répulsion.

259. Règle générale.

1°. — Les calculs précédents ne supposent rien de particulier dans la disposition des circuits inducteur et induit. La force suivant la variable x est donc de signe contraire à $\partial M : \partial x$; elle est, par conséquent, dirigée dans le sens pour lequel le coefficient d'induction mutuelle diminue. D'où la règle générale suivante : *les déplacements tendent à se faire de manière que les courants induits soient minimums.*

Voici des corollaires utilisés dans les applications.

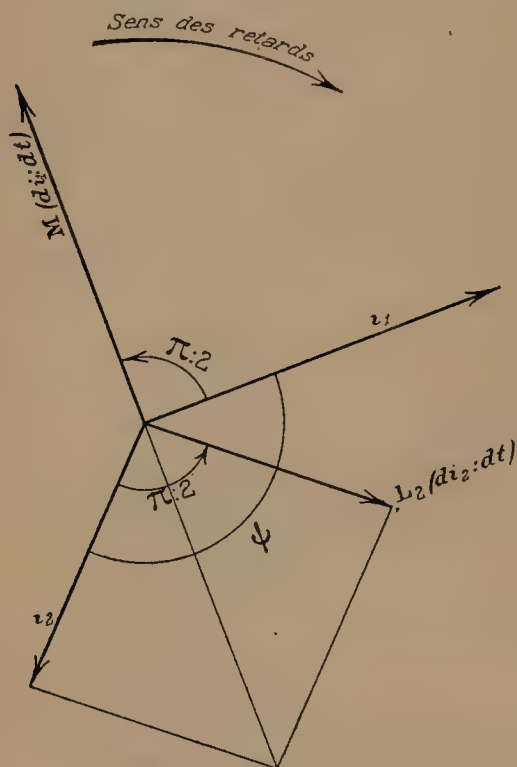


Fig. 271.

2°. — Construisons un galvanomètre à cadre mobile, mais dont les aimants permanents sont remplacés par des électro-aimants excités par un courant alternatif. Le cadre joue le rôle des anneaux d'aluminium dans l'expérience du paragraphe précédent. Quand nous fermons le cadre sur une résistance faible, il se place dans la position où il n'est traversé par aucun flux. Écarté de cette position, il y revient avec un couple considérable.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le couple provient de ce que le champ (ou le courant inducteur i_1 , qui traverse l'électro) et le courant induit i_2 ne sont pas *en quadrature*; la quadrature correspondrait à $\varphi = 0$. Le retard du courant i_2 sur la force électromotrice provient de la self du cadre mobile, ainsi qu'il résulte de l'équation (1) du paragraphe 258.

Nous verrons plus loin (§ 260), qu'il est possible de compenser cette self par une capacité réglable mise en série, et même (§ 265) par une capacité non réglable shuntée par une résistance. Si la compensation est correcte, le couple directeur électrique est annulé : le cadre n'est soumis qu'au couple provenant de la torsion du fil.

On a construit des ampèremètres très sensibles basés sur ce principe. L'électro est excité par le courant qu'on veut étudier.

3°. — Une bobine en court-circuit, pouvant tourner à l'intérieur d'une bobine fixe parcourue par un courant alternatif, tend à se mettre en croix avec cette bobine. L'axe de rotation est, par exemple, parallèle aux spires des deux bobines. On a construit sur ce principe des indicateurs de courant alternatif.

4°. — Un disque métallique posé à plat au-dessus du faisceau de fils de fer aimanté par un courant alternatif (fig. 269), est non seulement repoussé, mais encore rejeté latéralement, dès qu'il cesse d'être parfaitement centré. Il tend à se placer dans l'équateur de l'électro.

Lorsque deux disques métalliques sont mis simultanément dans le champ d'un électro-aimant à courant alternatif, ils jouent le rôle d'écran l'un par rapport à l'autre : donc ils s'attirent mutuellement, de manière à augmenter ce rôle, et sont tous deux repoussés par l'électro.

Un disque monté sur pivot et placé *dissymétriquement* par rapport à un électro à courant alternatif, est mis en rotation continue. Il peut être placé *symétriquement*, pourvu que la dissymétrie soit obtenue par un disque métallique servant d'écran et interposé *dissymétriquement*.

Dans la seconde partie de ce Cours, nous reviendrons plus longuement sur ce dernier phénomène et sur les applications analogues (compteurs à courants alternatifs).

260. Force électromotrice sinusoïdale appliquée à un circuit ayant de la self-induction et de la capacité.

1°. — Un condensateur, interposé sur un circuit, empêche l'existence d'un courant permanent; il n'empêche pas l'existence d'un courant alternatif.

Ses armatures, à tout instant chargées de quantités égales et de signes contraires, se chargent et se déchargent alternativement.

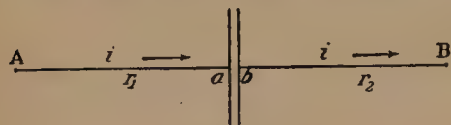


Fig. 272.

Cherchons comment il réagit sur la force électromotrice appliquée (fig. 272).

La force électromotrice sinusoïdale e_a est maintenue entre les extrémités A et B d'un circuit.

Soient V_A et V_B les potentiels aux points A et B. On a par définition :

$$V_A - V_B = e_a.$$

Écrivons les équations fondamentales pour les circuits Aa, bB; soient e_{1s} et e_{2s} les forces électromotrices de self-induction correspondantes :

$$r_1 i = V_A - V_a + e_{1s}, \quad r_2 i = V_b - V_B + e_{2s}.$$

Il est bien entendu que nous nous supposons dans les conditions spécifiées au paragraphe 202; il est possible de parler de la self-induction d'un circuit ouvert.

C'est le même courant de part et d'autre du condensateur, puisque les armatures sont toujours chargées de quantités égales et de signes contraires.

Additionnons les équations; il vient :

$$ri = (V_A - V_B) - (V_a - V_b) + e_s.$$

Soit C la capacité du condensateur, M sa charge; on a (§ 234) :

$$V_a - V_b = M : C,$$

avec la condition : $dM = i dt.$

L'équation devient :

$$ri = e_a + e_s - \frac{M}{C} = e_a - L \frac{di}{dt} - \frac{M}{C}.$$

2°. — Cette équation est générale.

Introduisons l'hypothèse que le courant est sinusoïdal :

$$i = I \cos(\omega t - \varphi).$$

On tire de là :

$$M = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t - \varphi), \quad \frac{di}{dt} = -I\omega \sin(\omega t - \varphi);$$

d'où identiquement : $M = -\frac{1}{\omega^2} \frac{di}{dt}.$

L'équation devient :

$$e_a = ri + \left(L - \frac{1}{C\omega^2} \right) \frac{di}{dt},$$

identique à l'équation précédemment étudiée (§ 253), si l'on pose :

$$k = L\omega - \frac{1}{C\omega}.$$

3°. — Résolvons le problème géométriquement.

Il faut que le vecteur rI et le vecteur Ik porté à 90° du premier dans le sens des *avances*, (sens des aiguilles d'une montre dans la figure 273), aient pour résultante le vecteur E_a .

Autrement dit, la résultante des trois vecteurs rI , $IL\omega$ porté à 90° de rI dans le sens des *avances*, $I : C\omega$ porté à 90° de rI dans le sens des *retards*, doit être le vecteur E_a .

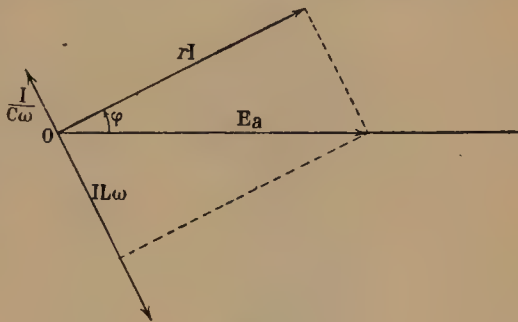


Fig. 273.

L'angle $\varphi = \arctg \frac{k}{r}$ n'est

plus nécessairement compris entre 0 et $\pi : 2$; il varie de $-\pi : 2$ à $\pi : 2$.

Si $k > 0$, si la self l'emporte,

$$0 < \varphi < \pi : 2;$$

le courant est en *retard* sur la force électromotrice appliquée.

Si $k < 0$, si la capacité l'emporte,

$$0 > \varphi > -\pi : 2;$$

le courant est en *avance* sur la force électromotrice appliquée.

Enfin si $k = 0$, les vecteurs de la self et de la capacité s'équilibrent; on a simplement : $e_a = ri$.

4°. — Réunir directement les armatures du condensateur en supprimant le diélectrique, autrement dit rapprocher les armatures jusqu'au contact, revient à poser $C = \infty$: le terme $1 : C\omega$ disparaît. Le résultat est conforme à la définition de la capacité; quand il n'y a pas de condensateur en un point d'un circuit, le passage en ce point d'une quantité quelconque d'électricité ne crée aucune force contre-électromotrice; $V_a - V_b$ reste nul, quelle que soit la charge M : d'où la condition $C = \infty$.

Couper le conducteur en un point, c'est introduire une capacité infiniment petite :

$$C = 0; \quad 1 : C\omega = \infty, \quad I = 0.$$

Dans la pratique, il n'est pas facile de donner à C de grandes valeurs; pour avoir $k = 0$, il faut prendre L assez grand.

La compensation entre la capacité et la self dépend de la fréquence : réalisée pour une fréquence, elle ne l'est pas pour une autre.

5°. — Voici une expérience intéressante. La bobine de self S est un enroulement dont on modifie la réactance en enfonçant plus ou

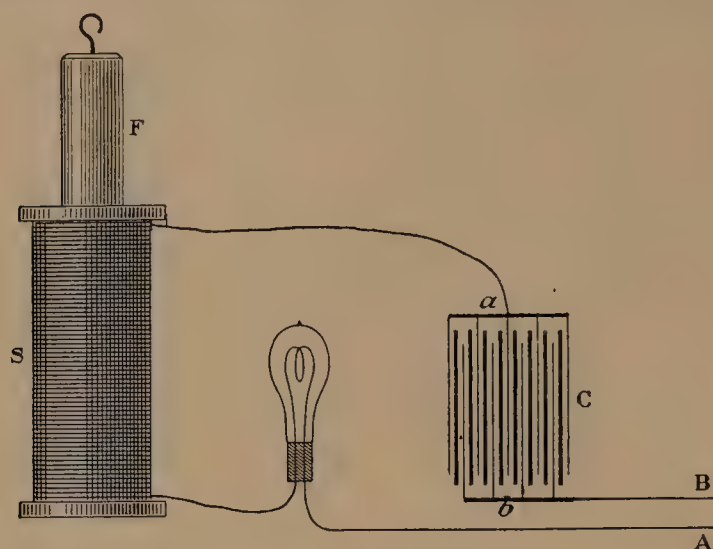


Fig. 274.

moins un faisceau de fils de fer F. Une lampe à incandescence est mise sur le circuit. Si la capacité C (formée de feuilles minces d'étain entre des feuilles de papier paraffiné) est convenablement choisie, *l'éclat de la lampe passe par un maximum quand on enfonce progressivement le faisceau de fils.*

6°. — CAPACITÉS EN CASCADE, EN PARALLÈLE.

Quand plusieurs condensateurs de capacités C_1, C_2, C_3, \dots sont placés à la suite les uns des autres sur le même circuit, le raisonnement précédent généralisé montre qu'il est possible de leur substituer un condensateur *équivalent* de capacité Γ définie par la relation :

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots = \sum \frac{1}{C}.$$

Nous retrouverons cette équation dans la troisième partie de ce Cours.

Les condensateurs ainsi disposés sur un circuit sont dits *en cascade ou en série*.

Si au contraire les condensateurs ont respectivement une de leurs armatures reliée au point A d'un circuit, l'autre reliée à un point B, ils sont *en parallèle ou en quantité*.

La capacité Γ du condensateur équivalent est la somme des capacités :

$$\Gamma = C_1 + C_2 + \dots = \sum C.$$

7°. — REMARQUE SUR L'HOMOGENÉITÉ.

Pour vérifier l'homogénéité des formules qui suivent, on se rappellera que (§ 282) les dimensions d'une résistance sont celles d'une vitesse $\lambda\tau^{-1}$; les dimensions d'une capacité sont celles d'un temps divisé par une vitesse, $\lambda^{-1}\tau^2$; le coefficient de self-induction est une longueur λ .

Les trois quantités r , $L\omega$, $1 : C\omega$, ont donc les dimensions d'une vitesse. Le produit $LC\omega^2$ est un nombre; de même le produit $rC\omega$.

261. Rôles divers de la capacité.

Avant d'aller plus loin, prévenons de graves confusions.

Les condensateurs dont nous supposons l'existence au paragraphe

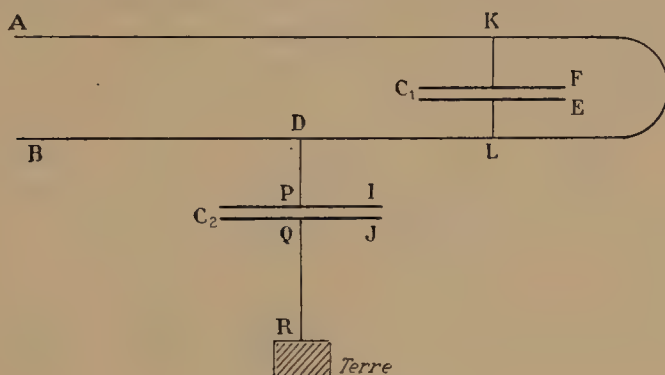


Fig. 275.

précédent, coupent le conducteur. Malgré leur présence, nous supposons sans contradiction que, d'un bout à l'autre d'un conducteur *sans dérivation*, l'intensité du courant est unique à chaque instant.

Avec un condensateur nous pouvons constituer une dérivation (fig. 275). Si, par exemple, nous mettons l'armature J du condensateur C_2 en communication avec le sol (ce qui revient à lui imposer un potentiel constant), le conducteur DPQR est traversé par un courant alternatif : par suite, de part et d'autre du point D, le courant dans le conducteur principal a des intensités différentes.

Nous verrons plus loin comment on traite les dérivations.

Si le condensateur C_2 a une capacité très grande, cela revient à imposer au point D un potentiel constant; si l'on veut, à le relier directement avec la terre.

La capacité *latérale* peut être étalée d'une manière continue tout le long du conducteur. C'est ce qui arrive pour les câbles sous-marins. Nous verrons dans la seconde partie de ce Cours la complication qui résulte de ce que le courant a une intensité continûment variable d'un bout à l'autre du conducteur.

Mais il faut savoir que tout conducteur possède une capacité latérale; du fait qu'un courant passe, il se crée un potentiel variable

qui exige une certaine densité superficielle d'électricité également variable. Heureusement elle est très petite, et nous pouvons la négliger : ce qui nous permet de poser l'identité du courant à chaque instant tout le long d'un conducteur sans dérivation.

262. Remarque sur les forces électromotrices le long d'un circuit.

1°. — Conformément au paragraphe 261, nous admettons que le courant est le même :

$$i = I \cos \omega t,$$

tout le long d'un circuit ABCDE.

Montrons les conséquences de cette hypothèse ; nous préciserons ainsi ce qu'on doit entendre par forces électromotrices appliquées.



Fig. 276.

Les forces électromotrices appliquées respectivement le long des segments AB, BC, ..., de résistances r_1, r_2, \dots et de réactances k_1, k_2, \dots , sont :

$$e_1 = E_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad e_2 = E_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \dots$$

La force électromotrice totale entre les points A et E est :

$$e = E \cos(\omega t + \varphi).$$

Les propositions précédemment démontrées donnent pour les divers segments :

$$I = \frac{E_1}{Z_1} = \frac{E_2}{Z_2} = \dots; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{k_2}{r_2}, \quad \dots \quad (1)$$

La considération du fil entier fournit l'équation :

$$e = e_1 + e_2 + \dots = E \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{(\sum r_1)^2 + (\sum k_1)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum k_1}{\sum r_1}. \quad (3)$$

Ces relations ne sont pas contradictoires.

En effet, l'équation (2) implique les conditions :

$$E \sin \varphi = \sum E_1 \sin \varphi_1, \quad E \cos \varphi = \sum E_1 \cos \varphi_1,$$

$$E^2 = (\sum E_1 \sin \varphi_1)^2 + (\sum E_1 \cos \varphi_1)^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum E_1 \sin \varphi_1}{\sum E_1 \cos \varphi_1}.$$

Remplaçant $\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \dots, \cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, E_1, E_2, \dots$ par leurs valeurs tirées des équations (1), on retrouve les équations (3).

On a en effet (§ 253) :

$$E_1 \sin \varphi_1 = I k_1, \quad E_1 \cos \varphi_1 = I r_1.$$

2°. — C'est au surplus ce que rend évident la figure 277, où les vecteurs E_1, E_2, \dots sont construits à partir du vecteur I couché sur Ox , en portant les *avances* dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les angles $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont nécessairement compris entre $-\pi:2$ et $+\pi:2$; ils sont positifs lorsque le k correspondant est positif; ils sont négatifs dans l'hypothèse contraire.

Dans la figure 277, on a : $k_4 < 0, \varphi_4 < 0$.

La figure montre qu'on peut bien imposer la force électromotrice

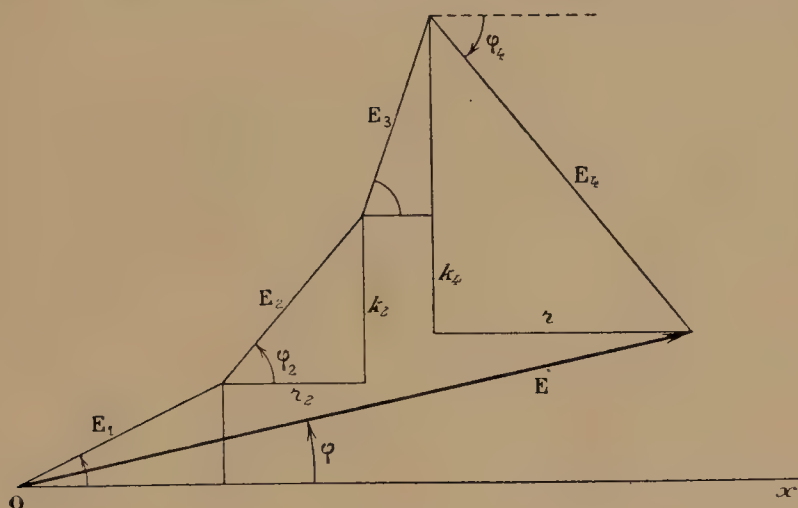


Fig. 277.

appliquée E ; mais l'angle φ ne peut être déterminé que par la connaissance des conditions d'utilisation.

Dans la construction de E , il est évidemment permis d'intervertir les vecteurs.

3°. — Ceci posé, par force électromotrice appliquée sur un circuit ouvert tel que BC (fig. 276), il ne faut pas entendre *seulement* les forces électromotrices d'induction imposées de l'extérieur à cette portion de circuit.

En effet, considérons, disposées en séries sur le même circuit, des bobines analogues à celles du paragraphe 251, tournant dans un champ uniforme avec la même vitesse angulaire, mais décalées les unes par rapport aux autres. Nous sommes libres d'imposer des décalages arbitraires; tandis que, d'après les équations (1), les forces électromotrices appliquées ont par rapport au courant, par conséquent les unes par rapport aux autres, des décalages qui sont déterminés par les valeurs des paramètres $k_1, k_2, \dots, r_1, r_2, \dots$ caractérisant les segments du circuit.

Du reste, il est bien évident que les diverses portions du circuit réagissent les unes sur les autres.

Pour résoudre la difficulté, il suffit d'appliquer les équations géné-

rales de Kirchhoff (§ 202), et de faire intervenir les potentiels électrostatiques aux extrémités des segments considérés. La force électromotrice appliquée au segment BC est égale à la somme de la force électromotrice totale d'induction imposée de l'extérieur, *et de la différence de potentiel électrostatique, différence alternative B—C, provenant de la réaction du reste du circuit.* Ces différences disparaissent quand on applique les équations à un circuit fermé : c'est pourquoi nous avons pu dire, au paragraphe 251, que *la force électromotrice appliquée est généralement une des données du problème, au moins pour les circuits fermés.*

263. — Ligne simple à courant alternatif.

L'intérêt des considérations précédentes apparaît quand on cherche la perte de charge sur une ligne simple à courant alternatif.

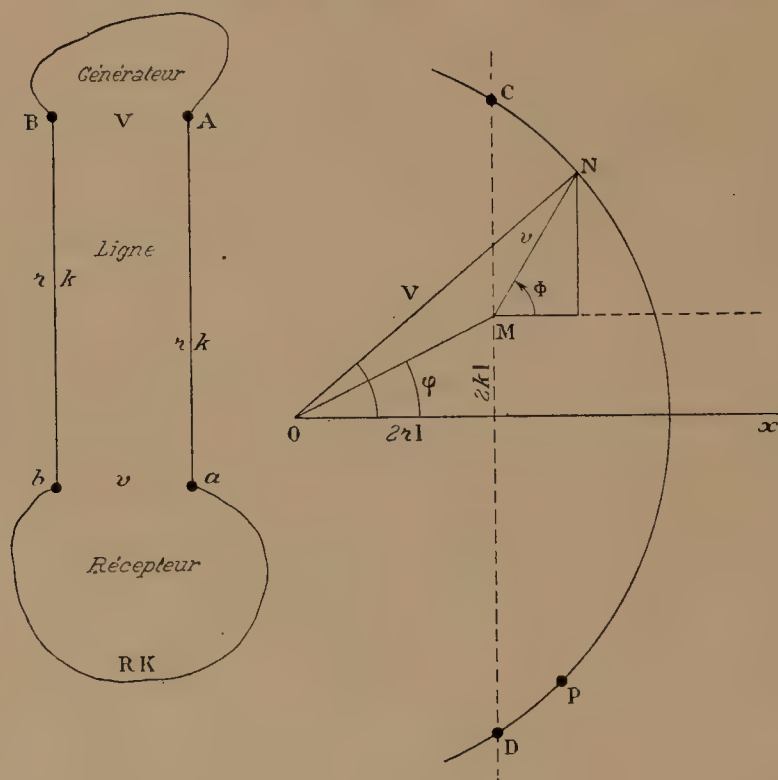


Fig. 278.

Deux fils identiques, définis par les paramètres r et k , relient un alternateur à un récepteur quelconque.

On demande la relation entre les chutes de potentiel alternatives :

$$V = A - B, \quad v = a - b.$$

Elle dépend essentiellement de l'appareil récepteur dont nous appelons R et K les caractéristiques.

Simplifions le diagramme en intervertissant les vecteurs.

Soit Ox la direction du vecteur qui représente le courant.

Construisons les vecteurs \overline{OM} , \overline{MN} , qui représentent les forces électromotrices de la ligne et du récepteur.

Pour cela prenons pour représenter I une longueur arbitraire. Portons suivant Ox une longueur $(2r + R)I$, et dans une direction perpendiculaire une longueur $(2k + K)I$. Nous définirons ainsi un point N et un vecteur \overline{ON} ; ce vecteur représente la force électromotrice alternative qu'il est nécessaire d'appliquer entre A et B pour faire passer le courant I dans le circuit de caractéristiques :

$$r + R + r = 2r + R, \quad k + K + k = 2k + K.$$

Recommençons la même construction pour le circuit de caractéristiques R et K ; nous obtenons ainsi un vecteur \overline{MN} .

Le module du vecteur \overline{MN} est précisément la différence de potentiel maxima entre les points a et b , nécessaire pour faire passer le courant I dans le circuit de caractéristiques R et K .

Supposons V donné : il faut construire la figure OMN à une échelle quelconque (ce que précisément nous venons de faire), puis la réduire de manière que le point N vienne sur la circonférence CND ayant pour rayon la valeur maxima du potentiel V entre A et B , valeur donnée par hypothèse.

En particulier, modifions l'appareil récepteur de manière que V restant invariable, le courant I conserve une valeur constante. La circonférence $CNPD$ et le point M sont donc imposés.

L'angle Φ est compris entre $-\pi : 2$ et $\pi : 2$; le point N est donc entre C et D .

On a généralement $\overline{ON} > \overline{MN}$; mais ce n'est pas nécessaire.

Quand N tombe entre P et D , on a $\overline{ON} < \overline{MN}$; la chute de potentiel le long de la ligne est négative; c'est une élévation de potentiel.

La chute de potentiel est égale au produit de l'intensité du courant par l'impédance de la ligne, quand \overline{MN} est dans le prolongement de \overline{OM} : le récepteur est en phase avec la ligne.

264. Conducteur équivalent à une dérivation.

Un conducteur équivalent à une dérivation à travers les branches de laquelle passent des courants :

$$i_1 = I_1 \cos(\omega t - \phi_1), \quad i_2 = I_2 \cos(\omega t - \phi_2), \dots,$$

quand il transmet à chaque instant le même courant total : $i = \sum i_n$, sous la même différence de potentiel appliquée aux points de bran-

chement : $e = E \cos \omega t$.

Cherchons ses caractéristiques r et k .

On a par définition :

$$i = I \cos(\omega t - \varphi) = \sum I_1 \cos(\omega t - \varphi_1).$$

$$I \sin \varphi = \sum I_1 \sin \varphi_1, \quad I \cos \varphi = \sum I_1 \cos \varphi_1. \quad (1)$$

En vertu de l'équation fondamentale (§ 253), on a pour chaque conducteur séparé et, par hypothèse, pour le conducteur équivalent :

$$I_1 = \frac{E}{Z_1}; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{k_1}{Z_1}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{r_1}{Z_1};$$

$$I = \frac{E}{Z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{k}{Z}, \quad \cos \varphi = \frac{r}{Z}.$$

D'où, par substitution dans les équations (1), les relations qui résolvent le problème :

$$\frac{k}{Z^2} = \sum \frac{k_1}{Z_1^2} = B, \quad \frac{r}{Z^2} = \sum \frac{r_1}{Z_1^2} = A.$$

Multiplions la première par k , la seconde par r ; additionnons.

Multiplions la première par r , la seconde par k ; soustrayons.

Il vient : $Ar + Bk = 1, \quad Br - Ak = 0,$

$$r = \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad k = \frac{B}{A^2 + B^2}, \quad Z^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}.$$

265. Dérivation à deux branches.

1°. — CONDUCTEUR ÉQUIVALENT.

Appliquons la formule démontrée au paragraphe précédent.

Les caractéristiques de la dérivation sont :

$$r = \frac{r_1 Z_2^2 + r_2 Z_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}, \quad k = \frac{k_1 Z_2^2 + k_2 Z_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2};$$

$$Z = \frac{Z_1^2 Z_2^2}{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}.$$

On peut rendre Z très grand pour une fréquence donnée en prenant des résistances assez petites et en annulant $k_1 + k_2$ pour cette fréquence, tout en maintenant séparément grands k_1 et k_2 .

On met sur une des branches une self et sur l'autre un condensateur.

On crée ainsi une sorte de *soupape*, qui laisse passer tous les courants alternatifs, sauf celui de la fréquence choisie.

2°. — CAPACITÉ SHUNTÉE PAR UNE RÉSISTANCE NON INDUCTIVE.

Comme cas particulier intéressant, soit une capacité shuntée par une résistance non inductive :

$$k = 0, \quad Z_1^2 = r_1^2; \quad r_2 = 0, \quad Z_2^2 = k_2^2.$$

On trouve pour la capacité Γ équivalente à la dérivation :

$$\Gamma = \frac{1 + r_1^2 C^2 \omega^2}{r_1^2 C \omega^2}.$$

En définitive, la dérivation formée par une capacité C shuntée par une résistance r_1 , mise en série avec une self L , la compense à la condition qu'on ait :

$$\Gamma L \omega^2 = 1, \quad L = \frac{C r_1^2}{1 + r_1^2 C^2 \omega^2}.$$

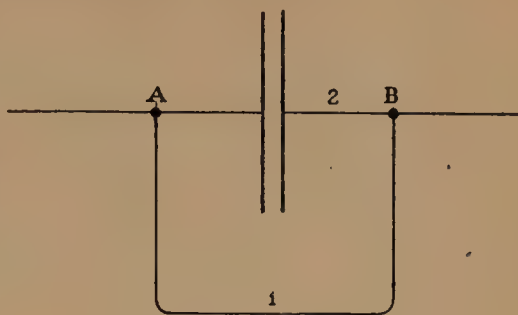


Fig. 279.

3°. — DÉCALAGE RELATIF.

Entre les points A et B existe une force électromotrice appliquée e_a , la même pour les deux branches (fig. 280).

Soit φ_1 et φ_2 les décalages des courants i_1 et i_2 par rapport à cette force électromotrice.

$$\text{On a :} \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{k_2}{r_2}.$$

Posons : $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, il vient :

$$\text{tg } \psi = \frac{k_2 r_1 - k_1 r_2}{k_1 k_2 + r_1 r_2}, \quad \cos \psi = \frac{k_1 k_2 + r_1 r_2}{Z_1 Z_2}, \quad \sin \psi = \frac{k_2 r_1 - k_1 r_2}{Z_1 Z_2}.$$

On peut donc obtenir le décalage relatif des courants 1 et 2.

Supposons que les branches ne contiennent que des bobines de self-induction; soient L_1 et L_2 les coefficients. Les quantités k_1 et k_2 sont positives : φ_1 et φ_2 sont des *retards* compris entre 0 et $\pi/2$.

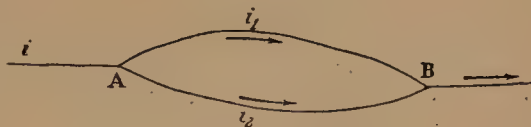


Fig. 280.

Pour que ψ s'approche beaucoup de $\pi/2$, il faut d'une part diminuer L_1 et augmenter r_1 ; d'autre part, prendre L_2 grand et r_2 petit : φ_1 est alors sensiblement nul, et φ_2 voisin de $\pi/2$.

Ce résultat permet la production des champs tournants à l'aide du courant alternatif monophasé (voir seconde partie de ce Cours).

4°. — PARTAGE DU COURANT.

$$\text{On a :} \quad I_1 Z_1 = I_2 Z_2 = IZ.$$

D'où immédiatement :

$$I_1 = \frac{Z_2 I}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}}, \quad I_2 = \frac{Z_1 I}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}}.$$

Posons :

$$i = I \cos \omega t, \quad i_1 = I_1 \cos (\omega t - \eta_1), \quad i_2 = I_2 \cos (\omega t - \eta_2).$$

Les retards des courants sur la force électromotrice appliquée sont φ , φ_1 , φ_2 , donnés par les relations :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{k_2}{r_2}.$$

D'où

$$\eta_1 = \varphi_1 - \varphi, \quad \eta_2 = \varphi_2 - \varphi; \quad \psi = \varphi_2 - \varphi_1 = \eta_2 - \eta_1.$$

On trouve aisément :

$$\operatorname{tg} \eta_1 = \frac{k_1 r_2 - k_2 r_1}{(k_1 + k_2) k_2 + r_2 (r_1 + r_2)},$$

$$\operatorname{tg} \eta_2 = \frac{k_2 r_1 - k_1 r_2}{(k_1 + k_2) k_1 + r_1 (r_1 + r_2)}.$$

Les quantités η_1 et η_2 sont nécessairement de signes contraires, si k_1 et k_2 sont positifs. Elles s'annulent pour la même condition :

$$\frac{k_1}{r_1} = \frac{k_2}{r_2}.$$

266. Condensateur transformateur.

Supposons qu'on ait : $C_1 = \infty$, $L_2 = 0$, et que r_2 soit négligeable : $r_2 = 0$. Écrivons pour simplifier l'écriture :

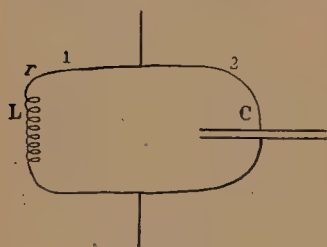


Fig. 281.

$$L_1 = L, \quad C_2 = C, \quad r_1 = r.$$

Il vient :

$$k_1 = L\omega, \quad k_2 = -\frac{1}{C\omega};$$

$$I_1^2 = \frac{I^2}{r^2 C^2 \omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2}.$$

On peut s'arranger de manière que I_1 soit plus grand que I . Cherchons le minimum du dénominateur en fonction de C .

$$\text{Il vient : } C = \frac{L}{\omega^2 L^2 + r^2}, \quad I_1^2 = I^2 \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{r^2} \right).$$

Le courant I_1 est alors certainement plus grand que I .

267. Mesure des intensités efficaces. Emploi de l'électrodynamomètre (bobines en série).

Par définition, l'intensité efficace est la quantité :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I}{\sqrt{2}},$$

dans le cas d'un courant sinusoïdal.

Si on met sur un circuit, où passe un courant alternatif, un électrodynamomètre dont les bobines sont en série, l'indication de l'ap-

pareil est proportionnelle à chaque instant à i^2 ; sa valeur moyenne mesure le carré de l'intensité efficace.

Soit δ cette indication moyenne; on a donc, à un facteur près :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\delta}.$$

Pour un certain courant continu d'intensité constante I' , l'indication est encore : $\delta = I'^2$; d'où $I' = \sqrt{\delta} = I_{\text{eff}}$.

On peut donc étalonner l'appareil avec un courant continu; pour la même indication, l'intensité efficace du courant alternatif et l'intensité du courant continu sont du même nombre d'ampères.

Des contacts à mercure mettent les deux bobines en série.

La bobine mobile, suspendue par un ressort à boudin qui équilibre les actions électromagnétiques, se termine dans deux godets pleins de mercure. Le ressort à boudin est tenu par une tête qu'on peut faire tourner d'un nombre connu de degrés.

L'expérience consiste à faire passer le courant et, par une torsion convenable du ressort, à maintenir le plan des spires de la bobine mobile normal au plan des spires de la bobine fixe (§ 50).

L'appareil n'est pratique que pour des courants très intenses.

Afin que le ressort ne cède pas sous le poids du cadre mobile, celui-ci est en majeure partie supporté par un fil axial de coton dont on néglige la torsion.

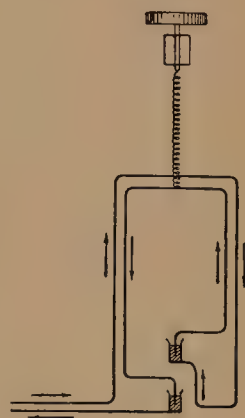


Fig. 282.

268. Mesure des intensités efficaces. Emploi de l'électrodynamomètre (bobine mobile en dérivation).

1°. — Si on veut éviter l'emploi du mercure, il faut suspendre la bobine mobile par un bifilaire, ou par un unifilaire double comme dans les galvanomètres à cadre mobile. Ces suspensions ne pouvant supporter des courants intenses, la bobine mobile est en dérivation.

La théorie de l'appareil se complique.

L'indication est proportionnelle à (§ 258) :

$$\delta = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = \frac{I_1 I_2}{2} \cos \psi,$$

où I_1 et I_2 sont les intensités maxima dans les bobines, et ψ le décalage relatif des courants qui les traversent.

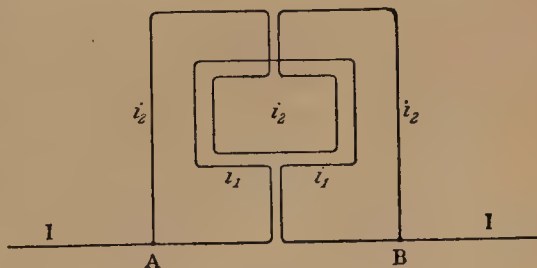


Fig. 283.

Remplaçons I_1 , I_2 , $\cos \psi$, par leurs valeurs tirées du paragraphe 265.

Il vient :
$$I^2 = 2\delta \frac{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}{r_1 r_2 + k_1 k_2}.$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{I^2}{2}} = \sqrt{\delta} \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{k_1 + k_2}{r_1 + r_2}\right)^2}{1 + \frac{k_1 k_2}{r_1 r_2}}} = \sqrt{\delta} \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} \gamma.$$

2°. — Envoyons un courant I' continu *produisant la même déviation*.

Les courants dérivés I'_1 et I'_2 ont pour valeurs :

$$I'_1 = I' \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad I'_2 = I' \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

L'indication de l'appareil est :

$$I'_1 I'_2 = I'^2 \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} = \delta, \quad I' = \sqrt{\delta} \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}.$$

L'intensité du courant continu est donc égale à l'intensité efficace du courant alternatif qui donne la même indication, au coefficient γ près, coefficient caractéristique de l'appareil et fonction de la fréquence.

Il est égal à l'unité si $\frac{k_1}{r_1} = \frac{k_2}{r_2}$.

On cherche à le rendre aussi voisin de 1 que possible; dans la pratique, il n'en diffère que de 1 p. 100 environ.

269. Mesure des volts efficaces entre deux points d'un circuit.

On peut employer en dérivation un ampèremètre à dilatation ou un électrodynamomètre.

Comme ici la résistance du circuit dérivé doit être considérable pour ne pas modifier la force électromotrice à mesurer, il faut supprimer la barre AB de la figure 141 représentant l'ampèremètre à dilatation, et mettre en série avec le fil ab une résistance suffisante, autant que possible non inductive.

Les bobines de l'électrodynamomètre peuvent être en série, ce qui simplifie l'interprétation des résultats.

Soit E la valeur maxima de la force électromotrice appliquée aux points A et B, l'intensité maxima du courant i_2 dans la dérivation

est :
$$I_2 = \frac{E}{Z_2}.$$

Elle est donc proportionnelle à E pour une fréquence donnée.

Pour que l'indication de l'appareil soit indépendante de la fré-

quence, il faut que k_2 soit voisin de 0 ; mais r_2 étant toujours grand, l'importance de k_2 est faible.

On peut employer un électromètre sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire un condensateur dont l'une des armatures est mobile (voir la troisième partie de ce Cours).

L'indication est proportionnelle à :

$$\delta = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt,$$

où e est la différence de potentiel à chaque instant : $\sqrt{\delta}$ mesure les volts efficaces.

L'appareil s'étalonne avec des forces électromotrices constantes (piles).

Il ne faut pas croire, parce qu'il forme une dérivation de résistance infinie *pour les courants continus*, que l'électromètre ne modifie pas la force électromotrice à mesurer. La théorie du paragraphe 260 montre qu'il faut considérer la dérivation sur laquelle se trouve l'électromètre comme de résistance quasi nulle et de capacité égale à celle du condensateur que constitue l'électromètre.

Pour que l'intensité i_2 soit faible dans la dérivation, il faut que $Z_2 = \sqrt{r_2^2 + k_2^2}$ soit grand ; puisque r_2 est petit, il faut que k_2 soit grand, par conséquent C petit. Pour que la force électromotrice à mesurer ne soit pas trop modifiée, l'électromètre doit être un condensateur de très petite capacité.

270. Puissance absorbée entre deux points d'un circuit.

1°. — La différence de potentiel maintenue *entre les extrémités* d'un circuit, et le courant qui le traverse, sont :

$$e = E \sin \omega t, \quad i = I \sin (\omega t - \varphi).$$

Nous avons montré que la puissance absorbée est (§ 252) :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt = \frac{1}{2} E I \cos \varphi = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi.$$

On appelle *watts apparents* le produit $E_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, par opposition aux *watts réels* égaux à W ; $\cos \varphi$ est le *facteur de puissance*.

Il résulte du décalage du courant sur la force électromotrice que, pendant la période T , un appareil quelconque utilisant des courants alternatifs est successivement *récepteur et producteur d'énergie*.

Il absorbe de l'énergie quand e et i sont de même signe ; il en restitue quand e et i sont de signes contraires (§ 252).

Dans un cas extrême, e et i sont toujours de même signe ($\varphi = 0$) ; l'appareil absorbe toujours de l'énergie.

Dans l'autre cas extrême, e et i sont toujours de signes contraires ($\varphi = \pi$); l'appareil restitue toujours de l'énergie.

Dans le cas moyen, e et i sont moitié du temps de même signe et moitié du temps de signes contraires ($\varphi = \pi : 2$); malgré le passage du courant, l'appareil n'absorbe ni ne restitue d'énergie. Ce cas est impossible à réaliser, car l'effet Joule existe toujours et impose une absorption d'énergie dès qu'il y a passage d'un courant.

La mesure séparée des ampères et des volts efficaces ne fournit pas la valeur de l'énergie absorbée; dans certains cas, les watts apparents peuvent différer de 90 p. 100 des watts réels.

On a cherché à obtenir par une seule lecture la mesure de W ; nous montrons plus loin que la solution est possible, quoique pratique-ment elle ne soit pas sans difficultés.

2°. — Calculons pour un circuit quelconque, l'intégrale :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e_a i dt = \frac{E_a I}{2} \cos \varphi,$$

où e_a est la force électromotrice appliquée au circuit, c'est-à-dire la résultante de la différence de potentiel maintenue aux extrémités et des forces électromotrices d'induction aux différents points du circuit, exception faite, bien entendu, pour les forces électromotrices de réaction (self-induction et capacité).

On a : $E_a = \mathfrak{J}I, \quad \cos \varphi = r : \mathfrak{J};$

d'où

$$W = \frac{rI^2}{2}.$$

Ce résultat était facile à prévoir : l'énergie absorbée *dans le circuit* se réduit évidemment à l'effet Joule; un ampèremètre suffit pour la mesurer.

Le problème que nous étudions est tout différent; il s'agit de mesurer les travaux absorbés par les forces électromotrices d'induction qui sont *appliquées le long du circuit*, quand on connaît la différence de potentiel *maintenue aux bornes* de l'appareil.

Il n'existe plus aucune relation *a priori* entre E , I et $\cos \varphi$.

Le décalage φ n'est plus seulement fonction de la réactance du circuit et de sa résistance; il dépend des forces électromotrices d'induction appliquées *le long du circuit*.

Par exemple, nous nous proposons d'étudier l'énergie absorbée dans un moteur. Du fait que ce moteur fonctionne, il naît une force électromotrice alternative qui entre dans la force électromotrice appliquée et qui modifie la phase du courant par rapport à la différence de potentiel appliquée aux bornes.

271. Électrodynamomètre employé comme wattmètre.

Voici le montage le plus simple; il présente l'inconvénient de mesu-

rer à la fois l'énergie dépensée dans l'appareil quelconque à étudier et dans l'électrodynamomètre (fig. 284).

Soit à déterminer l'énergie dépensée entre les points A et B d'un circuit, qui comprend la bobine fixe du dynamomètre (petit nombre de spires de gros fil). Mettons en dérivation la bobine à fil fin avec

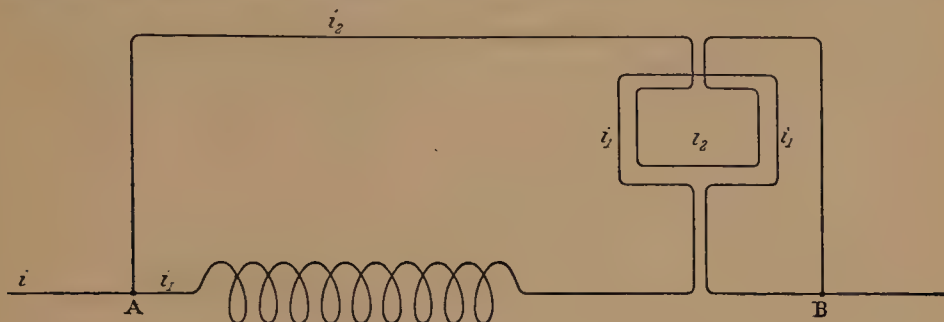


Fig. 284.

des résistances convenables non inductives (lampes à incandescence, bobines enroulées comme celles des boîtes de résistances, résistances liquides). Soit e la force électromotrice appliquée entre A et B.

L'énergie absorbée est :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i_1 dt = \frac{E I_1}{2} \cos \varphi.$$

L'indication de l'appareil est, à un facteur constant près :

$$\delta = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = \frac{I_1 I_2}{2} \cos \psi.$$

ψ est la différence de phase entre les courants qui traversent les bobines 1 et 2.

Si la réactance k_2 du circuit à fil fin est petite, le décalage du courant i_2 sur la différence de potentiel imposée A — B, est négligeable. On a :

$$I_2 = \frac{E}{r_2}, \quad \psi = \varphi; \quad \delta r_2 = \frac{E I_1}{2} \cos \varphi = W.$$

Si la réactance k_2 du circuit n'est pas très petite, on ne peut plus poser $\psi = \varphi$.

On a seulement $W = \delta r_2 \gamma'$, où γ' est un coefficient voisin de l'unité.

Pour des courants continus, on aurait :

$$W = r_1 I_1^2; \quad \delta = I_1' I_2', \quad I_1' r_1 = I_2' r_2; \quad W = \delta r_2.$$

Donc l'appareil étalonné avec des courants continus donne l'énergie absorbée par des courants sinusoïdaux, au facteur γ' près.

On a : $\gamma' = 1$, si $k_2 = 0$.

On s'efforce de rendre γ' voisin de 1, en diminuant la réactance de la bobine mobile.

Étude des courants périodiques non sinusoïdaux.

Les alternateurs industriels ne fournissent pas des courants parfaitement sinusoïdaux; au surplus, en fourniraient-ils, que les transformateurs modifieraient leur forme. Il faut donc étudier la forme de ces courants et chercher en quoi les conclusions des paragraphes précédents sont modifiées par le fait qu'elle n'est pas sinusoïdale.

272. Interprétation des résultats pour les courants non sinusoïdaux.

Chaque fois que dans les résultats de ce chapitre intervient l'hypothèse que le courant est sinusoïdal, ils ne subsistent évidemment plus pour des courants qui ne le sont pas.

Mais plusieurs résultats sont indépendants de cette hypothèse.

Par exemple, la quantité de chaleur laissée dans un circuit est égale à : $\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$, quelle que soit la forme du courant.

Les ampèremètres et voltmètres à dilatation donnent donc les ampères et les volts efficaces pour un courant périodique quelconque.

L'indication d'un électrodynamomètre dont les bobines sont en série, est aussi indépendante de la forme du courant. Mais si les bobines sont en dérivation, le coefficient de correction γ , que nous avons calculé, n'a de sens que pour les courants sinusoïdaux.

L'expression de l'énergie est toujours : $W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt$, quelles que soient les formes de e et de i ; mais on n'a : $W = E_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi$, que si les courants sont sinusoïdaux.

La méthode de l'électrodynamomètre employé comme wattmètre ne suppose pas les courants sinusoïdaux *quand on pose égal à l'unité le coefficient correctif γ'* .

Quand le courant n'est pas sinusoïdal, on peut le considérer comme composé d'une somme de courants sinusoïdaux (développement de Fourier); ces courants sont harmoniques de la tonique dont le nombre de vibrations est, par définition, la fréquence du courant périodique. Comme les équations différentielles auxquelles les courants doivent satisfaire (§ 260) sont linéaires, chacun des harmoniques se conduit comme s'il était seul. Par plusieurs procédés on peut atténuer ou exagérer les effets de l'un d'eux, ce qui revient à créer de véritables résonateurs.

273. Résonateurs pour courants alternatifs.

Soient entre deux points d'un circuit AB des résistances *non induc-*

tives (lampes à incandescence). Les forces électromotrices appliquées aux extrémités du circuit AB, et les intensités des divers harmoniques sont donc proportionnelles; il suffit, pour analyser les unes, d'analyser les autres.

Mettons en dérivation un circuit L, C, R. Soit : $T = 2\pi : \omega$, la période de la tonique; la période du $n^{\text{ième}}$ harmonique est :

$$\frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega}.$$

Le courant dans le circuit dérivé est (§ 260) :

$$i = \sum i_n = \sum \frac{e_n}{\sqrt{R^2 + \left(Ln\omega - \frac{1}{Cn\omega}\right)^2}} \sin(n\omega t - \varphi_n).$$

Il y a résonance pour l'harmonique n , si l'impédance Z_n est le plus petit possible, si par conséquent on a :

$$CLn^2\omega^2 = 1.$$

Quand cette condition est satisfaite, l'harmonique n subsiste seul en pratique; son intensité maxima est :

$$I_n = \frac{E_n}{R}.$$

La force électromotrice maxima E'_n entre les armatures M et N du condensateur est alors donnée par la condition :

$$E'_n = I_n \times \text{réactance du circuit MN} = \frac{I_n}{Cn\omega} = I_n Ln\omega = \frac{E_n}{R} Ln\omega.$$

On la mesure avec un électromètre.

L'expérience consiste à modifier la capacité du condensateur jusqu'à obtenir une indication notable à l'électromètre; la relation :

$$CLn^2\omega^2 = 1$$

est alors satisfaite pour un certain harmonique dont il est facile de connaître le numéro d'ordre, puisqu'on connaît la fréquence.

On peut généralement obtenir la résonance pour plusieurs valeurs entières de n , $n = 1, 2, 3, \dots$

On prouve ainsi l'existence de plusieurs harmoniques; on peut, au moins approximativement, en évaluer l'importance.

274. Mesure de la fréquence.

Quand on dispose de l'alternateur qui produit le courant, on déduit immédiatement de sa construction et du nombre de tours par seconde le nombre de périodes, par conséquent la fréquence.

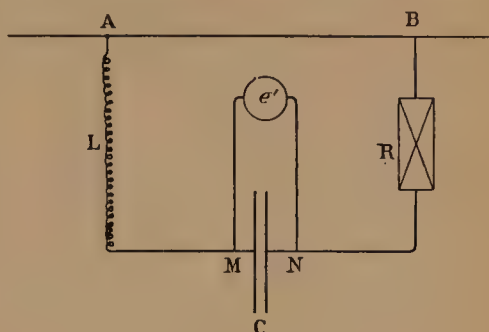


Fig. 285.

Quand on ne peut atteindre l'alternateur, on mesure la fréquence en envoyant le courant dans un électroaimant mobile devant un jeu de languettes d'acier parallèles, fixées par une de leurs extrémités et accordées chacune pour un son connu. L'électro fait vibrer presque uniquement la languette dont le son propre a la fréquence du courant alternatif.

Une série de languettes sont disposées les unes à côté des autres, accordées pour des fréquences variant d'une ou d'une demi-unité. L'expérience consiste à déterminer par tâtonnements la languette qu'excite le mieux l'électroaimant.

La fréquence varie généralement de 15 à 50; on la détermine à une demi-unité près; elle est donc connue à 1/100 près environ.

On peut encore faire vibrer, au moyen d'un électro, un fil de fer fin qu'on tend plus ou moins, ou dont on fait varier la longueur, jusqu'à obtenir l'amplitude maxima. Le fil étant attiré deux fois par période, la fréquence du courant est moitié du nombre des vibrations du fil par seconde. Connaissant le poids du fil par mètre et sa tension, on a ce qu'il faut pour calculer ce nombre (*Mécanique-Physique*, § 471).

275. Emploi du galvanomètre pour la mesure des courants discontinus. Oscillographes.

Reprenons l'équation générale qui régit le mouvement de la partie mobile d'un galvanomètre :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = Gi. \quad (1)$$

Nous avons deux cas extrêmes à considérer.

1°. — MESURE DE L'INTENSITÉ MOYENNE DES COURANTS DISCONTINUS PÉRIODIQUES.

L'inertie de l'aiguille doit être telle, que sa période d'oscillation soit grande par rapport à la période du courant.

Dans l'état permanent, le mouvement de l'aiguille est périodique et de même période que le courant. Multiplions l'équation (1) par dt et intégrons pour une période; elle devient :

$$I\Delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + f\Delta\theta + C \int \theta dt = G \int i dt,$$

$$\text{qui se réduit à} \quad \frac{1}{T} \int \theta dt = \frac{G}{C} \frac{1}{T} \int i dt, \quad (2)$$

puisque, le mouvement étant périodique, l'élongation θ et la vitesse $d\theta/dt$ reprennent les mêmes valeurs au bout d'une période.

L'équation (2) signifie que l'élongation moyenne mesure l'intensité moyenne. Pour diminuer autant que possible les petites oscillations de l'aiguille, on augmentera suffisamment l'inertie, ou, ce qui revient au même pour le but spécial, on diminuera le couple directeur.

Nous aurons plus loin à utiliser le galvanomètre dans les conditions qui viennent d'être dites; le lecteur trouvera d'autres applications aux §§ 230 et 234.

2°. — DÉTERMINATION DE LA FORME D'UN COURANT PÉRIODIQUE. OSCILLOGRAPHES.

Le problème est exactement inverse du précédent : il s'agit d'obtenir que l'aiguille suive les variations d'un courant périodique dont la période est de l'ordre du cinquantième de seconde : le galvanomètre devient un *oscillographe* (Blondel).

La partie mobile, convenablement amortie, a une période extrêmement courte, inférieure à 0,0001 seconde. Elle obéit instantanément aux variations du courant et en inscrit la forme, comme un galvanomètre ordinaire convenablement amorti inscrit la forme d'un courant dont la période est de l'ordre de quelques dizaines de seconde.

La difficulté est de concilier une période extrêmement courte et une sensibilité suffisante : on augmente le couple directeur, on réduit autant que possible l'inertie de la partie mobile, de manière qu'une force minime lui donne une accélération angulaire considérable.

L'amortissement est obtenu par l'emploi d'un bain d'huile ou de glycérine dans lequel est immergée la partie mobile.

Dans un des modèles les plus employés, schématiquement représenté dans la figure 286, le cadre, mobile entre les pièces polaires d'un fort aimant permanent, est simplement constitué par deux fils ab , cd très fins et très rapprochés, fortement tendus et parcourus en sens inverses par le courant à étudier. Les fils sont normaux aux lignes de force, et leur plan est parallèle à ces lignes. Le champ

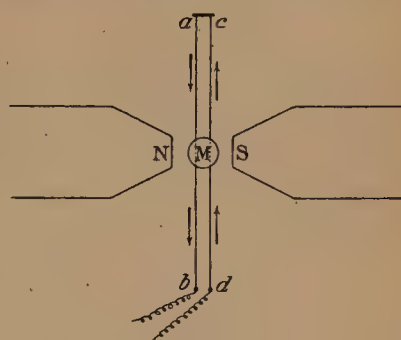


Fig. 286.

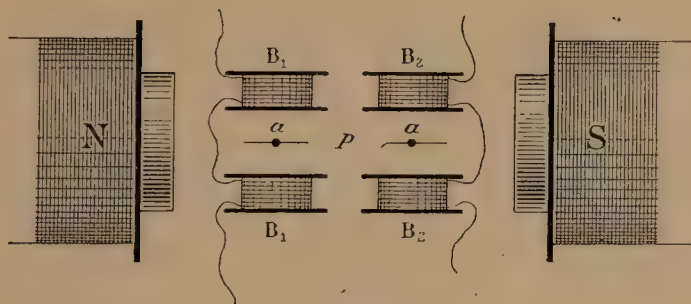


Fig. 287.

tend donc à les déformer en sens inverses. En admettant le courant dans le sens des flèches, cd tend à se courber vers l'arrière, ab vers

l'avant du plan du tableau. Un très petit miroir M (dont l'aire est de l'ordre du millimètre carré) est collé sur le système en son milieu. Il tourne proportionnellement à l'intensité du courant.

Dans un autre modèle (fig. 287), deux très légères palettes de fer doux portent les miroirs; elles tournent autour d'axes parallèles entre eux et normaux aux lignes de force du champ intense NS d'un électro-aimant. Dans les bobines B_1 ou B_2 passent les courants à étudier. Ils créent des champs proportionnels à leurs intensités, à angle droit du champ NS : la palette correspondante se place suivant la résultante des champs.

L'un des systèmes (bobines et palette) est destiné à mesurer l'ampérage d'un courant, l'autre le voltage entre deux points du circuit où passe ce courant.

276. Emploi des oscillographes.

1°. — En définitive, il s'agit d'enregistrer la loi d'oscillation rapide d'un miroir M autour de son axe que nous supposons vertical: l'image

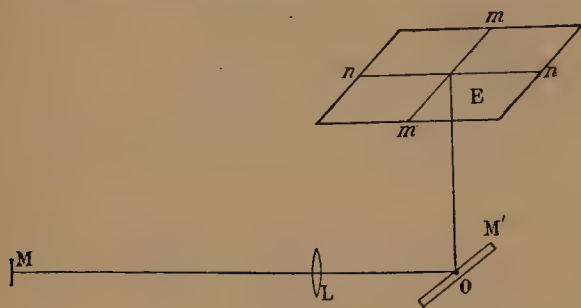


Fig. 288.

qu'il donne d'un petit trou lumineux fixe, oscille donc sur une droite *horizontale*.

Des lentilles convenables font converger sur le miroir M le faisceau lumineux intense émis par le trou. D'autres lentilles L projettent l'image de ce trou sur un écran *horizontal* E , par réflexion

sur un miroir M' (fig. 288), dont nous dirons plus loin le rôle.

L'écran peut être une plaque photographique.

Le miroir M' oscille autour d'un axe horizontal O .

S'il est immobile, l'image du point lumineux se déplace suivant une parallèle à mm' ; si le courant est constant et le miroir M' mobile, l'image se déplace suivant une parallèle à nn' . Il faut donner au miroir M' une vitesse angulaire constante au moment où il renvoie la lumière sur l'écran; peu importe sa vitesse quand, pour une raison quelconque, la lumière réfléchie ne tombe pas sur l'écran.

2°. — Comme on se propose généralement d'étudier les courants périodiques dus à un alternateur, le miroir M' est commandé par une came mue par un moteur *synchrone* (c'est-à-dire dont la vitesse de rotation est fonction absolument déterminée de la période du courant; voir la seconde partie de ce Cours). La came fait tourner le miroir, *dans le même sens et avec une vitesse uniforme*, pendant un temps qui vaut généralement trois périodes du courant: on inscrit donc sur le cliché trois périodes d'une pseudo-sinusoïde. Après quoi

le miroir M' est ramené en arrière, tandis qu'un obturateur masque le faisceau lumineux. Puis les opérations recommencent.

Si on observe à l'œil, la persistance des impressions lumineuses montre en permanence l'image qui se produit d'une façon discontinue.

Pour enregistrer un phénomène non périodique (décharge), on s'arrange pour le produire automatiquement au début d'une période d'inscription; on utilise pour cela des contacts mus par le moteur du miroir, moteur qui est entraîné par un courant alternatif auxiliaire.

3°. — En somme, au point de vue optique, on désire un miroir M' qui tourne d'un mouvement uniforme et *assez lentement pour que l'image du spot décrive la longueur nn en un petit nombre de périodes du courant alternatif* (trois, par exemple).

La solution la plus simple (emploi d'un miroir unique tournant lentement) a l'inconvénient de fournir des images trop distantes dans le temps pour que la persistance des impressions lumineuses les rende permanentes. On tourne la difficulté de bien des manières, outre celle que nous avons exposée. Par exemple, plusieurs miroirs sont fixés sur un disque tournant (comme dans le miroir tournant ordinaire); l'appareil réflecteur est un prisme équilatéral qui agit par réflexion totale et donne trois images par-tour, etc...

277. Méthode de Joubert; perfectionnement stroboscopique.

1°. — Entre les points A et B (fig. 289) existe une différence de potentiel alternative, de période T. Le collecteur représenté fait un

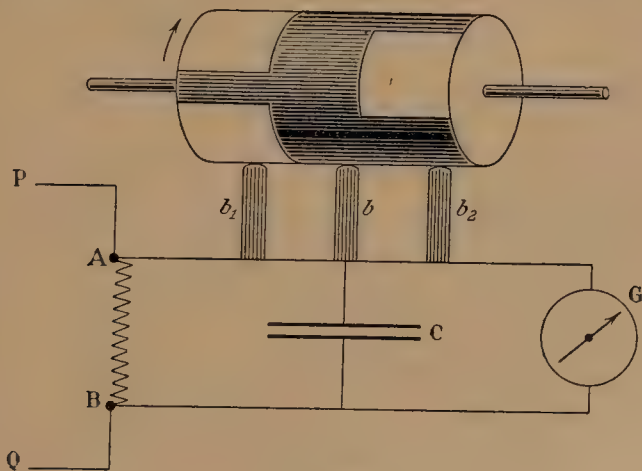


Fig. 289.

tour dans le temps T; autrement dit, il est synchrone du courant qui passe dans le circuit PQ : il suffit pour cela de l'entraîner par un moteur synchrone (voir la seconde partie de ce Cours).

Les parties ombrées sont conductrices; les balais b établissent les communications.

Pendant un instant et grâce à une mince bande métallique, les armatures du condensateur C sont reliées aux points A et B (balais b et b_1); il se charge. Le collecteur continuant à tourner, le condensateur est isolé. Un instant après, il se décharge à travers le galvanomètre (balais b et b_2). Le nombre de décharges par seconde (25 à 50) est suffisant pour que l'indication du galvanomètre reste invariable (§ 275) et mesure le courant moyen.

Soit E la différence de potentiel $A-B$ au moment où intervient le balai b_1 ; soit C la capacité du condensateur; soit enfin N le nombre de décharges par seconde.

Le galvanomètre mesure l'intensité moyenne $i = NEC$; d'où E .

Si, par un procédé quelconque, nous modifions le calage du collecteur par rapport au calage de la partie mobile de l'alternateur, nous déterminerons point par point la courbe périodique :

$$E = f(t).$$

Pour préciser, posons que la période du courant correspond à la rotation $2\pi : n$ de la partie mobile de l'alternateur (induit). On s'arrange de manière que le collecteur fasse un tour pendant que l'induit fait un $n^{\text{ième}}$ de tour. Pour obtenir la courbe point par point, il faut que, dans les diverses expériences, quand l'induit reprend le même azimut, le collecteur occupe successivement tous les azimuts.

2°. — PERFECTIONNEMENT STROBOSCOPIQUE (*Méc. ration.*, § 615).

Telle que, l'expérience est pénible. Elle devient très simple si on modifie automatiquement le décalage du collecteur et si on enregistre graphiquement l'indication périodiquement et lentement variable de l'ampèremètre.

Pour cela, le collecteur fait, non plus un tour par période du courant, mais un tour plus ou moins une petite fraction (1 : 1000, par exemple). Il occupe donc

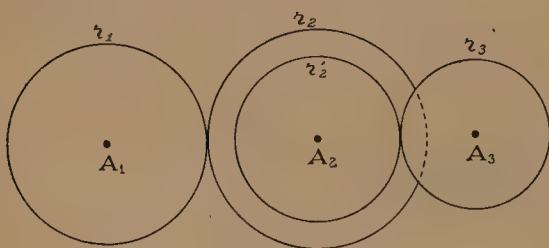


Fig. 290.

tous les azimuts relatifs possibles au bout de 1000 périodes (soit 20 à 40 secondes).

Ce résultat est facile à obtenir avec le rouage représenté dans la figure 290.

Les rapports des vitesses angulaires des axes sont :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r'_2}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r'_2}.$$

Faisons, par exemple :

$$r_1 = 29, \quad r_2 = 30; \quad r'_2 = 29, \quad r_3 = 28.$$

$$\text{On a :} \quad \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{30 \cdot 28}{29^2} = \frac{840}{841}.$$

L'axe A_1 est mû par le moteur synchrone; l'axe A_3 porte le collecteur.

La partie mobile de l'ampèremètre porte une plume qui trace le graphique sur un cylindre entraîné par le moteur et recouvert de papier. Un tour du cylindre correspond généralement à trois périodes *ralenties*.

278. Rhéographe Abraham.

1°. — Reprenons l'équation générale régissant le mouvement de la partie mobile d'un galvanomètre :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + C\theta = G'i'. \quad (1)$$

Le courant i' envoyé dans le galvanomètre n'est pas le courant i à étudier : i' est lié à i par une équation *que nous cherchons à rendre de la forme* :

$$I \frac{d^2i}{dt^2} + f \frac{di}{dt} + Ci = G_1i'. \quad (2)$$

Supposons le résultat obtenu : entre θ et i existera la relation de proportionnalité :

$$\theta = (G : G_1) i. \quad (3)$$

Malgré l'inertie de sa partie mobile, le galvanomètre mesurera le

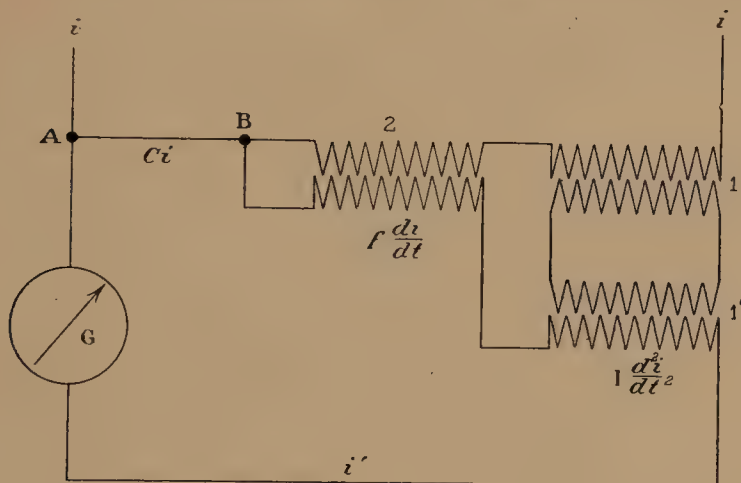


Fig. 291.

courant variable i , par l'intermédiaire du courant i' qui le traverse.

La figure 291 représente les connexions possibles.

Pour réaliser les conditions à satisfaire, on s'appuie sur le fait que les intensités des courants dans deux bobines *sans fer* enroulées sur le même cylindre sont entre elles comme une fonction et sa dérivée.

Deux transformateurs sans fer 1 et 1' disposés en cascade donne-

ront donc, à partir du courant i , une force électromotrice de la forme $I \frac{d^2 i}{dt^2}$.

Un transformateur sans fer 2 fournira une force électromotrice de la forme $f \frac{di}{dt}$.

Enfin une dérivation donnera le terme Gi .

Pour satisfaire la relation (2), il suffit de pouvoir modifier les coefficients d'induction mutuelle des bobines, et la résistance de la portion non inductive AB du circuit principal.

On doit prendre la partie mobile du galvanomètre (son cadre, s'il est à cadre mobile) aussi légère que possible, car la difficulté majeure est de compenser son inertie; le réglage porte essentiellement sur le premier terme de l'équation (2).

Pour intéressant que soit l'appareil ainsi constitué, il est d'un réglage et d'un emploi difficiles.

2°. — Dans un modèle plus récent de rhéographe, le galvanomètre est constitué par un cadre très léger d'aluminium suspendu par des fils de cocon c, c , dans un champ intense H .

L'équation (1) se réduit pratiquement à :

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Gi', \quad (1')$$

puisque le couple antagoniste est nul ($C=0$) et qu'on réduit autant que possible l'amortissement. Il faut donc que le cadre soit le siège d'un courant i' relié au courant i à étudier par la relation :

$$I \frac{d^2 i}{dt^2} = G_1 i'. \quad (2')$$

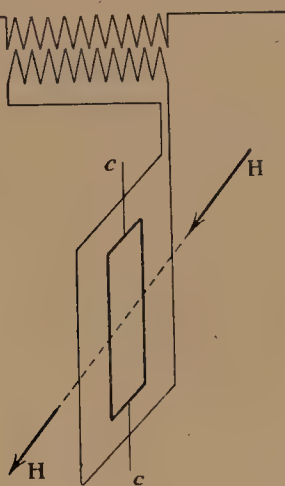


Fig. 292.

Pour cela, très près du cadre, est le primaire d'un transformateur auquel il sert de secondaire. Ce primaire est lui-même le secondaire d'un autre transformateur (§ 230) dont le primaire est traversé par le courant i .

L'appareil ne nécessite aucun réglage.

CHAPITRE XIV

UNITÉS ABSOLUES

Unités et dimensions.

279. Définition des mesures; formules qui les expriment.

1°. — Une mesure consiste à comparer une grandeur à l'unité de même espèce : *elle a pour résultat un nombre abstrait.*

Le langage vulgaire peut conduire à des idées fausses.

On dit qu'une longueur a 4 mètres; pour parler correctement, il faut dire : l'unité est le mètre, le résultat de la mesure est 4.

On dit que l'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de la base par la hauteur. Cette locution est une pure absurdité : une longueur ne peut être multipliée par une longueur au sens arithmétique de la multiplication. Il est vrai qu'on peut inventer une telle opération, mais d'une manière assez arbitraire pour que nous en ayons défini *non pas une, mais deux* qui ont pour résultats *le produit scalaire et le produit vectoriel*. Dans le premier cas, le produit des deux longueurs est un nombre; dans le second, c'est encore une longueur.

On doit dire : en prenant comme unité d'aire un certain carré, l'aire du rectangle s'exprime par le produit des nombres qui sont les résultats de la comparaison des côtés du rectangle au côté du carré. Ou plus rapidement : l'aire du rectangle a pour mesure le produit de la mesure de ses côtés, quand on prend pour unité d'aire l'aire du carré, pour unité de longueur la longueur de son côté.

Toute autre locution est vicieuse.

Bref, il n'entre dans les formules que des nombres : les opérations arithmétiques et algébriques ne sont définies que pour des nombres.

2°. — Les mathématiciens semblent du reste n'avoir que des idées rudimentaires sur ces questions. On lit dans toutes les trigonométries cette phrase absurde : *décrivons une circonférence de cercle*

ayant l'unité pour rayon. Tandis qu'il faut dire : traçons une circonférence quelconque, puis comparons toutes les lignes de la figure au rayon ; en abrégé : *prenons le rayon QUELCONQUE pour unité.*

Entre prendre un rayon égal à l'unité, ou prendre un rayon quelconque pour unité, ces messieurs (qui nous accablent de leurs soi-disant démonstrations précises) ne voient pas de différence.

3°. — Naturellement si ces précisions sont nécessaires en Géométrie, elles le sont davantage en Physique, où les notions utilisées sont plus complexes.

On ne saurait trop répéter qu'une vitesse est une vitesse, et n'est pas le quotient d'une longueur par un temps. La formule : $e = vt$, signifie que, grâce à un choix convenable de l'unité de vitesse, on obtient le nombre qui mesure une vitesse avec cette unité, par le quotient des nombres qui mesurent la longueur et le temps avec certaines unités également choisies.

En définitive, dans les formules n'entrent que des rapports.

Nous devrions écrire : $\frac{e}{e_1} = \frac{v}{v_1} \frac{t}{t_1}$.

D'où résulte (ce qu'on oublie toujours) qu'une formule en Physique est homogène *par essence*, puisqu'il ne peut y entrer que des rapports, c'est-à-dire des nombres abstraits.

Ce n'est que par convention que nous donnons des dimensions apparentes qui ne peuvent rien nous enseigner sur la nature profonde des quantités que nous mettons en œuvre.

J'insiste parce que la collection de bêtises débitées à propos des dimensions dépasse vraiment la limite de ce qui est raisonnablement permis. Il faut qu'on soit prévenu du caractère éminemment *pragmatique et conventionnel* de ce que nous appelons les formules de dimensions.

280. Formules de dimensions.

1°. — Conventionnellement nous prenons comme unités fondamentales distinctes les unités de longueur, de masse, de temps.

Je dis bien *conventionnellement*.

Par là nous n'exprimons pas que *seules* les notions de temps, de masse, de longueur sont distinctes ; faut-il répéter qu'une vitesse est une vitesse, une accélération une accélération, ... ni plus ni moins ? J'imagine que personne n'a la prétention de ramener la notion de température à celles de longueur, de masse ou de temps, sinon comme résultat d'une hypothèse qui n'établit qu'un pont conventionnel.

Non seulement notre choix n'implique rien de métaphysique, mais il est certainement aussi provisoire qu'arbitraire. Tout en considérant comme essentiellement distinctes les notions de longueur, de masse

et de temps, rien ne nous empêche de relier entre elles les trois unités qui servent à leur mesure. C'est précisément ce qu'avaient timidement fait les savants de la Révolution, quand ils reliaient l'unité de masse et l'unité de longueur. Ils auraient pu aller plus loin en reliant aux premières l'unité de temps.

Le lecteur remarquera que, pour l'instant, je ne précise en aucune manière quelles sont les unités choisies : cela ne ferait qu'obscurcir les considérations suivantes.

2°. — La mesure d'une quantité Q se ramène donc (*plus ou moins complètement*) à la mesure d'un ou plusieurs temps, d'une ou plusieurs masses, d'une ou plusieurs longueurs.

On conçoit qu'il est utile de calculer les modifications numériques introduites dans le résultat de la mesure de cette quantité Q , par le changement des unités fondamentales.

Mais il est clair que les transformations de formules, quelles qu'elles soient, ne peuvent modifier la manière dont la mesure de la quantité Q dépend des unités fondamentales; d'où l'introduction d'une homogénéité particulière permettant de vérifier les calculs, comme il arrive en géométrie et pour la même raison.

Les formules dites de dimensions satisfont à ces besoins. Malheureusement leur signification a été souvent mal comprise; de pseudo-philosophes, qui n'étaient que des ignorants, leur ont attribué un rôle qu'elles sont incapables de remplir.

3°. — Partons des formules équivalentes :

$$e = vt, \quad \frac{e}{e_1} = \frac{v}{v_1} \frac{t}{t_1}.$$

Premier problème : cherchons comment est modifiée l'unité de vitesse quand nous modifions l'unité de longueur.

Second problème : cherchons comment est modifié le nombre qui exprime le résultat de la mesure d'une vitesse concrète déterminée (vitesse d'un corps après une seconde de chute, par exemple) quand nous modifions l'unité de longueur.

Nous ramenons immédiatement ces problèmes l'un à l'autre, en remarquant que si l'unité de vitesse est multipliée par α , le nombre qui exprime le résultat de la mesure est multiplié par $1 : \alpha$.

Portons donc notre attention sur le premier problème.

Il est clair que si l'unité de longueur devient dix fois plus grande, la même longueur est exprimée par un nombre dix fois plus petit : pour que la formule subsiste telle qu'elle, il faut donc que la vitesse soit elle-même exprimée par un nombre dix fois plus petit, c'est-à-dire que l'unité de vitesse soit dix fois plus grande.

Même raisonnement pour le temps, mais en sens inverse.

C'est immédiat; la formule de dimension $v = LT^{-1}$ rappelle le résultat : Quand l'unité de longueur est multipliée par α , quand

l'unité de temps est multipliée par β , l'unité de vitesse est multipliée par $\alpha\beta^{-1}$, SI NOUS VOULONS CONSERVER LA FORMULE $e=vt$, AVEC LES MÊMES COEFFICIENTS NUMÉRIQUES (ici égaux à l'unité).

Naturellement le résultat de la mesure d'une vitesse concrète est multiplié par 1 : $\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}\beta$, quand on passe du premier système d'unités fondamentales au second.

4°. — Dans le cas précédent, nous ne pouvions pas nous tromper; la formule de dimensions était inutile.

Mais son utilité croît à mesure que la quantité considérée dépend des unités fondamentales d'une manière plus complexe.

Prenons la formule donnant la force : $F = Mg$.

Nous écrirons :
$$F = M \frac{dv}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pour simplifier, nous remplacerons cette formule par une formule de dimensions dépouillée de tout coefficient numérique et de tout signe de dérivation (voir *Mathématiques générales*, § 17), où nous ne conserverons, par conséquent, que les mesures fondamentales, affectées d'un exposant convenable.

Nous écrirons :

$$\text{vitesse} = LT^{-1}, \quad \text{accélération} = LT^{-2}, \quad \text{force} = MLT^{-2}.$$

On exprime ainsi, non pas que la force est le produit d'une masse par une accélération, ce qui est absurde, encore moins que la force est le quotient du produit ML par le carré du temps, mais simplement que le changement des unités fondamentales influe sur l'unité de force, comme si elle était donnée par la formule $F = MLT^{-2}$.

Par exemple, les formules étant conservées avec mêmes coefficients numériques, si l'unité de temps devient dix fois plus petite (est multipliée par 1 : 10), l'unité de force devient cent fois plus grande.

En effet, l'unité de vitesse, définie par le fait que le mobile parcourt l'unité d'espace dans l'unité de temps, devient dix fois plus grande; l'unité d'accélération, définie par le fait que le mobile gagne une unité de vitesse dans l'unité de temps, devient dix fois plus grande en raison de la diminution de l'unité de temps, dix fois plus grande en raison de l'augmentation de l'unité de vitesse; elle devient en définitive cent fois plus grande.

Prenons une formule quelconque : $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$, par exemple.

Il est clair que les changements d'unités doivent influencer de la même manière sur les deux membres de cette équation. Donc ils doivent être *homogènes* par rapport à M , L , T , au sens que nous venons de définir ci-dessus.

Le moment d'inertie a pour dimensions : $I = ML^2$;

Les dimensions du couple C seront donc :

$$C = ML^2T^{-2} = MLT^{-2} \cdot L = FL.$$

Le couple a les dimensions d'un travail.

Il serait notoirement absurde de dire qu'un couple est un travail; mais la formule ne signifie pas cela : elle exprime seulement que les changements des unités fondamentales influent sur le nombre qui mesure un couple comme sur le nombre qui mesure un travail.

281. Multiplicité des formules de dimensions.

Ce qui étonne le plus les débutants est la multiplicité des formules de dimensions attribuées aux *mêmes* quantités; ils ne comprennent pas, pour la raison si fréquente qu'ils cherchent du compliqué là où n'existe qu'une convention. Cette multiplicité serait absurde si les formules de dimensions avaient la prétention de nous dévoiler la nature secrète des quantités; mais elles ne l'ont pas.

Aussi les discussions sur le meilleur système d'unités sont-elles aussi vaines qu'insupportables : les systèmes sont tous meilleurs suivant le point de vue; pure affaire de commodité dans les notations qui ne touche pas au fond des choses.

L'exemple suivant éclaircira le sujet.

Soit à évaluer une longueur. L'unité s'exprime naturellement par la formule de dimensions $l_1 = L$. Mais convenons de prendre pour unité de longueur le chemin que parcourt en l'unité de temps un certain mobile animé d'une vitesse invariable; nous devons poser :

$$l_2 = T.$$

Voilà donc deux systèmes de mesures pour lesquels les dimensions de la même quantité sont essentiellement différentes. Quand j'écris :

$$l_1 : l_2 = LT^{-1},$$

je ne veux évidemment pas dire que le quotient de deux longueurs est une vitesse. J'exprime simplement qu'on se sert d'une certaine vitesse concrète comme intermédiaire, ici la vitesse du mobile choisi pour préciser la seconde définition.

Supposons donnée cette vitesse : ce sera, par exemple, la vitesse d'un corps tombant en chute libre après une seconde de chute. Prenons une unité de temps dix fois plus petite; il est clair que l'unité de longueur, dans le premier système, ne changera pas; dans le second système, deviendra dix fois plus petite. Le rapport $l_1 : l_2$ des unités de longueur dans les deux systèmes est donc multiplié par dix : *la formule de dimensions n'exprime pas autre chose.*

282. Système CGS. Système électromagnétique.

Je ne reviens pas sur les définitions des unités fondamentales arbitrairement choisies (centimètre, masse, seconde sexagésimale de

temps moyen). Les premières, *purement conventionnelles*, sont la longueur (à 0°) et la masse de certains corps conservés dans un certain local; la troisième demande pour être définie une place exagérée. Disons seulement que le jour sidéral en contient 86164, cela suffit en pratique.

Je rappelle comment est construit le *système électromagnétique* d'unités employé dans tout ce volume.

1° — CHAMP MAGNÉTIQUE, MOMENT D'UN AIMANT, FLUX DE FORCE.

Le point de départ est dans les expériences de Gauss.

Nous posons que le nombre qui exprime la durée d'oscillation d'un aimant dans un champ est donné par la formule (§ 51) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}. \quad (1)$$

M est le nombre qui exprime la mesure du moment magnétique; H est le nombre qui exprime la mesure de l'intensité du champ; I est le nombre qui exprime en grammes masse et centimètres la valeur du moment d'inertie.

Nous posons que le nombre qui exprime la valeur du champ H', dans le prolongement de l'axe d'un aimant et à une distance r du centre (suffisamment grande), est donné par la formule (§ 57) :

$$H' = \frac{2M}{r^3}; \quad (2)$$

r est évalué en centimètres.

La combinaison des formules (1) et (2) fournit des *nombres* qui sont les mesures de M et de H, c'est-à-dire le résultat de la comparaison du moment M et de l'intensité H, au moment concret et à l'intensité concrète qui d'une manière implicite se trouvent *arbitrairement* choisis pour unités.

L'unité concrète de champ ainsi obtenue s'appelle *gauss*.

On appelle quelquefois *maxwell* l'unité de flux qui en dérive.

Il était aussi légitime de poser :

$$T = k \cdot 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}, \quad H' = k' \frac{2M}{r^3},$$

k et k' étant des nombres quelconques.

Tant que T, r , I, restent exprimés dans le système CGS, on ne sort pas de ce système. L'introduction des coefficients numériques k et k' , choisis une fois pour toutes, n'aurait d'autre effet que de modifier la grandeur des quantités concrètes, moment et champ, que l'on prend comme unités, comme termes de comparaison des quantités de même espèce, et qui restent toujours absolument *arbitraires*.

Poser : $k = k' = 1$, c'est faire un choix particulier, ni meilleur ni pire qu'un autre en pure logique.

2°. — AUTRES QUANTITÉS MAGNÉTIQUES. FORMULES DE DIMENSION.

Les unités de champ et de moment étant définies, toutes les autres s'ensuivent. Par exemple, l'intensité d'aimantation étant telle que son produit par un volume donne un moment, on déduit immédiatement la première unité de la seconde.

Le lecteur vérifiera le tableau suivant.

Pour éviter les ambiguïtés de symboles, prenons μ , λ , τ , pour représenter la masse, la longueur et le temps.

On a : $I = \mu \lambda^2$;

d'où, en vertu de (1) : $MH = \lambda^2 \mu \tau^{-2}$.

D'où les formules de dimensions : Champ $\lambda^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \tau^{-1}$.

Moment $\lambda^{\frac{5}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \tau^{-1}$.

Classons maintenant toutes les quantités magnétiques.

Le facteur $\mu^{\frac{1}{2}} \tau^{-1}$ entrant partout, nous ne le récrivons pas.

$\lambda^{\frac{5}{2}}$, moment magnétique;

$\lambda^{\frac{3}{2}}$, masse magnétique, flux de force;

$\lambda^{\frac{1}{2}}$, potentiel magnétique, puissance d'un feuillet;

$\lambda^{-\frac{1}{2}}$, champ, intensité d'aimantation, densité superficielle.

Le coefficient d'aimantation et la perméabilité sont considérés comme des coefficients numériques : leurs dimensions sont nulles.

Les coefficients d'induction (self et mutuelle) ont les dimensions d'une longueur.

3°. — QUANTITÉS ÉLECTRIQUES.

Nous posons que l'intensité d'un courant qui produit un champ identique au champ d'un feuillet limité au même contour et de puissance convenable, est exprimée par le nombre qui mesure la puissance de ce feuillet équivalent. En particulier, cela revient à écrire que le nombre H qui mesure le champ d'un courant rectiligne indéfini, en un point situé à une distance r , est fourni par l'expression :

$$H = \frac{2i}{r}; \quad (3)$$

i exprime l'intensité du courant avec l'unité précédemment choisie.

Nous posons que les produits :

$$Ri^2t = eit, \quad (4)$$

mesurent en ergs l'énergie dépensée dans un conducteur. On déduit de ces formules l'expression numérique des résistances et des forces électromotrices, puisque les nombres i sont déterminables. Poser ces formules revient donc à choisir les quantités concrètes qui servi-

ront d'unités de résistance et de force électromotrice, c'est-à-dire auxquelles on comparera les résistances et les forces électromotrices : on obtient comme résultat de cette comparaison les nombres R et e .

Enfin nous posons que les produits :

$$q = it = Ce, \quad (5)$$

mesurent une quantité d'électricité. On déduit de ces formules l'expression numérique d'une capacité, ce qui revient implicitement à choisir une certaine capacité qui servira d'unité.

Tirons de là les formules de dimensions.

La formule (3) donne pour l'intensité de courant :

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \tau^{-1} \cdot \lambda = \lambda^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \tau^{-1};$$

ce sont les dimensions du potentiel magnétique ou de la puissance d'un feuillet.

La formule (5) donne pour la quantité d'électricité :

$$\lambda^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \tau^{-1} \cdot \tau = \lambda^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}.$$

On a les formules de dimensions :

force	travail	puissance
$\mu \lambda \tau^{-2},$	$\mu \lambda^2 \tau^{-2},$	$\mu \lambda^2 \tau^{-3}.$

La formule (4) donne pour la force électromotrice :

$$\lambda^{\frac{3}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \tau^{-2},$$

ce sont les dimensions du quotient d'un flux par un temps.

Les dimensions de la résistance se tirent de la formule : $E = Ri$:

$$\lambda \tau^{-1};$$

la résistance a les dimensions d'une vitesse.

Enfin les dimensions de la capacité se tirent de la formule (5) :

$$\lambda^{-1} \tau^2.$$

283. Système pratique électromagnétique.

Les quantités concrètes qui se trouvent choisies pour unités du fait des hypothèses précédentes, sont très grandes ou très petites par rapport aux quantités usuelles : les nombres qui entrent dans les formules et qui expriment le résultat de la comparaison des quantités usuelles aux unités, sont donc très petits ou très grands. On a préféré prendre pour unités des multiples des grandeurs qu'on vient de définir : on a ainsi constitué le système pratique. Tout revient à modifier certains coefficients numériques dans les formules.

On conserve les unités de champ magnétique (gauss) et de moment.

Au lieu de l'unité CGS d'intensité, on prend l'ampère, qui est une quantité 10 fois plus petite : le nombre qui mesure un courant en

ampères, est 10 fois plus grand que le nombre qui le mesure avec l'unité CGS électromagnétique.

Il résulte de là que dans toutes les formules reliant l'intensité d'un courant et l'intensité du champ produit par ce courant, s'introduit un nouveau facteur numérique. Ainsi le champ donné par un courant i (en ampères) rectiligne, indéfini, à une distance r , a pour mesure non pas $\frac{2i}{r}$, mais $0,2 \frac{i}{r}$.

On prend pour unité de résistance l'*ohm*, qui vaut 10^9 CGS.

Le produit Ri^2t ne représente plus des ergs; R est un nombre 10^9 fois plus petit que dans le système CGS; i^2 est un nombre 10^2 fois plus grand; Ri^2t est un nombre 10^7 fois plus petit qu'il ne le faut pour représenter des ergs.

Pour éviter le coefficient numérique 10^7 , on choisit une autre unité de travail, le *joule*, qui vaut 10^7 fois l'erg. Le nombre qui exprime le travail en joules est donc 10^7 fois plus petit que le nombre qui l'exprime en ergs. Le produit Ri^2t , où R exprime le nombre d'ohms contenu dans la résistance, i le nombre d'ampères contenu dans l'intensité, exprime le nombre de joules déposés dans le circuit.

Voulant que le nombre *e* mesure l'énergie en joules, on doit prendre pour unité de force électromotrice (*volt*) une force électromotrice 10^8 fois plus grande que l'unité CGS.

Le nombre e s'est donc trouvé divisé par 10^8 , le produit *e* t par 10^7 .

Le *watt* ou joule par seconde (unité de puissance) vaut donc 10^7 ergs par seconde.

Le *coulomb* (unité de quantité d'électricité) doit être 10^{-1} fois l'unité CGS pour que la formule $q = it$, subsiste sans autre coefficient numérique.

L'unité de capacité ou *farad* doit être égale à 10^{-9} unités CGS, pour que la formule $q = Ce$, subsiste sans autre coefficient numérique. En effet, quand on passe du système électromagnétique au système pratique, q , nombre qui exprime le résultat de la comparaison avec l'unité d'électricité, devient 10 fois plus grand, e devient 10^8 plus petit: il faut donc que C devienne 10^9 fois plus grand, que par conséquent l'unité (terme de comparaison) devienne 10^9 fois plus petite.

En modifiant ainsi la plupart des quantités prises pour unités, on a pu maintenir aux formules le même aspect; cependant il n'en est pas toujours ainsi. La force électromotrice d'induction, par exemple, est donnée en volts par l'expression :

$$10^{-8} \cdot \frac{d\mathcal{F}}{dt},$$

où \mathcal{F} est le flux de force, évalué en gauss-centimètres carrés.

Quand le flux dépend de la variation d'un courant, la formule devient :

$$10^{-9} \cdot \frac{d(Li)}{dt},$$

où L est le coefficient de self-induction.

Dans ce dernier cas, on choisit comme unité de coefficient d'induction, une grandeur (*henry*) égale à 10^9 fois l'unité CGS.

Le nombre qui exprime L ou M devient 10^9 plus petit, et l'on doit supprimer le coefficient 10^{-9} en avant de la formule pour calculer en volts la force électromotrice induite.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

L'ampère	vaut	10^{-1}	CGS
Le coulomb		10^{-1}	»
L'ohm		10^9	»
Le joule		10^7	ergs.
Le watt		10^7	ergs seconde.
Le farad		10^{-9}	CGS
Le microfarad		10^{-15}	»
L'henry		10^9	»
Le volt		10^8	»

Réalisation concrète des unités absolues.

284. Généralités.

Le lecteur trouvera d'excellents exercices dans l'étude des diverses méthodes proposées et appliquées à la mesure des unités en valeurs absolues. Je ne veux pas faire l'historique de ces méthodes, pas davantage en discuter les qualités et les défauts; je sortirais de l'esprit de mon Cours. Si le lecteur veut répéter les expériences (ce qui demande quelques années), un résumé ne lui servirait à rien : il doit lire et méditer les mémoires.

Le titre habituel de ce chapitre : « Résistances en valeurs absolues, » est assez mal choisi. Au début, les résistances se présentaient le plus naturellement comme pouvant être conservées et mécaniquement reproduites identiques à elles-mêmes; mais les progrès récemment obtenus dans la réalisation d'éléments ayant des forces électromotrices déterminées, donnent une importance capitale à la mesure *directe* des forces électromotrices en valeur absolue.

On ne peut évidemment pas conserver dans une armoire un ampère ou un gauss. On peut conserver un fil de mercure et un élément dont la résistance et la force électromotrice sont respectivement dans des rapports connus avec l'ohm et le volt. Ce qui est beaucoup plus important, on peut construire autant d'exemplaires qu'on le

désire, identiques à eux-mêmes, de ce fil de mercure et de cet élément, si l'on connaît les dimensions du premier et la composition du second.

J'ai dit qu'on ne peut conserver un gauss dans une armoire : ce n'est pas théoriquement exact, car on peut conserver un aimant. Si son moment magnétique est connu, si c'est une fonction bien déterminée de la température, il fournit le moyen de reproduire à tout instant un champ connu, à une distance connue, dans le prolongement de son axe ou dans le plan équatorial. Mais, outre que la mesure absolue d'un champ et du moment d'un aimant (méthode de Gauss, § 63) est quasiment aussi difficile que la mesure absolue d'une résistance, il est impossible de compter sur la permanence d'un aimant.

Dans la pratique, la force électromotrice d'un élément se détermine en valeur absolue au moyen d'un électrodynamomètre absolu et d'une résistance connue en valeur absolue (§ 186).

285. Méthodes utilisant le galvanomètre balistique.

1°. — MÉTHODE DE WEBER.

Une bobine G de surface totale S est placée normalement à la composante horizontale H d'un champ, déterminé en valeur absolue par la méthode de Gauss (§ 63). Elle fait partie d'un circuit qui comprend un galvanomètre balistique g dont la résistance R inconnue est précisément ce que nous voulons déterminer.

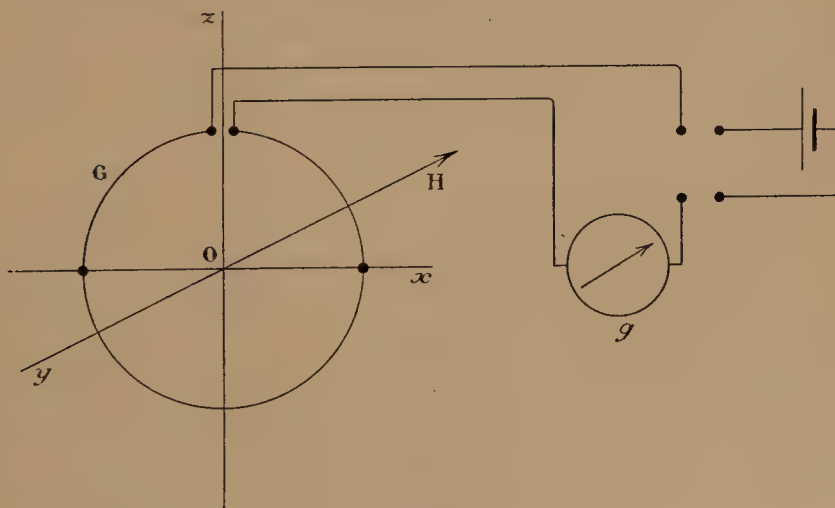


Fig. 293.

Brusquement on fait tourner la bobine de π autour d'un axe vertical Oz . La quantité q d'électricité induite est (§ 228) :

$$q = \frac{2SH}{R}.$$

Soient g la constante du galvanomètre, h le champ directeur de

l'aiguille, T la période d'oscillation de l'aiguille, Θ l'impulsion produite, on a (§ 221) :

$$q = \frac{2SH}{R} = \frac{hT}{\pi g} \sin \frac{\Theta}{2}.$$

Utilisons la grande bobine comme boussole des tangentes ; soit G sa constante galvanométrique. Faisons passer le même courant dans les deux appareils ; soit Δ et δ les déviations simultanées. On a :

$$\frac{H}{G} \operatorname{tg} \Delta = \frac{h}{g} \operatorname{tg} \delta, \quad R = 2\pi \frac{SG}{T} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \Delta} \frac{1}{\sin(\Theta : 2)}.$$

Tout est calculable ou expérimentalement déterminable dans le second membre de cette formule.

S est la surface totale des spires connues par la connaissance du rayon moyen (§ 166) ; G est calculable par la formule d'interpolation du paragraphe 102 jointe à celle qui donne le champ au centre d'une spire.

Les dimensions de S sont λ^2 ; les dimensions de G sont (§ 282) λ^{-1} ; la résistance a bien les dimensions d'une vitesse $\lambda \tau^{-1}$.

Voici quelques dimensions pour fixer les idées ; les nombres sont arrondis.

Dans les expériences de Mascart, une des bobines avait pour rayon de gorge 27 centimètres, pour hauteur radiale 3 centimètres, pour dimension axiale 5 centimètres. On l'avait bobinée de 900 tours représentant environ 1589 mètres. Le rayon moyen était $28^{\text{cm}},4$; la surface, 248 mètres carrés ; la résistance approchée, 38 ohms.

Toujours pour fixer les idées, calculons la quantité d'électricité induite pour une rotation de π , en prenant 40 ohms pour résistance totale du circuit. La résistance en CGS est $40 \cdot 10^9$; prenons :

$$H = 0,2 \text{ gauss},$$

$$S = 248 \text{ m}^2 = 248 \cdot 10^4 \text{ cm}^2;$$

$$\text{d'où} \quad q = \frac{2SH}{R} = \frac{496 \cdot 10^4 \cdot 0,2}{40 \cdot 10^9} = 2,48 \cdot 10^{-5} \text{ CGS},$$

$$q = 2,48 \cdot 10^{-4} \text{ coulombs} = 0,000 \cdot 248 \text{ coulombs}.$$

2°. — MÉTHODE DE KIRCHHOFF.

Deux bobines de même axe B_1 et B_2 ont le coefficient d'induction mutuelle M ; nous savons le calculer (§ 102). Lorsque le courant dans B_1 est interverti, passe de $+I$ à $-I$, la quantité d'électricité induite dans le circuit 2, de résistance R , à déterminer est :

$$q = \frac{2MI}{R} = \frac{h_2 T}{\pi g_2} \sin \frac{\Theta}{2}.$$

Le courant I est mesuré avec le galvanomètre g_1 ; il produit une déviation α telle que :

$$I = \frac{h_1}{g_1} \operatorname{tg} \alpha.$$

Faisons passer le même courant dans les deux galvanomètres. Soient δ_1 et δ_2 les déviations correspondantes; on a :

$$\frac{h_1}{g_1} \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{h_2}{g_2} \operatorname{tg} \delta_2;$$

d'où
$$R = \frac{2\pi M}{T \sin(\Theta : 2)} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \delta_1}.$$

Il est très difficile de mesurer la distance du miroir d'un galvanomètre à l'échelle. Aussi la méthode est-elle singulièrement améliorée

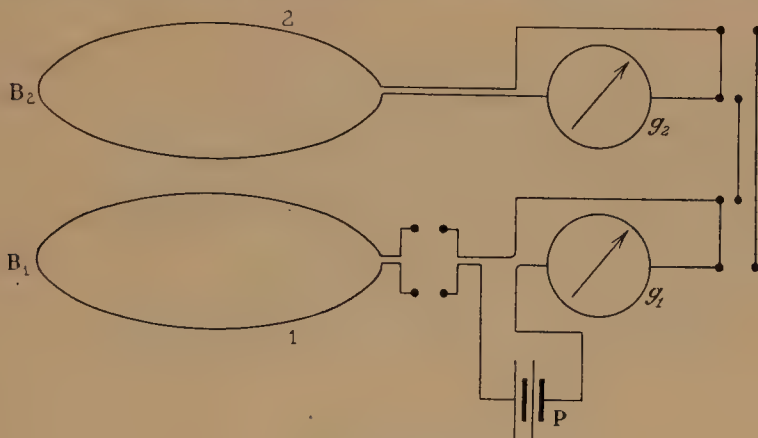


Fig. 294.

par l'emploi du seul galvanomètre g_2 , qui est convenablement shunté lorsqu'il sert à la mesure du courant I .

La formule devient simplement :

$$R = \frac{2\pi M}{T \sin(\Theta : 2)} \varepsilon \operatorname{tg} \alpha;$$

ε est le coefficient par lequel il faut multiplier l'indication du galvanomètre pour compenser le shunt.

286. Méthode où l'on compense la force électromotrice induite.

1°. — MÉTHODE DE FOSTER.

Faisons tourner une bobine de surface S au centre d'un solénoïde, d'axe horizontal, autour d'un axe vertical parallèle aux spires de la bobine. Le flux est à chaque instant :

$$\mathcal{F} = 0,4 \cdot \pi n i S \cos \theta;$$

θ est l'angle des axes de la bobine et du solénoïde; n est le nombre de spires de celui-ci par centimètre.

La force électromotrice induite est à chaque instant :

$$10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt} = -10^{-9} \cdot 4\pi n i S \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Soit $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, la vitesse angulaire constante. La force électromotrice induite est maxima pour $\theta = \pi : 2$; sa valeur est alors :

$$E = 10^{-9} 4\pi n i S \omega.$$

Nous n'avons pas à tenir compte du champ terrestre, si nous plaçons l'axe du solénoïde de manière que la composante horizontale de ce champ lui soit normale.

Supposons que la bobine *ordinairement ouverte* (dans la figure 295 elle est schématiquement représentée par une seule spire $\alpha\beta\gamma$) ne soit

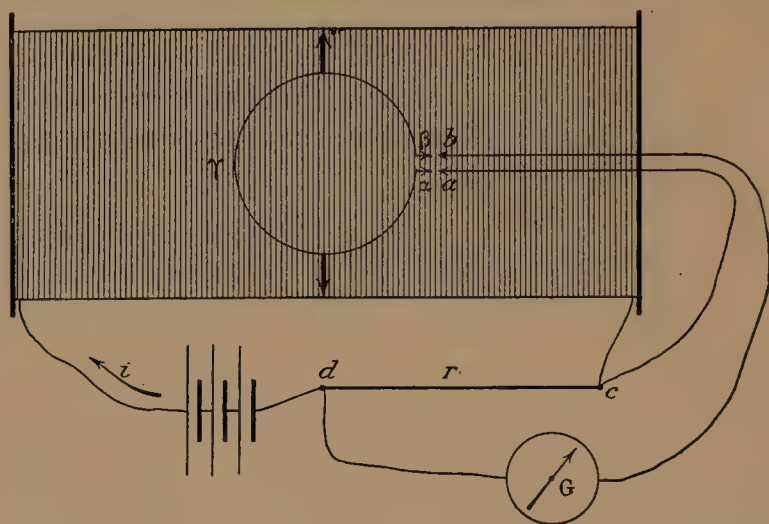


Fig. 295.

fermée sur un circuit extérieur $abcd$ qu'un instant très court au moment du maximum, c'est-à-dire au voisinage de $\theta = \pi : 2$.

Supposons qu'entre les extrémités a et b de ce circuit *ordinairement ouvert* existe une différence de potentiel précisément égale à E , obtenue en faisant passer le courant i dans une résistance convenable r mise en série avec le solénoïde : $E = ri$.

Dans ces conditions, il ne passe aucun courant dans la bobine au moment de la fermeture, ce qu'indique un galvanomètre sensible G .

La self-induction de la bobine ne joue donc aucun rôle.

Le réglage précédent obtenu, on a :

$$E = ri = 10^{-9} 4\pi n i S \omega, \quad r = 10^{-9} \cdot 4\pi n S \omega = 10^{-9} \cdot 8\pi^2 N n S,$$

où N désigne le nombre de tours par seconde.

2°. — On peut utiliser le champ terrestre d'intensité H .

La force électromotrice maxima est alors :

$$10^{-8} \cdot H S \omega.$$

On l'équilibre (comme précédemment) au moyen de la différence

de potentiel aux bouts de la résistance r (à déterminer) dans un circuit traversé par un courant d'intensité i :

$$10^{-8} H S \omega = r i.$$

Enfin on élimine H en mesurant i avec une boussole des tangentes dont la constante est G :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G i}{H}, \quad r = 10^{-8} \frac{S G \omega}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

3°. — MÉTHODE DE LORENZ.

C'est la réciproque de l'expérience de Barlow (§ 84); le lecteur se reportera au paragraphe 196, où la théorie est complétée.

Un disque D de cuivre rouge tourne avec une vitesse angulaire ω

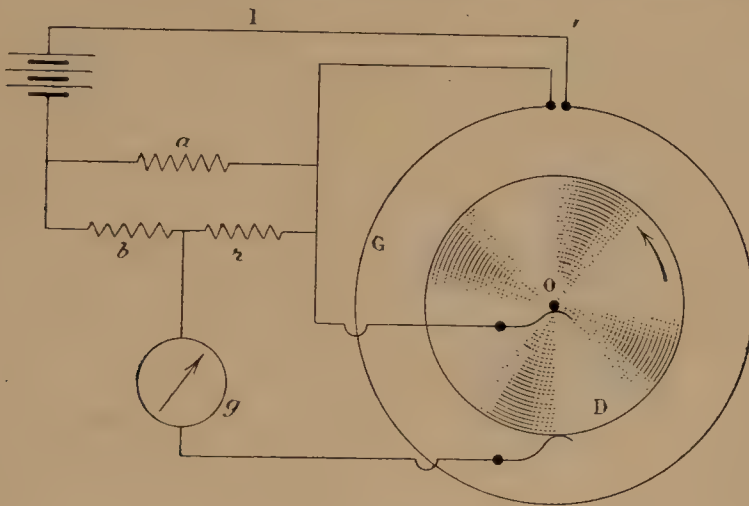


Fig. 296.

connue dans le champ produit par la bobine G traversée par le courant I . Nous savons qu'entre l'axe et le pourtour du disque naît une force électromotrice (en CGS) :

$$E = I M \omega : 2\pi.$$

On lui oppose la différence des potentiels en deux points du circuit principal séparés par la résistance r à mesurer en valeur absolue.

Comme E est extrêmement petit, un artifice est nécessaire pour que r soit de l'ordre de l'ohm.

On dérive le circuit principal; le courant dans les résistances b et r a pour intensité :

$$a I : (a + b + r);$$

d'où la relation :

$$\frac{a r}{a + b + r} I = \frac{I M \omega}{2\pi}, \quad \frac{a r}{a + b + r} = \frac{M \omega}{2\pi}.$$

Il ne reste plus que la résistance r et des résistances a et b dont

on détermine le rapport avec r . La constante M se détermine comme d'habitude (§ 104); ω implique une mesure de temps.

Pour éviter les forces électromotrices thermoélectriques, on construit les balais en un métal aussi identique que possible à celui du disque.

Dans les expériences de lord Rayleigh, le diamètre $2a$ du disque valait 31 centimètres environ. Le champ était dû à deux bobines parallèles presque accolées, de diamètres voisins de 50 centimètres; elles contenaient chacune environ 800 tours de fil.

Leur résistance était approximativement 84 ohms.

Le flux total envoyé par les bobines dans le disque pour un courant d'un ampère était :

$$\pi a^2 G = 215.400 \text{ maxwells.}$$

C'est lui seul qui intervient (§ 196).

287. Mesure d'une force électromotrice en valeur absolue (Limb).

Faisons tourner dans un solénoïde un aimant de moment M autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de l'aimant et à celui du solénoïde.

Nous avons démontré (§ 90) qu'au signe près, le flux total envoyé par l'aimant dans toutes les spires du solénoïde est :

$$GM \cos \varphi = 4\pi n M \cos \varphi,$$

où n est le nombre de spires par centimètre de génératrice.

Posons que l'aimant tourne avec une vitesse angulaire constante :

$$\varphi = \omega t.$$

La force électromotrice induite (rigoureusement sinusoïdale) est :

$$E = 4\pi n \omega M \sin \omega t = 8\pi^2 n N M \sin \omega t,$$

où N est le nombre de tours que l'aimant fait par seconde.

Supposons la bobine constamment ouverte. Si l'on admet sa capacité électrostatique négligeable, le courant qui la traverse est quasi nul; il existe entre les extrémités du fil une différence de potentiel alternative e dont le maximum est :

$$E_m = 8\pi^2 n N M.$$

La self-induction n'intervient pas.

On ferme le solénoïde sur un circuit extérieur pendant un court instant au moment du maximum. Si l'on oppose à la force électromo-

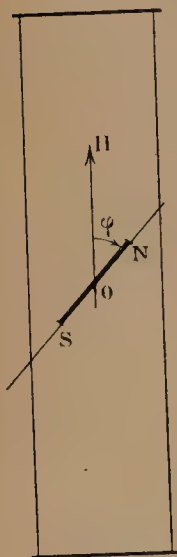


Fig. 297.

trice d'induction une force électromotrice égale, il ne passe aucun courant pendant la fermeture, ce qu'indique un galvanomètre sensible.

Réciproquement, si M est connu en valeur absolue, la mesure de G et de ω font connaître E en valeur absolue. Si, d'autre part, un potentiomètre permet de mesurer quelle fraction de la force électromotrice E' d'une pile donnée est la force électromotrice qui compense E , on connaît E en valeur absolue.

Limb a exécuté des expériences avec une bobine de 70 centimètres de longueur ayant $n = 22$ spires par centimètre. L'aimant est formé de 65 barreaux de 8 centimètres de longueur formant un bloc dont le moment magnétique était de 3300 unités.

Le nombre N variait de 5 à 15.

Cette méthode est intéressante; mais les nombres qu'elle a donnés sont loin de la vérité. Par exemple, Limb trouve pour le Latimer Clark 1,4535 volt, tandis que le nombre exact est voisin de 1,4328. Cela prouve d'abord qu'il est très difficile de déterminer en valeur absolue le moment d'un aimant, surtout aussi complexe que celui qu'on utilisait. Cela prouve ensuite qu'il est probablement illégitime de négliger la capacité de la bobine : à la force électromotrice appliquée se superpose une force électromotrice de capacité.

288. Bobine fermée tournant dans un champ uniforme H .

1^o. — Une bobine de surface totale S tourne, d'un mouvement uniforme et dans le sens de la flèche f , autour d'un axe AB parallèle à ses spires et normal au champ H .

Déterminons le champ moyen dû au courant induit.

La période (durée d'un tour complet)

est : $T = 2\pi : \omega$;

on a donc : $\theta = \omega t$.

Le flux à chaque instant est :

$$SH \sin \theta;$$

la force électromotrice appliquée est :

$$SH \frac{d \sin \theta}{dt} = SH \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = SH \omega \cos \theta.$$

Elle est maxima pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Le courant induit est alternatif sinusoïdal.

Son maximum est en retard sur le maximum de la force électromotrice de l'angle (§ 253) :

$$\varphi = \arctg \frac{k}{r} = \arctg \frac{L\omega}{r}.$$

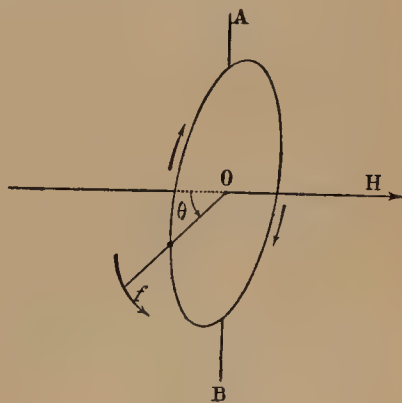


Fig. 298.

Le décalage a ici une interprétation géométrique évidente (fig. 298) : le cadre est parcouru par l'intensité maxima, non pas quand ses spires sont parallèles au champ et quand la force électromotrice appliquée est maxima, mais quand il a dépassé ces positions de l'angle φ , angle que nous savons compris entre 0 et $\pi : 2$.

La loi de Lenz donne immédiatement le sens du champ créé par le courant induit. Il doit s'opposer au mouvement. Le feuillet équivalent au courant doit avoir sa face positive du côté par où arrivent les lignes de force du champ H , quand le flux augmente.

2°. — Représentons le plan horizontal passant par le point O centre de la bobine.

NOM est la direction du cadre quand le courant est maximum ; elle fait l'angle φ avec le champ. Le vecteur OA , normal à MN , est en grandeur et direction le champ créé par ce courant. Quand, à partir de cette position, le cadre tourne de l'angle α , le champ, toujours normal au cadre, vient en OB . Il est sinusoïdal en fonction du temps, par suite en fonction de l'angle θ ; il est représenté en grandeur par

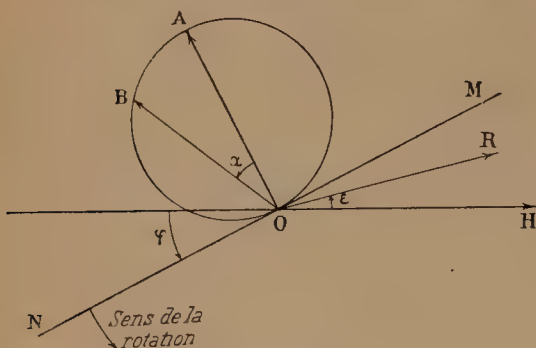


Fig. 299.

le vecteur OB qui part du point O et aboutit à la circonférence menée sur OA comme diamètre.

Quand le cadre a tourné de π à partir de NOM , le courant y circule en sens contraire ; mais comme le cadre a tourné de π dans l'espace, le champ a encore la direction OA .

En définitive, au champ uniforme H se superpose à chaque instant un champ variable représenté par un vecteur qui tourne d'un mouvement uniforme. L'origine de ce vecteur est au point O centre du cadre ; son extrémité décrit la circonférence menée sur OA comme diamètre.

Il fait deux fois le parcours angulaire (OM, OA, ON), pendant que le cadre fait un tour.

3°. — Cherchons le champ moyen équivalent à ce champ variable. Il est évidemment dirigé suivant OA .

Pendant le temps dt , l'angle de OB avec OA étant α , le champ est : $\overline{OB} = \overline{OA} \cos \alpha$; sa composante suivant OA est $\overline{OA} \cos^2 \alpha$. Le champ moyen est donc :

$$\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \overline{OA} \cos^2 \alpha \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \overline{OA} \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{\overline{OA}}{2}.$$

Soit I l'intensité maxima du courant induit, G la constante du cadre, c'est-à-dire le champ qu'il crée en son centre pour le courant unité : $\overline{OA} = GI$. Le champ moyen dû au courant d'induction est dirigé suivant une direction faisant avec le champ H un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ en sens inverse du mouvement; sa valeur moyenne est : $\frac{GI}{2}$.

La valeur de I se tire immédiatement des résultats du paragraphe 262. On a :

$$I = \frac{E_a}{Z} = \frac{SH\omega}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}},$$

où r est la résistance du circuit de la bobine, L son coefficient de self-induction.

289. Détermination de la résistance en valeur absolue; méthode de l'Association britannique.

1°. — Une petite aiguille aimantée A est suspendue au centre du cadre BB où nous venons d'étudier le champ moyen (fig. 300).

Quand le cadre est immobile, elle prend la direction OH (fig. 299); quand le cadre tourne, elle tourne d'un petit angle ε , parce que le champ résulte alors du champ H et du champ :

$$H' = \frac{GI}{2} = \frac{GSH\omega}{2\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} = \frac{GSH\omega}{2Z},$$

que nous venons de calculer. Évaluons l'angle ε .

Soit R le champ résultant :

$$R \cos \varepsilon = H - H' \sin \varphi, \quad R \sin \varepsilon = H' \cos \varphi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{H' \cos \varphi}{H - H' \sin \varphi}.$$

D'ailleurs,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{k}{Z}, \quad \cos \varphi = \frac{r}{Z};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{GS\omega r}{2Z^2 - GS\omega k}. \quad (1)$$

ε est indépendant de H ; c'est évident *a priori*, puisque la direction OA est indépendante de H et que H' est proportionnel à H .

Le coefficient de self intervient comme correction; ce qui est heureux, puisqu'il n'est jamais calculable avec une grande précision (§ 215). En le supposant nul, on a :

$$\varphi = 0, \quad k = 0, \quad Z = r; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{GS\omega}{2r}. \quad (2)$$

Soit a le rayon moyen du cadre, n le nombre de spires; on a :

$$G = 2\pi n : a, \quad S = n\pi a^2, \quad GS\omega : 2 = \pi^2 n^2 a\omega,$$

$$r = \pi^2 n^2 a\omega \cotg \varepsilon.$$

On trouve aisément la formule (2) en négligeant la self-induction dès le début du raisonnement. Elle va nous servir à obtenir une seconde approximation. En remplaçant r par sa valeur dans le terme correctif, on fait apparaître une expression de la forme :

$$r = \frac{GS\omega}{2} \cotg \varepsilon [1 + \Lambda \omega t g^2 \varepsilon + \dots].$$

Les quantités G , S , L , ne dépendant que des mesures de longueur, sont déterminables en valeur absolue ; la connaissance de ω implique une mesure de temps ; ε est une mesure d'angle qui se ramène à la mesure de deux longueurs en unités quelconques.

Par suite, r est déterminable en valeur absolue.

Le principal défaut de la méthode consiste dans le calcul du coefficient de self-induction. Mais ce coefficient n'intervient que dans des termes multipliés par $tg^2 \varepsilon$ (par suite petits), et où la *vitesse angulaire* ω *entre au carré*. Il est donc possible de corriger les résultats en faisant varier la vitesse¹.

2°. — Voici quelques détails sur les expériences².

La bobine BB est divisée en deux enroulements parallèles, de 30 centimètres de diamètre moyen, et portant ensemble 300 tours de fil. La formule du paragraphe 135 donne pour valeur approchée de G :

$$G = 2\pi \times 300 : 15 = 1,25 \cdot 10^2,$$

$$S = \pi \times 300 \times 225 = 2,12 \cdot 10^5.$$

Elle tourne avec une vitesse de l'ordre de 5 tours à la seconde. D'où la valeur approchée de ω :

$$\omega = 2\pi : T = 30.$$

La partie supérieure de l'axe vertical est creuse et donne passage à un tube fixe de laiton T, passant sans les toucher entre les deux enroulements, et terminé par une boîte de laiton dont le centre est au centre de la bobine. L'aimant A oscille dans cette boîte qui le protège des courants d'air. Il est supporté par une tige rigide de laiton t , à l'extrémité supérieure de laquelle est fixé le miroir M (au-dessus des bobines), et qui est elle-même supportée par un fil de cocon c .

Le champ H est le champ terrestre.

Admettons pour la bobine une résistance de 5 ohms, soit $5 \cdot 10^9$ CGS ; la déviation est :

$$tg \varepsilon = \frac{1,25 \times 2,12 \times 3 \times 10^8}{2 \times 5 \times 10^9} = 0,08, \quad \varepsilon = 4^\circ 35',$$

¹ Nous négligeons dans le calcul le champ produit par l'aimant lui-même : il est fixe quand l'aimant a pris sa position d'équilibre ; il ne modifie que d'une fraction très petite le champ H en grandeur et direction.

² Nous arrondirons les nombres. Il importe au lecteur de savoir comment une méthode peut réussir, non pas de connaître les dimensions *exactes* des appareils employés. S'il veut recommencer les expériences, il consultera les mémoires.

soit environ un déplacement du spot de 320 millimètres sur une échelle à deux mètres.

En fait, avec des dimensions analogues et une vitesse plus grande, on atteignait près de 7° de déviation.

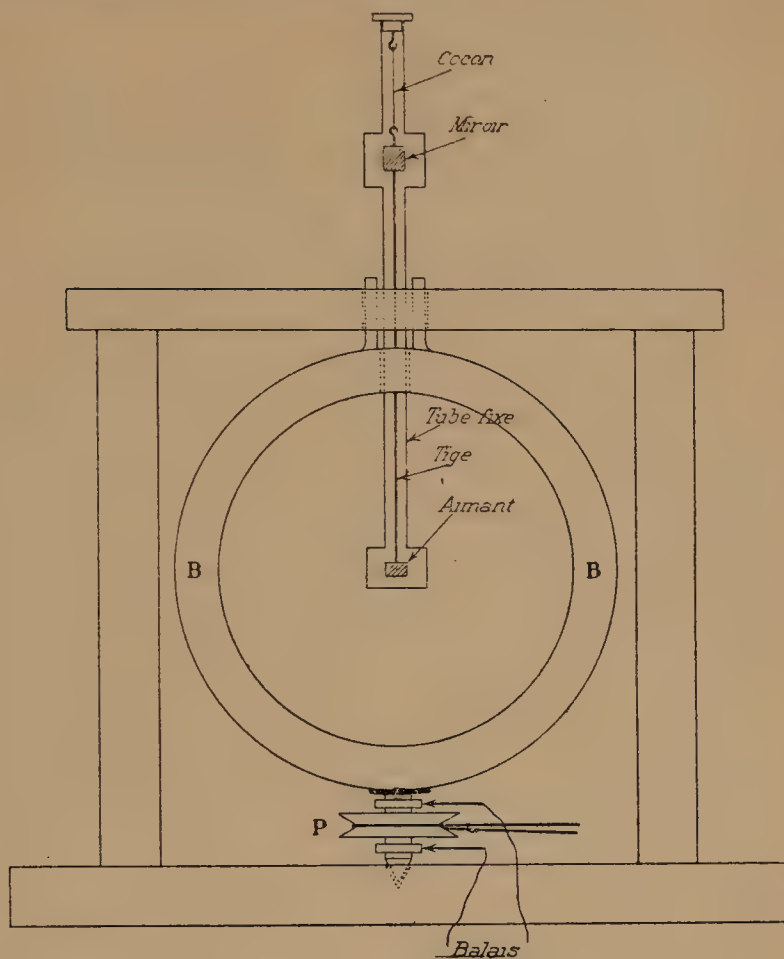


Fig. 300.

Une fois la résistance de la bobine connue en valeur absolue, on réalise, au pont de Wheatstone et par comparaison avec la bobine servant d'étalon, une résistance valant précisément un ohm.

3°. — OHM.

L'ohm ainsi trouvé est la résistance d'une colonne de mercure pur à 0° de 1 millimètre carré de section et de $106^{\text{e}},25$ environ de longueur. Comme ce nombre est toujours revisable, on a préféré définir l'ohm légal (conférence de 1884) comme la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur.

On appelle ohm international (congrès de Chicago) la résistance à 0° d'une masse de mercure de $14^{\text{gr}},452$, mise sous forme d'un cylindre de section transversale constante et d'une longueur de $106^{\text{e}},3$.

290. Méthodes basées sur la loi de Joule; équivalent mécanique de la calorie.

Nous savons mesurer un courant en valeur absolue (§ 166).

Déterminons *en calories* la quantité de chaleur qu'il abandonne dans un calorimètre, en passant dans la résistance r .

Nous avons *en joules* : $Q = ri^2t$. (1)

Si nous connaissons le rapport entre la calorie et le joule, autrement dit l'équivalent mécanique de la calorie, la formule (1) donne la résistance en valeur absolue. Mais comme les mesures électriques sont plus précises que les mesures calorimétriques, c'est exactement la méthode inverse que l'on suit. Cette expérience est une de celles qui donnent l'équivalent mécanique, la résistance r étant supposée connue.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

DES VECTEURS ET DE LEURS FLUX

Définitions vectorielles.

1. Opérations fondamentales sur les vecteurs.	1
2. Règle du bonhomme d'Ampère ; règle du tire-bouchon.	2
3. Produit vectoriel de deux vecteurs.	3
4. Produit scalaire des deux vecteurs. Travail ou circulation d'un vecteur.	5
5. Potentiel	6
6. Gradient d'une quantité scalaire définie dans un espace.	7
7. Expression d'une composante de la force au moyen du potentiel.	8
8. Lignes, surfaces et tubes de force. Champ uniforme.	10
9. Superposition de plusieurs champs de force.	11
10. Exemples de forces admettant un potentiel.	12
11. Cas où le potentiel peut prendre plusieurs valeurs discontinues au même point. Généralisation de la définition du potentiel.	13
12. Connectivité de l'espace.	14
13. Flux d'un vecteur à travers une surface.	15
14. Flux conservatif et non conservatif.	16
15. Exemple de flux conservatif : écoulement d'un liquide incompressible.	17
16. Expression du débit total en fonction de la vitesse d'écoulement.	18
17. Cas d'un fluide compressible.	19
18. Flux de force dans le cas d'un potentiel.	19
19. Divergence d'un vecteur. Théorème de Green.	20
20. Curl d'un vecteur. Théorème de Stokes.	21
21. Exemple : flux d'un vecteur constant	22

CHAPITRE II

ACTIONS EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE

22. Champ de force. Intensité du champ.	24
23. Angles solides.	26
24. Flux envoyé par une masse punctiforme.	26
25. Equations de Poisson et de Laplace.	27
26. Le flux est conservatif à l'intérieur d'un tube de force qui ne contient pas de masses agissantes. Champs uniformes.	28
27. Surfaces équipotentiellles et lignes de force pour deux masses de même signe.	29
28. Surfaces équipotentiellles et lignes de force pour deux masses de signes contraires.	31
29. Construction des graphiques précédents.	33
30. Masses placées dans un champ uniforme.	36
31. Action sur un point extérieur d'une couche sphérique, uniforme, infiniment mince.	37

32. Action sur un point intérieur d'une couche sphérique, uniforme, infiniment mince.	38
33. Action d'une sphère homogène en un point situé à l'intérieur.	39
34. Action d'une couche circulaire en un point de son axe. Action d'un plan indéfini	40
35. Champ de révolution autour d'un axe pour les points voisins de cet axe.	40
36. Discontinuité produite par une couche agissante mince.	41

CHAPITRE III

AIMANTS. MILIEUX POLARISÉS

37. Aimants temporaires, aimants permanents.	43
38. Pôle nord et pôle sud. Méridiens magnétique et géographique.	44
39. Polarisation.	45
40. Potentiel d'un doublet en un point extérieur.	48
41. Intensité de polarisation ou d'aimantation.	49
42. Induction.	50
43. Énergie potentielle d'un volume polarisé.	52
44. Solénoïde élémentaire.	54
45. Aimants solénoïdaux.	54

Aimants permanents dans un champ uniforme.

46. Moment magnétique total d'un aimant permanent.	55
47. Moment magnétique d'un aimant.	56
48. Énergie potentielle d'un aimant dans un champ uniforme.	58
49. Moment magnétique des aimants solénoïdaux.	59
50. Comparaison des moments magnétiques. Manipulation.	60
51. Petites oscillations d'un aimant dans un champ.	62
52. Aimant dans un champ qui n'est pas rigoureusement uniforme.	64

Champs créés par les aimants permanents.

53. Lignes de force magnétiques. Spectres magnétiques.	66
54. Interprétation précise des spectres magnétiques plans.	70
55. Spectres magnétiques usuels.	71
56. Champ d'une molécule polarisée, d'un aimant cylindrique réel.	77
57. Aimant assimilé à deux masses situées à distance finie. Positions fondamentales de Gauss.	79
58. Magnétomètre.	80
59. Méthode de Poggendorff.	82
60. Démonstration de la loi en raison inverse du carré des distances.	84
61. Comparaison des moments magnétiques par le magnétomètre.	84
62. Comparaison de champs horizontaux à peu près uniformes. Déflecteur.	85
63. Méthode de Gauss pour la détermination de MH et de $\frac{M}{H}$	87
64. Unité CGS. d'intensité de champ. Gauss.	88
65. Résultats numériques.	88

CHAPITRE IV

CHAMPS DES COURANTS

Feuillets.

66. Définition. Potentiel sur un point extérieur.	90
67. Cas particuliers.	92
68. Énergie potentielle d'un feuillet dans un champ.	93

Champs des courants.

69. Règles générales.	94
70. Hypothèse d'Ampère.	96
71. Assimilation d'une molécule polarisée et d'un courant fermé élémentaire.	98
72. Existence de dérivations.	99
73. Loi de Biot et Savart.	100
74. Expression analytique de la loi de Biot et Savart.	102
75. Champ d'un courant rectiligne fini ou indéfini.	103
76. Action d'un courant rectiligne indéfini sur un aimant mobile dans un plan normal au courant.	106
77. Expérience de Biot et Savart.	110
78. Expression générale du travail dans le déplacement autour d'un courant de forme quelconque.	111
79. Expression analytique du théorème précédent.	112

CHAPITRE V**ACTION DES CHAMPS SUR LES COURANTS**

80. Hypothèse fondamentale.	114
81. Circuits rigides quelconques dans un champ magnétique.	115
82. Loi de Laplace.	116
83. Réalité de la loi de Laplace	118
84. Expériences de démonstration.	119
85. Balance de Cotton.	122
86. Expression analytique de la loi de Laplace.	122
87. Déformation d'un circuit non rigide.	123
88. Actions réciproques de deux courants parallèles.	124
89. Nécessité d'introduire le flux d'induction dans l'énoncé des lois fondamentales.	126
90. Flux envoyé par un système d'aimants dans un système de courants qui produisent un champ uniforme	127
91. Champs produits par des circuits semblables	129
92. Flux dans les circuits semblables.	129
93. Actions réciproques de deux éléments de courants. Formules diverses.	131
94. Formule d'Ampère.	132

Potentiel vecteur.

95. Potentiel vecteur.	133
96. Potentiel vecteur en fonction de l'intensité d'aimantation de l'aimant producteur du champ.	134
97. Cas d'un feuillet.	136
98. Flux d'induction à travers un feuillet. Energie potentielle d'un feuillet.	138
99. Energie potentielle d'un feuillet dans le champ d'un autre feuillet. Formule de Neumann	138
100. Energie potentielle de deux courants en présence.	140
101. Application à des circuits circulaires de même axe.	142
102. Cas de deux bobines.	144

CHAPITRE VI**LOI D'OHM**

103. Introduction du potentiel électrique. Équation indéfinie.	146
104. Conditions à la surface du conducteur.	147
105. Conducteurs de faible section (fils).	149
106. Dérivations. Conducteur équivalent.	150

107. Phénomènes dans un circuit unique.	151
108. Unités : ohm, volt.	153
109. Quantité d'électricité : coulomb.	154
110. Pont de Wheatstone.	154
111. Lois de Kirchhoff.	155
112. Résolution des équations de Kirchhoff.	157
113. Superposition des états d'équilibre. Généralisation de la notion d'électromoteur.	158
114. Loi de réciprocité.	159
115. Etude générale du pont de Wheatstone.	160
116. Obtention d'un courant alternatif.	162
117. Calcul direct de deux cas particuliers.	163

Corps à deux et trois dimensions.

118. Réfraction des lignes de courants.	164
119. Résistance dans le cas d'un corps à plusieurs dimensions.	165
120. Cas particuliers.	166
121. Distribution des courants dans une plaque.	168
122. Applications.	169
123. Anneaux de Nobili.	169

CHAPITRE V

LOI DE JOULE. ÉNERGIE TRANSPORTÉE PAR LES COURANTS

124. Loi de Joule.	172
125. Énergie absorbée dans une portion de circuit. Unité de force électromotrice.	173
126. Échauffement des conducteurs. Plombs fusibles.	174
127. Mesure de l'intensité efficace d'un courant variable.	175
128. Divers procédés d'amplification.	176
129. Autres formes des ampèremètres à dilatation.	177

Lampes à incandescence.

130. Éclairage par incandescence.	179
131. Lampes à filament de charbon.	179
132. Emploi des lampes.	180
133. Lampes à filament métallique.	181
134. Lampes à filament d'oxyde.	183

CHAPITRE VIII

GALVANOMÈTRES. ÉLECTRODYNAMOMÈTRES

Obtention d'un champ connu en valeur absolue.

135. Champ d'un circuit circulaire.	184
136. Tracé général des lignes de force du champ d'une spire circulaire.	187
137. Dispositif de Gauguin et d'Helmholtz.	188
138. Cas d'un grand nombre de courants circulaires.	190
139. Solénoïdes.	192
140. Champ d'un solénoïde.	193
141. Force magnétomotrice.	196

Distributions particulières de courants.

142. Nappe plane indéfinie.	197
143. Nappe mince cylindrique circulaire.	198

144. Cas général des courants parallèles. Potentiel logarithmique	199
145. Nappe de courant sphérique.	201
146. Théorèmes généraux sur les nappes de courant.	203

Oscillations d'un mobile avec frottement.

147. Mouvements périodiques.	206
148. Mouvements apériodiques.	206
149. Frottement critique.	207

Galvanomètres, ampèremètres et voltmètres à aimant mobile.

150. Généralités. Galvanomètre ordinaire.	207
151. Profil optimum de la section méridienne de la bobine.	210
152. Sensibilité des galvanomètres.	212
153. Equipage astatique.	213
154. Galvanomètre différentiel.	215
155. Shunt des galvanomètres. Réducteurs.	216
156. Galvanomètres employés en télégraphie et téléphonie.	219
157. Ampèremètres industriels.	220
158. Mesure des courants alternatifs. Appareils à fer doux.	221

Galvanomètres, ampèremètres et voltmètres à cadre mobile.

159. Théorie générale.	223
160. Description de l'appareil.	225
161. Radiomicromètre de Boys. Mesure de l'intensité des courants alternatifs.	227
162. Ampèremètres industriels.	227

Electrodynamomètres.

163. Généralités.	230
164. Electrodynamomètre absolu; emploi de solénoïdes.	232
165. Electrodynamomètre balance	234
166. Electrodynamomètre absolu; emploi de bobines.	235

CHAPITRE IX

MESURE DES RÉSISTANCES, DES FORCES ÉLECTROMOTRICES ET DES INTENSITÉS

Résistances.

167. Résistivité. Résistances.	239
168. Rhéostats.	240
169. Appareillage ordinaire.	241
170. Boîtes de résistances.	243
171. Rhéostats de lampes.	244
172. Mesure des résistances par le pont ordinaire de Wheatstone.	245
173. Obtention de l'ohm légal	247
174. Comparaison de deux résistances voisines.	251
175. Vérification d'une boîte de résistance.	251
176. Résistances d'un galvanomètre, d'une pile.	252
177. Méthode de Matthiesen.	253
178. Méthode du double pont.	254
179. Méthode du galvanomètre différentiel.	255
180. Mesure de la résistance par le voltage et l'ampérage.	256
181. Variation de la résistance avec la température. Bolomètre.	257
182. Résistance des fils de cuivre pur recuit.	261

Forces électromotrices.

183. Méthodes applicables aux piles non polarisables.	261
184. Méthode d'opposition.	262
185. Potentiomètre.	264
186. Mesure d'une force électromotrice en valeur absolue.	267
187. Etalons de force électromotrice.	268
188. Equivalent électrochimique de l'argent.	269

CHAPITRE X**PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX D'INDUCTION**

189. Règles générales et expériences fondamentales.	271
190. Entraînement d'un aimant par un disque tournant; expérience inverse.	274
191. Règle quantitative. Circuits linéaires.	275
192. Conservation de l'énergie.	277
193. Conservation de l'énergie dans l'application de la loi de Laplace.	279
194. Phénomènes dans un circuit non traversé par un courant au début de l'expérience.	280
195. Expression du flux balayé par un élément de circuit.	281
196. Réciprocité des phénomènes d'électromagnétisme et d'induction.	282
197. Coefficient d'induction mutuelle de deux circuits linéaires.	283
198. Définition de l'henry.	284

Énergie électrocinétique de l'éther.

199. Énergie d'aimantation de l'éther.	284
200. Énergie d'un système de courants.	286
201. Énergie électrocinétique; comparaison des feuillets et des courants.	288
202. Application des lois de Kirchhoff.	289
203. Cas de deux solénoïdes.	292
204. Circuit unique; établissement du courant.	293
205. Circuit unique; suppression du courant.	296
206. Vibrateurs électromagnétiques. Sonneries.	297
207. Equations générales.	298
208. Cas de deux circuits.	299
209. Courants de Foucault. Ecrans électromagnétiques.	305
210. Courants de divers ordres.	307
211. Répartition des courants variables entre les branches d'une dérivation.	311
212. Application aux électroaimants.	314
213. Coefficients d'induction mutuelle.	314
214. Coefficients de self-induction.	317
215. Self-induction d'une bobine.	318
216. Self-induction de deux conducteurs rectilignes parallèles.	319

Induction dans les corps à plusieurs dimensions.

217. Expression complète de la force électromagnétique.	322
218. Expérience de Matteucci.	325
219. Induction axiale. Expériences de Felici.	327
220. Théorie des images de Maxwell.	329

CHAPITRE XI**GALVANOMETRE BALISTIQUE. MESURE DES PARAMÈTRES D'INDUCTION****Galvanomètre balistique.**

221. Mesure de petites quantités d'électricité.	332
222. Etalonnage du galvanomètre balistique.	333

223. Balistique à cadre mobile.	334
224. Balistique avec amortissement.	336
225. Indications des galvanomètres pour les courants variables alternatifs.	337
226. Bobine fermée oscillant dans un champ uniforme.	340
227. Aiguille oscillant dans une bobine fermée.	342

Mesures des paramètres d'induction.

228. Mesure des champs au moyen des quantités d'électricité induite.	343
229. Comparaison des coefficients de self-induction.	345
230. Etalon de self. Commutateur.	346
231. Comparaison de deux coefficients d'induction mutuelle.	348
232. Balance d'Hughes.	349
233. Comparaison d'un coefficient de self et d'un coefficient d'induction mutuelle.	351

Capacités. Condensateurs.

234. Définition des capacités. Farad.	352
235. Comparaison des capacités.	353
236. Comparaison des capacités au moyen du pont de Wheatstone.	354
237. Comparaison d'une self et d'une capacité.	355

Charge et décharge des condensateurs.

238. Charge et décharge à travers un circuit sans self-induction.	356
239. Décharge à travers un circuit possédant de la self-induction.	358

CHAPITRE XII

ROTATIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET PHÉNOMÈNES D'INDUCTION CONNEXES

240. Rotations électromagnétiques.	360
241. Substratum des actions électromagnétiques.	363
242. Autres expériences de rotation.	365
243. Expériences de Bertin; aimants creux.	366
244. Entraînement du champ d'un aimant.	367
245. Rotation indéfinie d'un aimant.	369
246. Cas où les rotations indéfinies ne peuvent se produire.	371
247. Rotation indéfinie d'un aimant de révolution.	371
248. Induction unipolaire.	374
249. Expérience de Faraday.	376

CHAPITRE XIII

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURANTS ALTERNATIFS

250. Formules usuelles. Valeurs moyennes, valeurs efficaces.	378
251. Définitions et notations.	380
252. Échauffement d'un conducteur; puissance dépensée dans un circuit; facteur de puissance.	381
253. Problème fondamental.	383
254. Règle de Fresnel.	384
255. Application du problème fondamental.	386
256. Emploi des imaginaires.	387
257. Obtention d'un champ en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la force électromotrice appliquée.	388
258. Répulsion de deux bobines.	389

259. Règle générale.	392
260. Force électromotrice sinusoïdale appliquée à un circuit ayant de la self et de la capacité.	394
261. Rôles divers de la capacité.	397
262. Remarque sur les forces électromotrices le long d'un circuit.	398
263. Ligne simple à courant alternatif.	400
264. Conducteur équivalent à une dérivation.	401
265. Dérivation à deux branches.	402
266. Condensateur transformateur.	404
267. Mesure des intensités efficaces. Emploi de l'électrodynamomètre (bobines en série).	404
268. Emploi de l'électrodynamomètre (bobine en dérivation).	405
269. Mesure des volts efficaces entre deux points d'un circuit.	406
270. Puissance absorbée entre deux points d'un circuit.	407
271. Electrodynamomètre employé comme wattmètre.	408

Étude des courants périodiques non sinusoïdaux.

272. Interprétation des résultats pour les courants non sinusoïdaux.	410
273. Résonnateurs pour courants alternatifs.	410
274. Mesure de la fréquence.	411
275. Emploi du galvanomètre pour la mesure des courants discontinus. Oscillographes.	412
276. Emploi des oscillographes (Blondel).	414
277. Méthode de Joubert. Perfectionnement stroboscopique.	415
278. Rhéographe Abraham.	417

CHAPITRE XIV

UNITÉS ABSOLUES

Unités et dimensions.

279. Définition des mesures. Formules qui les expriment.	419
280. Formules de dimensions.	420
281. Multiplicité des formules de dimensions.	423
282. Système CGS. Système électromagnétique.	423
283. Système pratique électromagnétique.	426

Réalisation concrète des unités absolues.

284. Généralités.	428
285. Méthodes utilisant le galvanomètre balistique.	429
286. Méthodes où l'on compense la force électromotrice induite.	431
287. Mesure d'une force électromotrice en valeur absolue (Limb).	434
288. Bobine fermée tournant dans un champ uniforme.	435
289. Détermination de la résistance en valeur absolue; méthode de l'Association britannique.	437
290. Méthodes basées sur la loi de Joule; équivalent mécanique de la calorie.	440

Librairie **CH. DELAGRAVE**, 15, rue Soufflot, Paris.

COURS DE PHYSIQUE

CONTENANT LES PRÉLIMINAIRES DU COURS POUR LES CERTIFICATS
ET L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

PAR

H. BOUASSE

Professeur à l'Université de Toulouse.

L. BRIZARD

Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.

Trois volumes petit in-8° formant, en plus de 1100 pages, un cours complet de Physique élémentaire. Classes de Seconde et de Première CD, Classe de Mathématiques A.

La Collection des trois volumes : Brochés. 9 fr. 75 — Reliés toile. 12 fr.

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES DE MÉCANIQUE ET DE PHYSIQUE

PAR **H. BOUASSE**

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

I. COURS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES, spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs, conforme au programme du certificat de Mathématiques générales, servant d'introduction au **Cours de Mécanique et de Physique**.

Un volume in-8° de 630 pages, illustré de 323 figures, broché. 20 fr.

EXERCICES ET COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (avec la collaboration de E. TURRIÈRE, docteur ès sciences, professeur agrégé au lycée de Poitiers). Ouvrage faisant suite au précédent.

Un volume in-8° raisin, 520 pages, 374 figures, broché. 18 fr.

II. TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE ET EXPÉRIMENTALE, formant la préface du **Cours de Physique** et spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs, conforme au programme du certificat de Mécanique rationnelle.

Un volume in-8°, 692 pages, 429 figures, broché. 20 fr.

III. COURS DE PHYSIQUE, conforme aux programmes des certificats de licence et de l'agrégation de Physique.

Tome I. — **Cours de Mécanique physique**, deuxième édition, complètement transformée et considérablement augmentée; ouvrage formant avec le **Traité de Mécanique rationnelle** un cours complet de mécanique expérimentale.

Un volume in-8°, 684 pages, 307 figures, broché. 20 fr.

Tome II. — **Thermodynamique**. (Deuxième édition en deux volumes.)

PREMIÈRE PARTIE : PRINCIPES GÉNÉRAUX, GAZ ET VAPEURS. Un vol. in-8°, 462 pages, 188 figures, broché. 18 fr.

DEUXIÈME PARTIE : APPLICATIONS. MACHINES THERMIQUES. CHIMIE PHYSIQUE. Un vol. in-8°, 422 pages, 174 figures, broché. 16 fr.

Tome III. — **Électricité et Magnétisme**. (Deuxième édition en trois volumes.)

PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE DU CHAMP MAGNÉTIQUE. 16 fr.

DEUXIÈME PARTIE : APPLICATIONS. Compensation des compas, moteurs, télégraphie, téléphonie, etc. (En préparation.)

TROISIÈME PARTIE : SPÉCIALITÉS. Théorie des piles, radioactivité, théorie électrique des phénomènes chimiques, etc. (En préparation.)

Tome IV. — **Optique. Instruments**. Un vol. in-8°, 240 pages, 207 figures, broché. 13 fr.

Tome V. — **Électrooptique**. Un vol. in-8°, 426 pages, 191 figures, broché. 14 fr.

Tome VI. — **Étude des Symétries**. Un vol. in-8°, 424 pages, 240 figures, broché. 14 fr.

LES MACHINES ASYNCHRONES

PREMIÈRE PARTIE

LES MACHINES D'INDUCTION

THÉORIE, CALCUL, CONSTRUCTION, FONCTIONNEMENT

PAR **E. ARNOLD** ET **J.-L. LACOUR**

en collaboration avec A. FRAENCKEL;

traduit de l'allemand par G. DERMINE et L. PAGET, ingénieurs.

Un vol. in-8°, 576 pages, 10 planches hors texte, 307 gravures, broché 22 fr.; relié 25 fr.



This book should be returned to
the Library on or before the last date
stamped below.

A fine of five cents a day is incurred
by retaining it beyond the specified
time.

Please return promptly.

~~DUE OCT 21 1936~~

DUE JUN 21 1926

~~DUE DEC 14 '36~~

~~DUE APR 21 '44~~

~~JULY AUG 23 '46~~

MAIL 8/13/46

Phys 3079.14.5
Cours de magnetisme et d'electric
Cabot Science 003449284



3 2044 091 959 783